

**ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ
КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ. ЧАСТЬ II**

© 2008 В. В. Салмин, В. В. Васильев, С. А. Ишков, В. А. Романенко,
В. О. Соколов, О. Л. Старина, В. В. Юрин

Самарский государственный аэрокосмический университет

Во второй части статьи приведены результаты решения ряда прикладных задач перелётов космических аппаратов с двигателями малой тяги.

Космический аппарат, малая тяга, оптимальное управление, приближённые методы, геоцентрические манёвры, относительное движение, межпланетные перелёты

**2. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЁТОВ
С МАЛОЙ ТЯГОЙ**

**2.1. Задача оптимизации управления
траекторным и угловым движением КА
с учётом ограничений на угловую
скорость поворота вектора тяги**

Записывается система уравнений плоского движения космического аппарата (КА) с постоянной по величине малой тягой (МТ) в центральном поле

$$\begin{aligned} \dot{r} &= V \sin q; \quad \dot{V} = \frac{\sin q}{r^2} + \frac{a_0 d}{1 - a_0 t / c} \cos(J - q); \\ \dot{q} &= \frac{\cos q}{V} \left(\frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{a_0 d}{1 - a_0 t / c} \sin(J - q); \\ \dot{J} &= \Omega + \frac{V \cos q}{r}; \quad \dot{\Omega} = \frac{V \cos q}{r}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вектор состояния x в рассматриваемой задаче включает в себя безразмерные компоненты (r, V, q, J, u) , а вектор управления u - компоненты (d, Ω) , причём

$$d = \{-1, 0, +1\}, \quad -\Omega_{max} \leq \Omega \leq \Omega_{max}.$$

В качестве критерия оптимальности примем время перелёта: $T = (t_K - t_0) \rightarrow \min$.

Используя формализм принципа максимума Понтрягина, получим оптимальное управле-

ние: $\Omega_{opt}(t) = \Omega_{max} \cdot \text{sign} y_J$, где y_J - сопряжённая переменная. Если $y_J \equiv 0$, то структура управления содержит особый режим:

$$\tilde{\Omega}(t) = - \frac{\{H_0, \{H_0, y_J\}\}}{\{y_J, \{H_0, y_J\}\}} \equiv \frac{V}{r} \cdot \frac{y_q \sin J - r y_r \cos J}{(y_q^2 + V^2 y_v^2)^{3/2}}. \quad (2.2)$$

В данном случае особый режим имеет простой смысл. Это решение первого порядка для той же задачи, но без учёта одной дифференциальной связи, т.е. на некотором расширенном множестве $E \supset D$. Если оно оптимально на E , то оно оптимально и на D . Следовательно, особый режим должен быть включён в состав искомого решения, структуру которого естественно представлять из трёх участков: 1) движение из начальной точки в фазовом пространстве до особой поверхности; 2) особый режим; 3) сход с особой поверхности и достижение конечной точки. Система (2.1) допускает решение такой структуры, которое окончательно находится в ходе решения краевой задачи. Таким образом, особые экстремали в задаче управления с ограничением на угловую скорость поворота вектора тяги совпадают с экстремалими традиционной задачи оптимизации, когда движение КА вокруг центра масс (ЦМ) не учитывается и ограничения на угловую скорость поворота вектора тяги отсутствуют. Этот результат вытекает из анализа задачи управле-

ния в общей постановке, где вывод об особых участках был сделан на основании замены исходного множества D на более широкое E (иными словами, исключая уравнения углового движения).

Необходимое условие оптимальности особого режима заключается в неотрицательности скобки Пуассона

$$\{Y_J, H_*\} = \frac{a_0 |\cos(\tilde{J} - \tilde{q})| (\tilde{y}_q^2 + \tilde{y}_v^2 V^2)}{(1 - a_0 t / c) \tilde{V}^2 \tilde{y}_v} \geq 0.$$

Последнее условие выполняется, если всюду на особом участке траектории переменная \tilde{y}_v неотрицательна.

На рис. 2.1 показаны характер изменения угловой скорости Ω и угла α между вектором тяги и касательной к траектории. Естественно, что разгон КА с ограничением на скорость поворота вектора тяги занимает большее время, чем без ограничения. Время достижения параболической скорости на «экстремальной» траектории, т.е. без ограничений на Ω , может служить оценкой нижней границы функционала T .

