

УДК 539.3

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕСКВОЗНЫМ РАЗРЕЗОМ-ТРЕЩИНОЙ ПРИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ ПО СХЕМАМ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

© 2008 С. Л. Степанов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Формулируется упругопластическая задача о растяжении тонкой пластины с несквозным (поверхностным) разрезом. Процесс пластического деформирования материала как на всей длине разреза, так и в пластических зонах у его вершин моделируется по схемам жёсткопластического течения, что позволяет учитывать изменение геометрии пластины по толщине вблизи несквозного разреза и на его длине. Получено решение интегрального уравнения Фредгольма в квадратурах и построена процедура для определения численных результатов. В явном виде определена зависимость раскрытия берегов разреза от толщины пластины и глубины. Раскрытие берегов разреза используется в качестве деформационного критерия разрушения.

Разрез-трещина, пластическая деформация, упругопластическая задача, объёмная плотность, энергия диссипации, критерий разрушения, интегральное уравнение.

В настоящее время значительный интерес представляют задачи механики разрушения для образцов и элементов конструкций, находящихся в плоском напряжённом состоянии, с различными дефектами, возле которых возникают соизмеримые с ними по размерам области больших пластических деформаций. Это связано с широким использованием в тонкостенных конструкциях и оболочках летательных аппаратов материалов, обладающих хорошими деформационными свойствами и достаточно высокой пластичностью, а также с высоким уровнем эксплуатационных нагрузок.

С другой стороны, задача о разрушении пластины из упругопластического материала, находящейся в плоском напряжённом состоянии и имеющей несквозной трещиновидный дефект, имеет более общий характер и представляет больший практический интерес, чем задача о сквозной трещине. Это объясняется тем, что в тонкостенных конструкциях и оболочках, будь то фюзеляж самолёта или топливные баки ракет, всегда существуют повреждения, имеющие технологический характер или возникающие в результате внешних воздействий, и в процессе эксплуатации трансформирующиеся в царапины. В свою очередь, в зависимости от уровня внешних нагрузок такие царапины могут

как прорасти в сквозные трещины, так и сразу вызвать разрушение конструкции. Определение соответствующих предельных состояний в постановке Дагдейла рассмотрено в работе [1].

В настоящей работе, в отличие от [1], краевые условия для задачи о растяжении тонкой упругопластической пластины с несквозным разрезом-трещиной формулируются на основании представления процесса деформирования материала по толщине на длине этого разреза и в пластических зонах по схемам жёсткопластического течения. На длине царапины $2l$ деформирование материала происходит по схеме несимметричного жёсткопластического течения, рассмотренного в [2] и приведённого на рис. 1. Здесь h – толщина пластины, a – глубина несквозной трещины, v – скорость смещения верхнего и нижнего концов пластины, u – скорость прорастания несквозного разреза-трещины в глубину (движение т. О к т. О').

Область $A'O'B'$ движется как жёсткое целое по направлению к т. О со скоростью v . Пластические деформации локализуются вдоль изолированных линий скольжения $A'O'$ и $B'O'$, которые являются линиями разрыва скоростей перемещений. При пересечении этих линий частицами материала происходит скачкообразное увеличение деформаций и их

локализация в заштрихованных областях.

Мерой этих деформаций можно выбрать первое главное значение тензора конечных деформаций Альманси E_1 или, согласно [2], эквивалентный энергетический критерий, использующий имеющую физический смысл величину объёмной плотности энергии диссипации W , получаемой материальной частицей при пересечении линии разрыва скоростей перемещений:

$$\max W \geq W_* \quad (1)$$

Тогда скорость прорастания несквозного разреза-трещины определится следующим образом:

$$u = v \left(\frac{2}{\bar{W}_*} - 1 \right) \quad (2)$$

где \bar{W}_* – критическое значение относительной объёмной плотности энергии диссипации $\bar{W}_* = W_* / k$, k – предел текучести материала на сдвиг, v – смещение берегов несквозной трещины в единицу времени.

Несквозной разрез прорастает на всю глубину при $v + u = h - a$, когда т. О выйдет на тыльную поверхность $A'B'$. Составив уравнение равновесия для полосы с учётом (2), получим

$$P \cdot h = 2k (h - a - v - u) = S_s \left(h - a - \frac{2v}{\bar{W}_*} \right) \quad (3)$$

где P – усилие, растягивающее полосу; S_s – предел текучести.

На рис. 2 представлена схема симметричного жёсткопластического течения, моделирующая деформирование материала пластины в пластических зонах у вершин несквозной трещины. Процесс деформирования происходит аналогично рассмотренному выше, но в отличие от последнего внутренняя трещина $O'O''$, вершины которой движутся в разные стороны со скоростью u , выйдет на свободные поверхности $A'B'$ и $C'D'$ при $v + u = h/2$. Уравнение равновесия для симметричного течения выглядит следующим образом:

$$P \cdot h = 2k (h - 2u - 2v) = S_s \left(h - \frac{4v}{\bar{W}_*} \right) \quad (4)$$

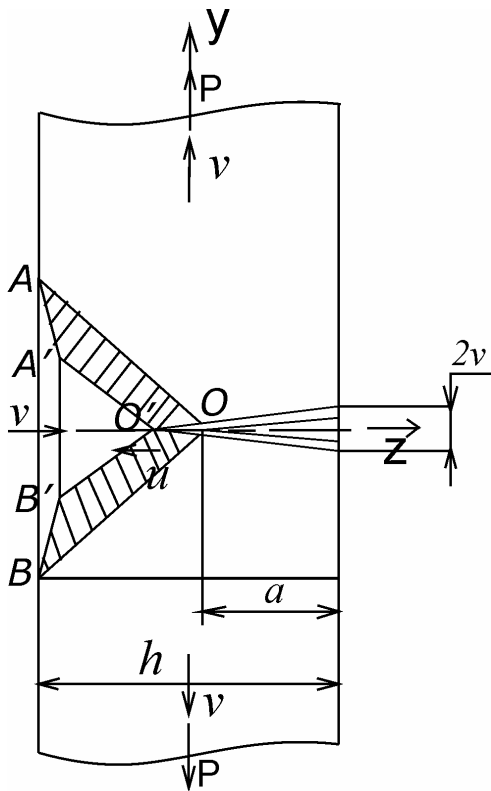


Рис. 1. Схема несимметричного жёсткопластического течения

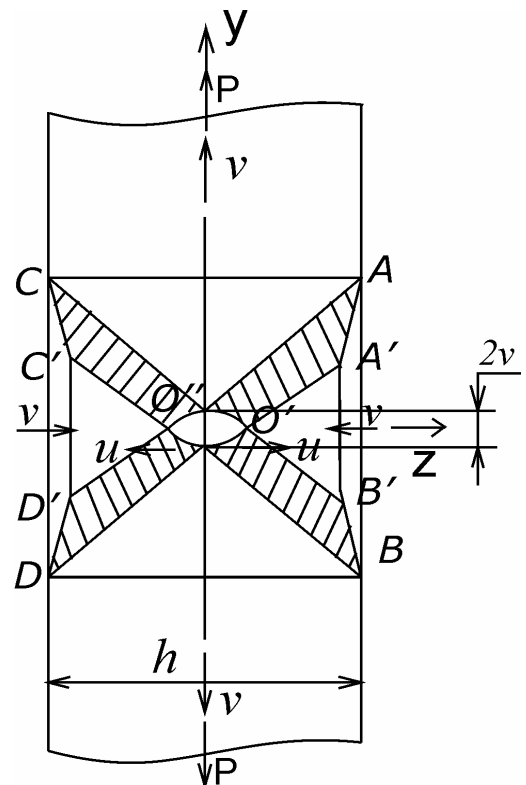


Рис. 2. Схема симметричного жёсткопластического течения

Полученные уравнения используем в качестве граничных условий для задачи о бесконечной пластине толщиной h с центральным несквозным разрезом глубиной a и длиной $2l$, растягиваемым на бесконечности усилиями P (рис. 3; сечению А-А соответствует рис. 1; смещению В-В соответствует рис. 2).