2.2. Задача оптимизации траекторий перелёта с непрерывной тягой между круговыми некомпланарными орбитами

При оптимизации траекторий перелётов между некомпланарными орбитами решающее значение приобретают затраты рабочего тела на разворот корпуса КА. Усред-

нённые уравнения околокругового движения КА с МТ имеют вид:

$$\frac{d\hat{r}}{du} = \frac{a_0}{2p} \int_0^{2p} r^3 \cdot \cos y \cdot \exp\left(\frac{V_X}{c}\right) du,$$

$$\frac{d\hat{i}}{du} = \frac{a_0}{2p} \int_0^{2p} r^2 \cdot \sin|y| \cdot \cos|u| \cdot \exp\left(\frac{V_X}{c}\right) du, \quad (2.3)$$

$$\frac{d\hat{r}}{du} = \frac{a_0}{2p} \int_0^{2p} r^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(\frac{W}{c}\right) du = a_0 \hat{r}^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{V_X}{c}\right),$$

$$\frac{dt}{du} = \left(\hat{r}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Угловое движение КА осуществляется только вокруг нормальной оси аппарата OY_1 , совпадающей с направлением радиуса-вектора ЦМ:

$$\frac{dy}{du} = w_{Y_1} r^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{dw_{Y_1}}{du} = \frac{M_{Y_1}}{I_{Y_1}} r^{\frac{3}{2}} = e \cdot r^{\frac{3}{2}}. \quad (2.4)$$

В качестве критерия оптимальности использована характеристическая скорость V_{XK} и найдена локально-оптимальная программа управления в пределах витка $\bar{y}(u)$:

$$\bar{y}(u) = \arctg(\operatorname{tg} y_{\max} \cos u),$$

$$\operatorname{tg} y_{\max} = -I \ln r_K \cdot (1 + 2I(i_K - i_0))^{-1}. \quad (2.5)$$

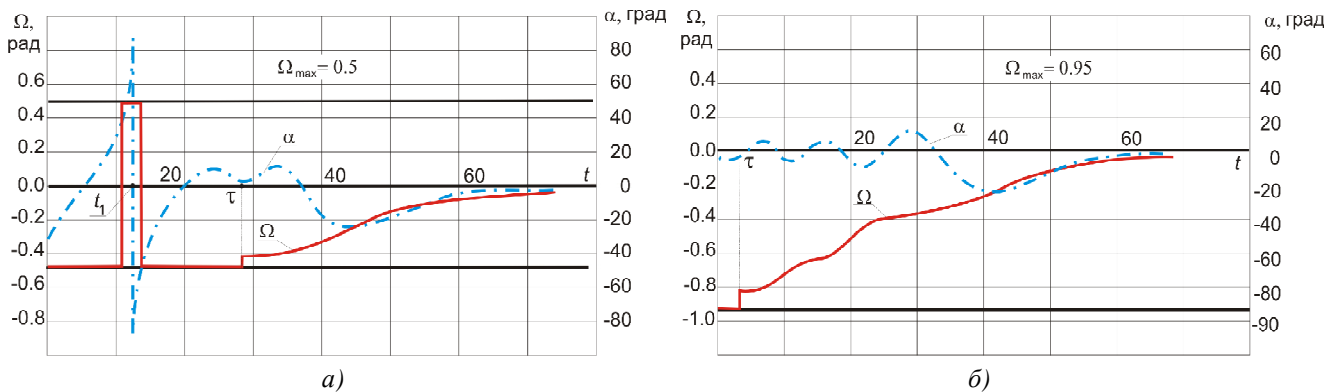


Рис. 2.1. Характер изменения угловой скорости поворота вектора тяги Ω и угла α на оптимальной траектории ($a_0 = 10^{-2}$; $c = 5.2$), t_1 - момент реверса тяги, t - момент перехода на особый режим;

а) $\Omega_{\max} = 0,5$; б) $\Omega_{\max} = 0,95$

Проведена оптимизация медленно меняющейся составляющей управления с использованием достаточных условий оптимальности и построена синтезирующая функция

$$j(r, i) = -\min_D V_{XK} = -\left(1 - \frac{2 \cos(p(i_k - i)/2)}{\sqrt{r_k/r}} + \frac{r}{r_k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

Используя её, можно оценить степень близости решения к абсолютно оптимальному.