На линии несквозного разреза реализуется несимметричное жёсткопластическое течение. Тогда, используя (3), получим выражение для определения $p_1(x)$:

$$p_1(x) = s_s \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{2v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right). \quad (5)$$

В пластических зонах при $l \leq |x| \leq c$ действуют сжимающие усилия $p_2(x)$:

$$p_2(x) = s_s \left(1 - \frac{4v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right). \quad (6)$$

Решение упругой задачи с граничными условиями (5) и (6) будем искать путём суперпозиции двух решений, первое из которых – для однородного растяжения пластины без несквозного разреза, второе – для раз-

реза с приложенными на его берегах напряжениями, исчезающими на бесконечности. Поскольку первое решение не даёт вклада в концентрацию напряжений, рассмотрим только второе состояние, для которого на основании (5) и (6) запишем следующие граничные условия:

$$p(x) = \begin{cases} -P + s_s \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{2v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right) & |x| \leq l; \\ -P + s_s \left(1 - \frac{4v(x)}{\bar{W}_* \cdot h} \right) & l \leq |x| \leq c; \\ v(x) = 0, & |x| \geq c. \end{cases} \quad (7)$$

где $v(x)$ – смещения берегов разреза.

Исходя из физического смысла задачи, на величину P следует наложить следующие ограничения:

1) поскольку рассматривается идеальный упругопластический материал, то $P \leq s_s$;

2) берега несквозного разреза не должны контактировать и тем более перекрывать друг друга. Поэтому $P \geq s_s \left(1 - \frac{a}{h} \right)$.

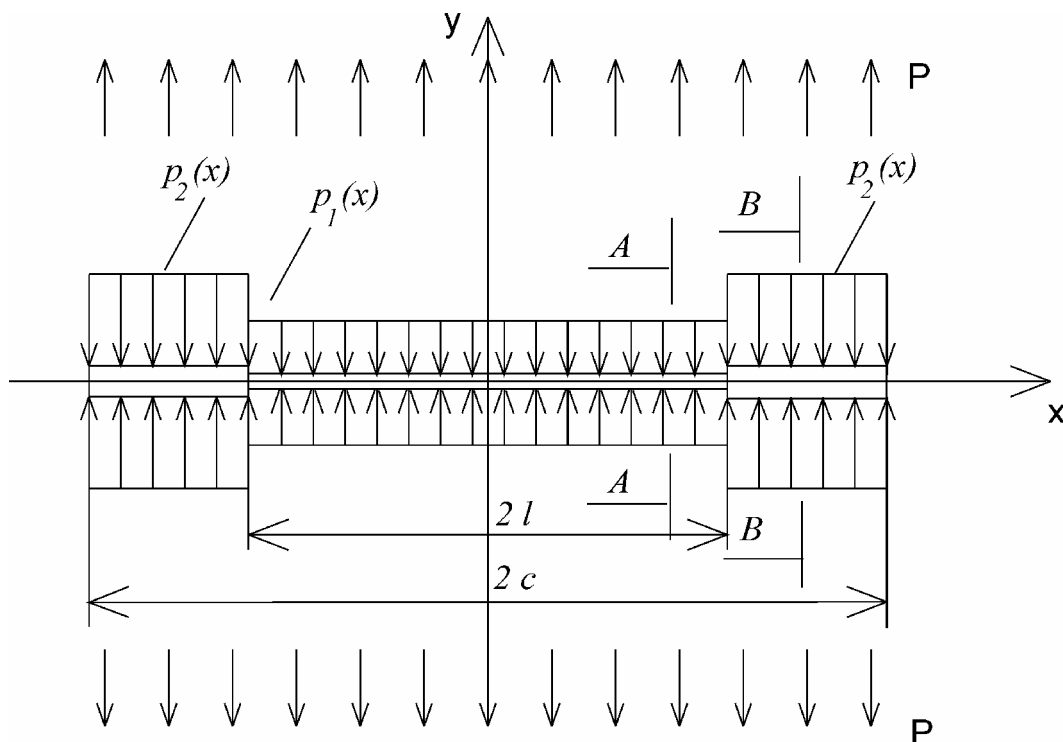


Рис. 3. Граничные условия для несквозного разреза

В полученной задаче (7) на оси x касательные напряжения S_{xy} равны нулю. В этом случае перемещения и напряжения могут быть выражены через одну аналитическую функцию комплексного переменного по формулам Колосова-Мусхелишвили. Не останавливаясь на подробностях ее отыскания (см., например, [3], [4]), сразу выпишем решение в наиболее удобном для дальнейшего исследования виде:

$$v(x) = \frac{1}{pE} \int_{-c}^c p(x) \Gamma(c, x, x) dx, \quad |x| < c;$$

$$s(x) = \frac{1}{2p \sqrt{x^2 - c^2}} \int_{-c}^c \frac{p(x) \sqrt{c^2 - x^2}}{x - x} dx, \quad |x| \geq c. \quad (8)$$

Подставив граничные условия (7) в первое уравнение (8) и проведя некоторые преобразования, получим неоднородное уравнение Фредгольма второго рода относительно смещений берегов разреза $v(x)$:

$$v(x) - I \frac{2}{h} \left[\int_{-c}^c v(x) \Gamma(c, x, x) dx + \left(\int_{-c}^{-l} + \int_l^c \right) v(x) \Gamma(c, x, x) dx \right] = f(x). \quad (9)$$

Здесь

$$\Gamma(c, x, x) = \ln \frac{c^2 - x^2 + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - x^2)}}{c^2 - x^2 - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - x^2)}};$$

$$f(x) = \frac{s_s}{pE} \left\{ \left(1 - \frac{P}{s_s} \right) \int_{-c}^c \Gamma(c, x, x) dx - \frac{a}{h} \int_{-l}^l \Gamma(c, x, x) dx \right\};$$

$$I = \frac{s_s}{p \bar{W}_* \cdot E}, \quad (10)$$

где E – модуль упругости.

К уравнению (9) для определения величины «с» необходимо присоединить условие плавности смыкания берегов пластических зон или эквивалентное условие конечности напряжений:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{dv(x)}{dx} = 0. \quad (11)$$

Полученное интегральное уравнение (9) с ядром, имеющим логарифмическую особенность, согласно первой теореме Фредгольма имеет решение при любой правой части $f(x)$, поскольку соответствующее однородное уравнение не имеет решений, отличных от тривиального нулевого. Действительно, равенство нулю правой части в (9) означает отсутствие внешних сил, действующих на контур разреза, что сразу же позволяет сделать вывод о справедливости тождества: $v(x) \equiv 0$.

Таким образом, согласно теории интегральных уравнений решение (9) можно представить в виде ряда:

$$v(x) = v_0(x) + I v_1(x) + I^2 v_2(x) + \dots, \quad (12)$$

который будет сходящимся при достаточно малом I .

Сделаем оценку величины этого параметра согласно (10). Для большинства металлов справедлива оценка: $0,001 \leq s_s / E \leq 0,01$, причём нижняя граница соответствует пластичным материалам, верхняя – более хрупким. В свою очередь, имеющиеся экспериментальные значения \bar{W}_* [2] находятся в пределах: $0,3 \leq \bar{W}_* \leq 1,6$. Комбинируя приведённые оценки, получим средневзвешенное значение I для основных конструкционных материалов: $I_{\text{нб}} \cong 0,003$.

Полученный порядок малости величины I позволяет говорить о сходимости ряда (12) и, следовательно, о возможности решения уравнения (9) в виде (12). Детальное исследование сходимости этого решения выходит за рамки настоящей работы. Однако следует отметить, что точным условиям сходимости является нормируемость ядра:

$$\int_{-c}^c |G(c, x, x)|^2 dx \leq A,$$

которая доказывается непосредственным интегрированием. Здесь A – ограниченная величина.

Подставив ряд (12) в уравнение (9) и приравняв выражения при одинаковых степенях I , получим рекуррентные соотношения

$$v_i(x) = \frac{2}{h} \left[\int_{-c_{i-1}}^{c_{i-1}} v_{i-1}(x) G(c, x, x) dx + \left(\int_{-c_{i-1}}^{-l} + \int_l^{c_{i-1}} \right) v_{i-1}(x) G(c, x, x) dx \right];$$

$$v_0(x) = f(x), \quad |x| \leq c_{i-1}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Для определения величины «с» представим её в виде числового ряда:

$$c_i = \sum_0^i I^m \bar{c}_m, \quad (14)$$

в котором слагаемые \bar{c}_m определяются в результате решения последовательности уравнений, аналогичных (11):

$$\frac{d v_m(\bar{c}_m)}{dx} = 0. \quad (15)$$

Таким образом, процедура нахождения решения уравнения (9) представляет собой циклический процесс, который проводится по следующему алгоритму.