Результаты расчёта оптимальной траектории перелета КА на геостационарную орбиту приведены на рис. 2.2. Рассматривая задачу совместной оптимизации траекторного и углового движений, считаем, что двигатели жёстко закреплены относительно корпуса, а разворот КА происходит только вокруг связанной оси OY_1 . Получены необходимые условия реализации программ ориентации вектора тяги с помощью управляющего момента M_{Y_1} :

$$e_{\max} = \left(\frac{M_{Y_1}}{I_{Y_1}}\right)_{\max} \geq \max_i \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2.7)$$

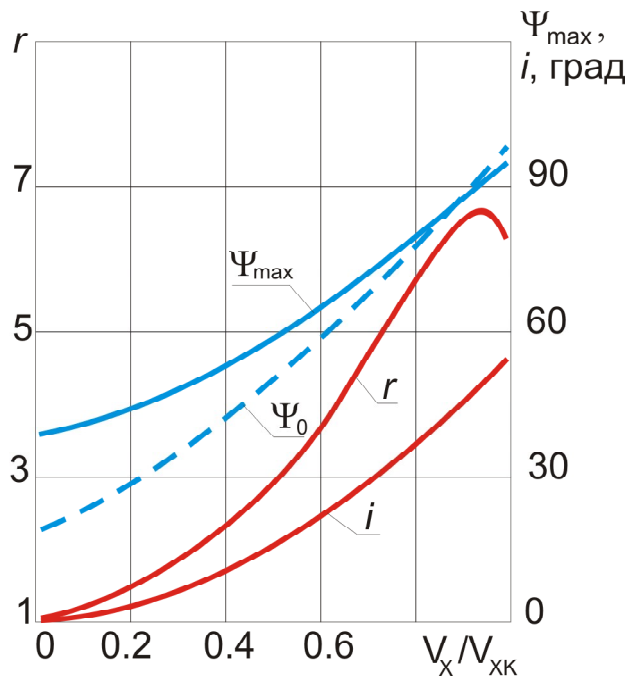


Рис. 2.2. Параметры оптимальной траектории перелёта на стационарную орбиту: $r_k = 6,23$

С учётом ограничений на управляющий момент выбрана приближённо-оптимальная структура управления угловым движением и получена новая «асимптотическая» модель пространственного движения

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dV'_k} &= \frac{4r^{\frac{3}{2}}}{p(1+2ka/p)} \left[\left(\frac{p}{2} - a\right) \cdot \cos y_{\max} + a \cdot I_1 \right]; \\ \frac{di}{dV'_k} &= \frac{2r^{\frac{1}{2}}}{p(1+2ka/p)} [\cos a \cdot \sin y_{\max} + a \cdot I_2], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где усредняющие интегралы имеют вид

$$\begin{aligned} I_1^0 &= \int_0^1 \cos y_{\max} (1-z^2) dz; \\ I_2^0 &= \int_0^1 \sin y_{\max} (1-z^2) \cdot \sin a \cdot (1-z) dz; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\hat{e} = |e| \cdot \frac{I_{Y_1}}{a_0 h}.$$

Результаты расчётов перелётов на геостационарную орбиту, выполненные для совместной ($\kappa = 0$) и отдельной ($\kappa = 0,1$) схем управления, показывают, что характеристическая скорость перелёта зависит от уровня располагаемого углового ускорения, и поэтому e_{\max} должно выбираться путём параметрической оптимизации.

2.3. Оптимизация траекторий и проектных параметров МТА с двигателями МТ

Межорбитальные транспортные аппараты (МТА) предназначены для доставки полезных грузов на достаточно удалённые рабочие орбиты с низких орбит выведения. Особый интерес представляют МТА с ЭРД в плане их использования для размещения на высоких орбитах крупногабаритных конструкций, таких, как солнечные электростанции, антенны радаров, элементы радиотелескопов. Все эти конструкции обладают малой жёсткостью и имеют существенные ограничения на транспортную перегрузку.

При выборе опорных траекторий и последующем формировании алгоритмов управ-

ления будем использовать достаточно близкие к оптимальным программные управления и траектории. Выберем такие структуры управления, которые заведомо допускают возможность их практической реализации.

Запишем уравнения, описывающие эволюцию параметров орбиты «в среднем»:

$$\frac{dr}{dV_x} = \frac{2r^{3/2}}{F} J_1, \quad \frac{di}{dV_x} = \frac{r^{1/2}}{F} J_2. \quad (2.10)$$

Усредняющие интегралы J_1, J_2 характеризуют «в среднем» управление ориентацией вектора тяги, интеграл F характеризует дополнительные затраты на управление вращательным движением в пределах витка

$$J_1 = \int_0^{2p} \cos y \, dj, \quad J_2 = \int_0^{2p} \sin |y| |\cos j| \, dj, \\ F = \int_0^{2p} (1 + |d_{\dot{i}D}| c) \, dj. \quad (2.11)$$

Время работы управляющих двигателей вычисляется по формуле

$$t_{\dot{i}D} = \frac{1}{p \cdot a_0} \int_0^{V_{xK}} \frac{2a}{1 + c \frac{2a}{p}} \exp\left(-\frac{V_x}{c}\right) dV_x. \quad (2.12)$$

Управлением в данной задаче служит параметр y_m – амплитуда колебаний угла ориентации тяги. С использованием формализма принципа максимума Понтрягина можно получить оптимальную программу управления.

Проведённые для «совместной» схемы управления ($c = 0$) расчёты показали, что при малых значениях располагаемого углового ускорения $e_{\dot{i}D}$ на начальном участке траектории перелёта угол y_m выходит на предельный уровень $y_m = y_{\dot{i}D}$ (при этом $a \equiv p/2$) и сохраняет его до достижения такого радиуса, при котором возможен переход на «регулярный» режим.

При **раздельной** схеме управления ($c \neq 0$) на первом участке реализуется транс-

версальная ориентация тяги, движение происходит без поворота плоскости орбиты, угол y поддерживается равным нулю. На втором участке амплитуда колебаний угла y резко увеличивается, чтобы компенсировать недостаточную эффективность управления на первом участке. С увеличением χ растёт протяжённость участка движения КА без разворотов с $y \equiv 0$. Зависимость V_{xK} от e для раздельной схемы управления показана на рис. 2.3.

На начальном этапе выбор оптимальных параметров, задающих базовый проектный облик МТА, ведётся по расчётному значению характеристической скорости V_{xK}^o . Одновременно оцениваются диапазон изменения параметров и критерия оптимальности m с учётом верхней границы $V_{xK}^o = V_{xKB}$. Далее процесс оптимизации ведётся итеративно.

Результаты оптимизации проектно-баллистических характеристик и параметров МТА в ходе реализации итеративной процедуры приведены в табл. 2.1.

Корректная постановка динамической задачи оптимизации позволила уточнить энергетику перелёта и показала принципиальную возможность улучшения массовой отдачи программ космической транспортировки. Начальная масса МТА $M_0 = m^{-1} M_{IA}$, определённая согласно приближённым оценкам энергетики перелёта, оказалась завышенной. Оптимизация показала также возможность уменьшения потребной мощности энергоустановки и тяги блока маршевых ЭРД.

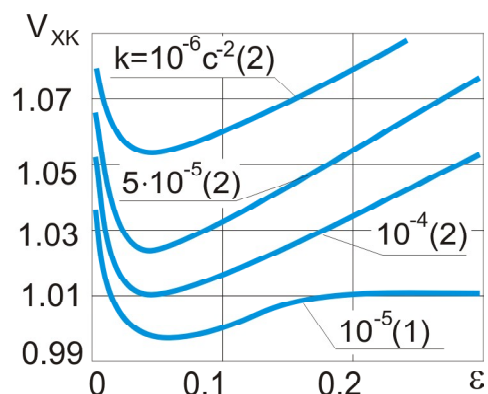


Рис. 2.3. Результаты решения при раздельной схеме управления

Таблица 2.1. Результаты оптимизации проектно-баллистических характеристик МТА
 $r_0 = 6870$ км, $r_K = 42164$ км, $i_0 = 51^\circ$, $i_K = 0^\circ$, $a_{\dot{\gamma}0} = 20$ кг/кВт, $g_{\dot{\alpha}0} = 60$ кг/Н, $g_{\dot{\beta}0} = 0,07$

| Итерация | Оптимальные параметры перелёта и МТА | | | | | | |
|---|--------------------------------------|-------------|------------------|-------|------------|---|-------|
| | T_1 , сут | T_2 , сут | V_{KK1} , км/с | m | c , км/с | $\epsilon_m \cdot 10^6$ с ⁻² | C |
| Оценка энергетики перелёта с учётом 10% запаса на управление | 152,2 | 47,8 | 8,406 | 0,445 | 30,4 | - | 0,05 |
| 1. Энергетика перелёта оптимизируется (первая строка - совместная схема, вторая - раздельная) | 158,4 | 41,64 | 7,580 | 0,528 | 32,4 | 0,325 | - |
| | 157,0 | 43,0 | 7,693 | 0,511 | 31,7 | 0,260 | 0,026 |
| 2. Совместная оптимизация параметров МТА и траекторий перелёта | 157,3 | 42,7 | 7,713 | 0,514 | 31,9 | 0,135 | 0,014 |
| 3. Учет дополнительных затрат на реализацию траектории | 155,8 | 44,2 | 7,819 | 0,499 | 31,1 | 0,180 | 0,018 |