1. Определяется функция $v_0(x)$ по формулам (10) и (13), $i = 0$.

2. Решается уравнение (15) и определяется \bar{c}_0 .

3. По формуле (13) определяется $v_1(x)$, $i = 1$.

4. Решается уравнение (15) и определяется \bar{c}_1 .

5. По формуле (14) определяется c_1 .

Далее процесс повторяется для $i = 2$ с пункта 3. Процедура может быть закончена при любом выбранном значении $i = n$.

Тогда решение уравнения (9) запишется следующим образом:

$$v(x) = v_0(x) + I v_1(x) + \dots + I^n v_n(x). \quad (16)$$

Здесь $v_i(x)$ определяются из уравнения

(13), в котором, в свою очередь, величины c_{i-1} вычисляются по уравнениям (14) и (15).

Напряжения $s(x)$ определяются на контуре разреза и в пластических зонах непосредственно из граничных условий (7), а при $x \geq c$ – по формуле (8).

Априорный анализ полученных результатов даёт возможность сделать следующие выводы.

1. Моделирование деформаций у несквозного разреза-трещины по схемам жёсткопластического течения позволило учесть изменение геометрии свободных поверхностей в областях пластических деформаций, а также установить механический и физический смысл раскрытия берегов разреза-трещины как критерия разрушения.

2. Получено решение рассматриваемой упругопластической задачи в квадратурах и разработан алгоритм получения численных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта РФФИ 08-08-99042.

Библиографический список

1. Степанов, С. Л., Варганов, А. А. Исследование предельного состояния пластин с несквозными трещинами переменной глубины в плоском напряжённом состоянии. // Труды Третьей Всероссийской научной конференции: Математическое моделирование и краевые задачи. Ч.1. - Самара: СамГТУ, 2006. - С. 216-221.

2. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. / А И. Хромов. - Владивосток: Дальнаука, 1996. - 181 с.

3. Слепьян, Л. И. Механика трещин. / Л. И. Слепьян. - Ленинград: Судостроение, 1981. - 295 с.

4. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках. / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дачышин. - Киев: Наукова думка, 1976. - 442 с.

References

1. Stepanov, S. L., Varganov, A. A. Analysis of the limiting state of plates with non-through variable-depth cracks in a plane stressed state // Transactions of the Third All-Russian scientific conference: Mathematical modeling and boundary problems. Part 1. – Samara. Samara State Technical University, 2006. – pp. 216-221.
2. Khromov, A. I. Deformation and rupture of rigid plastic bodies // Vladivostok: Dalnauka, 1966 – 181 pp.
3. Slepyan, L. I. Crack mechanics. Leningrad: Sudostroyeniye (Shipbuilding), 1981. – 295 pp.
4. Panasyuk, V. V., Savruk, M. P., Datsyshin, A. P. Strain distribution near cracks in plates and shells. Kiev: Naukova dumka, 1976. – 442 pp.

ELASTIC-AND-PLASTIC PROBLEM FOR A THIN PLATE WITH A NON-YHROUGH CRACK CUT FOR THE CASE OF LOCALIZED STRAIN ACCORDING TO RIGID PLASTIC FLOW SCHEMES

© 2008 S. L. Stepanov

Samara State Aerospace University

An elastic-and-plastic problem of the tension of a thin plate with a non-through (surface) cut is formulated. The process of plastic deformation of material both along the entire length of the cut and in plastic areas at its apices is modelled according to rigid plastic flow schemes, which makes it possible to take into consideration the changes in plate geometry along the thickness in the vicinity of the non-through cut and along its length. The solution of Fredholm's integral equation in quadratures is obtained and the procedure for defining numerical results is designed. The dependence of the cut side opening on plate thickness and depth is defined in an explicit form. Cut side opening is used as deformation rupture criterion.

Crack cut, plastic deformation, elastic-and-plastic problem, spatial density, dissipation energy, rupture criterion, integral equation

Информация об авторе

Степанов Сергей Львович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры летательных аппаратов. Область научных интересов: пластичность, деформация, разрушение, прочность

Stepanov, Sergey Lvovitch, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor. Associate professor of aircraft construction department. Area of research: plasticity, deformation, rupture, strength.