2.4. Задача оптимизации траекторий перелёта на геостационарную орбиту КА с ЭРД с солнечным источником энергии

Запишем уравнения околокругового орбитального движения:

$$\frac{dr}{du} = 2r^3 a \cos y; \quad \frac{di}{du} = ar^2 |\cos u| |\sin y|;$$

$$\frac{dt}{du} = r^{3/2}; \quad \frac{dW}{du} = ar^{3/2}. \quad (2.13)$$

Примем, что реактивное ускорение a изменяется в зависимости от косинуса угла между направлением на Солнце и нормалью к плоскости солнечных батарей: $a = a_0 \cos b$.

Рассмотрим теперь задачу на минимум времени перелёта. Приведём систему (2.13) к аргументу t (уравнение для характеристической скорости не учитывается):

$$\frac{dr}{dt} = 2a_0 r^{3/2} \cos b \cos y,$$

$$\frac{di}{dt} = a_0 r^{1/2} \cos b |\cos u| |\sin y|. \quad (2.14)$$

Пусть реализуется вариант управления ориентацией солнечных батарей (СБ), когда ось OZ_{CB} постоянно совпадает с осью OZ_r . В этом случае $\cos b_{\text{imax}}$ определяется выражением (1.50) [1]. Если d - угол между направлением на Солнце и нормалью к плоскости орбиты OZ , то из (1.50) можно получить

$$\cos b_{\text{imax}} = \sqrt{1 - (\cos y \cos d - \sin y \sin d \cos(u + u_0))}. \quad (2.15)$$

Здесь d - функция оскулирующих элементов орбиты, определяемая из выражения

$$\cos d = \cos i \sin e_0 \sin q - \sin i \cos e_0 \cos \Omega \sin q + \sin i \sin \Omega \cos q, \quad (2.16)$$

где e_0 - угол наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора; q - угол между направлением на точку весеннего равноденствия и линией Земля - Солнце. При расчёте d необходимо учитывать движение Солнца по эклиптике (изменение q) и прецессию восходящего узла орбиты Ω .

Сформулируем задачу о минимуме конечного значения аргумента t системы уравнений (2.14) с учётом связи в форме (2.15). Управлениями в данной задаче служат углы y и b . После преобразований получаем следующие решения:

$$\cos \tilde{b} = \left| -y_r r^{3/2} \cos y - \frac{y_i}{2} r^{1/2} \cos u \sin y \right| a_0,$$

$$tg|2\tilde{y}| = \frac{y_y y_i a_0^2 r^2 \cos u + 2 \sin d \cos d \cos(u + u_0)}{y_r^2 a_0^2 r^3 - \frac{y_i^2}{4} a_0^2 r \cos^2 u - \sin^2 d \cos^2(u + u_0) \cos^2 d}. \quad (2.17)$$

Они содержат две произвольные постоянные: y_r и y_i , которые рассматриваются как

медленно меняющиеся переменные. Начальное приближение для них задавалось решением задачи оптимизации без ограничений. Вдоль траектории фиксировались характерные значения этих переменных, рассчитывались текущие значения угла d , а затем по формулам (2.17) рассчитывались \tilde{b} и \tilde{y} .

Результаты расчёта показаны на рис. 2.4. Параметры расчёта подобраны так, что они соответствуют переходу с низкой круговой орбиты с наклоном 51° на стационарную орбиту. На начальном участке траектории перелёта $\cos b$ мал, поэтому уровень реактивного ускорения недостаточен и процесс разгона КА затягивается. В средней части траектории значение $\cos b$ увеличивается, профиль угла ориентации тяги $y(u)$ становится близким к оптимальному в задаче без ограничений. На заключительном этапе КА движется в плоскости, близкой к плоскости экватора, и поэтому удаётся достигнуть близких к единице значений $\cos b$. С физической точки зрения полученные решения соответствуют компромиссу между достижением максимальной электрической мощности СБ и оптимальной программой разворотов вектора тяги КА в плоскости орбиты.

В зависимости от даты старта, которая определяет начальную ориентацию плоско-

сти орбиты относительно Солнца, траектория межорбитального перелёта КА с солнечным ЭРД будет характеризоваться различным временем затенения. Поставим задачу отыскания таких дат старта, при которых суммарное время t пребывания КА в тени минимально.

Серия расчетов перелётов в окрестность геостационарной орбиты, выполненных для различных значений параметров Ω_0 , T_{CT} , позволяет построить линии равных времён пребывания КА в тени и выбрать оптимальные дату старта и положение восходящего узла орбиты. Например, диаграмма (рис. 2.5), построенная для $a^* = 10^{-3}$ м/с² и $c^* = 60$ км/с, показывает, что при одинаковом моторном времени перелёта $T^* = 86,4$ сут время пребывания в тени составляет от 0,7 до 18,6 сут. Оптимальные и неоптимальные даты старта повторяются с периодичностью 6 месяцев. При фиксированной дате старта можно добиться уменьшения времени пребывания КА в тени за счёт оптимального выбора начальной ориентации плоскости орбиты (угла Ω_0). Описанная приближённая методика позволяет существенно сузить границы области поиска оптимальных дат старта для КА с ЭРД с солнечной энергоустановкой.

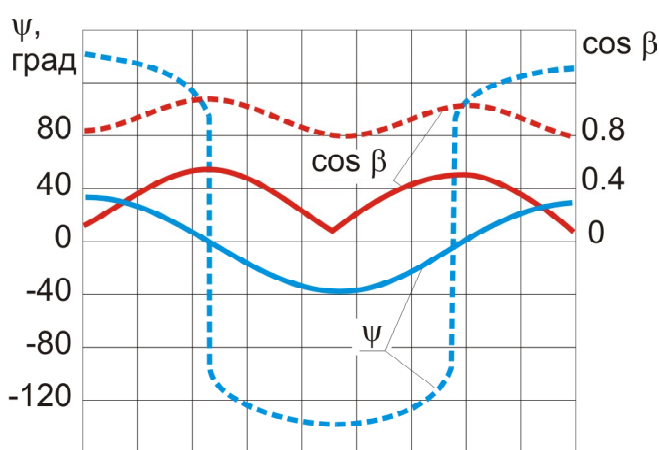


Рис. 2.4. Характер изменения параметров y и $\cos b$ на траектории перелёта на геостационарную орбиту при одноканальном управлении СБ ($a_0 = 10^{-3}$ м/с²; $c = 60$ км/с);
 - - - - начальный участок: $r = 6700$ км; $i = 51^\circ$;
 ————— конечный участок: $r = 43\,000$ км; $i = 1,5^\circ$

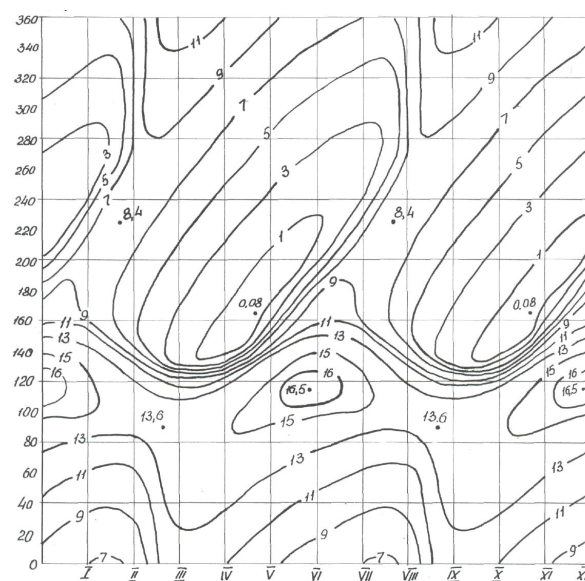


Рис. 2.5. Изолинии продолжительности теневого участка для перелётов КА с солнечным ЭРД на геостационарную орбиту

2.5. Синтез приближённо-оптимальных алгоритмов наведения

Условием решения задачи терминального управления является перекрытие области достижимости X'_K , образующейся в конце этапа дальнего наведения в результате влияния неучтённых факторов, возмущений и ошибок реализации программы, областью гарантированного приведения $\Gamma(\Delta V_j)$, соответствующей определённому уровню затрат на участке точного наведения ($\Delta V_j = fixe$).

Наиболее простой способ ликвидации накопившихся ошибок по радиусу и наклону орбиты заключается в периодическом пересчёте программы управления, сохраняющей базовую структуру. Обновление модулирующей функции $y_m(V)$ производится по следующей схеме:

$$y_{mj} = \arctg \left\{ \frac{\sin p \left(\hat{i}_j - i_K \right)}{2} \sqrt{\frac{\hat{r}_j}{r_K}} \left[1 - \cos \frac{p \left(\hat{i}_j - i_K \right)}{2} \sqrt{\frac{\hat{r}_j}{r_K}} - \left(V - \hat{V}_j \right) \sqrt{1 - 2 \cos \frac{p \left(\hat{i}_j - i_K \right)}{2} \sqrt{\frac{\hat{r}_j}{r_K} + \frac{\hat{r}_j}{r_K}} \right]^{-1} \right\}. \quad (2.18)$$

Для решения задачи фазирования введём новый контролируемый параметр, которым будем характеризовать положение КА относительно заданной точки конечной орбиты – «условную» долготу $I_{\hat{n}}$, совпадающую с геоцентрической долготой КА при нулевом наклоне плоскости орбиты:

$$I_{\hat{n}} = \Omega + u - S_0 - w_C(t - t_{SO}).$$

На момент t_K величина $I_{\hat{n}}$ определяется согласно выражению

$$I_C(t_K) = I_C(t_{SO}) - w_C(t_K - t_{SO}) + \int_{t_{SO}}^{t_K} \left(\frac{du}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} \right) dt, \quad (2.19)$$

которое используется для формирования невязки в процедуре решения краевой задачи.

Рассмотрим алгоритм совместного управления траекторным и угловым движением КА, настраивающийся на ликвидацию конечного промаха по компонентам вектора состояния. Базовая программа изменения модулирующей функции $y_m(V_x)$ определяется на каждом шаге управления в результате решения краевой задачи (рис. 2.6).

На участке быстрой переориентации КА управляющее угловое ускорение меняется по закону $e_{\dot{\omega}_1} = -e_m \text{sign} K(j, j\&)$, где

$$K = j + \frac{j\&}{2e_m}$$

- функция переключения; $j, j\&$ - рассогласования по углу и по угловой скорости в канале рыскания. В силу «асимметрии» программы управления $j(u)$ «левые» и «правые» развороты КА выполняются на разные углы:

$$\begin{aligned} j &= \Delta y(t) = y_{\dot{I}D}(t) - y_{\dot{E}}(t), \\ j\& &= \Delta y\&(t) = y\&_{\dot{I}D}(t) - y\&_{\dot{E}}(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

На участке поворота КА с «остаточной» угловой скоростью:

$$y_{\dot{E}, \dot{I}D} = y_{\dot{E}, \dot{I}D}(t_i) + y\&_{\dot{E}, \dot{I}D}(t_i) \cdot (t - t_i).$$

Вследствие движения центра масс КА по орбите начало орбитальной системы координат OXYZ совершает вращение вокруг центра притяжения с угловой скоростью w_0 . При

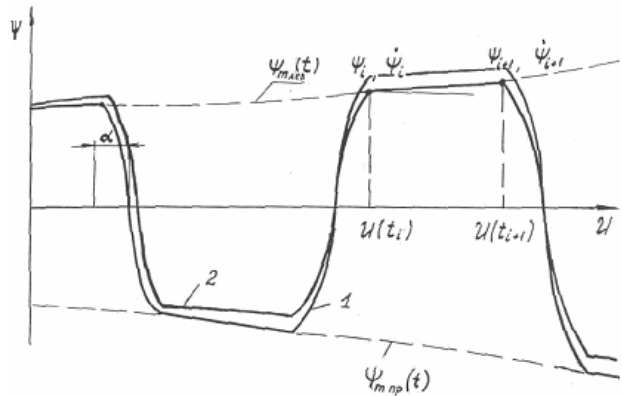


Рис. 2.6. Формирование управления ориентацией вектора тяги в алгоритме пространственного наведения: 1 - номинальная программа управления; 2 - фактическая реализация

этом возникают компоненты угловой скорости по осям связанной системы координат $Ox_1Y_1Z_1$ - w_{x1} , w_{y1} , w_{z1} :

$$w_{x1} = w_0 \sin y, \quad w_{y1} = \frac{dy}{dt},$$

$$w_{z1} = -w_0 \cos y, \quad w_0 = \frac{V \cos q}{r}. \quad (2.21)$$

С учётом этих соотношений получены выражения для управляющих моментов по связанным осям и программных управляющих ускорений по всем трём осям:

$$e_{x1} = \frac{M_{x1}}{I_{x1}} = w_0 \frac{dy}{dt} \cos y,$$

$$e_{y1} = \frac{M_{y1}}{I_{y1}} = \frac{d^2 y}{dt^2} + w_0^2 \sin y \cos y,$$

$$e_{z1} = \frac{M_{z1}}{I_{z1}} = 2w_0 \frac{dy}{dt} \sin y. \quad (2.22)$$

Программа управления может быть описана выражениями

$$y(u, t) = -y_{mi}(t) \text{sign}(\cos(u + g_i)) \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{z}{a^2} \left[\left(\bar{u} - \frac{p}{2} \right) \text{sign} \sin(2u + a) \right]^2 \right\}, \quad (2.23)$$

$$e_{y1} = \frac{1}{2} e_m \text{sign}(\cos(u + g_i)) \times$$

$$\times \left[1 + \text{sign} \left(\sin^2 u - \sin^2 \left(\frac{p}{2} - a \right) \right) \right].$$

Последовательность формирования управления пространственным наведением такова:

- на момент t_j даётся оценка вектора

$$\text{состояния } \hat{x}(t_j) = x_{ECl}^j;$$

- производится расчёт совокупности параметров управления из условия приведения системы в конечное состояние (при $i = i_k$);

- после решения краевой задачи ведётся расчёт фактического движения КА на базе точных уравнений движения в оскулирующих элементах с учётом возмущений;

- по достижении момента t_{j+1} процесс повторяется, если норма прогнозируемого промаха превышает максимально допустимое значение.

Эффективность разработанных алгоритмов управления для межорбитальных перелётов исследовалась путём математического моделирования на ЭВМ динамики движения КА и процесса управления.

2.6. Задача оптимального управления эллиптической орбитой с учётом несферичности Земли и сопротивления верхних слоёв атмосферы

Рассматривается задача оптимального управления элементами орбиты КА, движущегося в поле сжатого сфероида с учётом сопротивления верхних слоёв атмосферы, плотность которой аппроксимируется экспоненциальным законом. Математическая модель движения содержит дифференциальные уравнения для изменения оскулирующих элементов орбиты, записанные в классической форме. На основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина найден закон изменения величины реактивного ускорения и угла ориентации тяги в плоскости орбиты, обеспечивающие минимум критерия оптимальности в задаче коррекции отклонений по радиусу перигея (апогея) и аргумента перицентра, вызванных влиянием сопротивления атмосферы.

Будем считать, что КА располагает регулируемым двигателем МТ, для которого не накладываются ограничения на величину реактивного ускорения. Направление вектора тяги относительно трансверсали характеризуется углом a_1 , положительное значение которого соответствует внешнему по отношению к трансверсали положению тяги. Трансверсальная a_x и радиальная a_y составляющие ускорения соответственно равны: $a_x = a \cos a_1$; $a_y = a \sin a_1$. В качестве критерия оптимальности перелёта с идеально ре-

гулируемым двигателем берётся интеграл от квадрата реактивного ускорения

$$J = \int_{t_0}^{t_k} a^2 dt \rightarrow \min.$$

Результаты численного решения поставленной вариационной задачи приведены на рис. 2.7 для орбиты с наклонением $i = 51^\circ$, высотой перигея 250 км, высотой апогея 350 км для двух моделей атмосферы, соответствующих максимуму и минимуму солнечной активности. На рис. 2.7,а показаны оптимальные программы изменения реактивного ускорения $a(\vartheta)$, угла ориентации тяги $\alpha_1(\vartheta)$ для случая коррекции возмущений перигейного расстояния от действия атмосферы на двух витках полета. В конечной точке $r_p(u_k) = r_{pk}$, где r_{pk} - номинальное перигейное расстояние в конечной точке, соответствующее движению под действием только гравитационных сил. На рис. 2.7,б показаны аналогичные зависимости при коррекции ошибок в апогейном расстоянии r_a от действия атмосферы на двух витках полета.

Сплошные линии соответствуют максимуму, а штриховые – минимуму солнечной активности. Оптимальное ускорение имеет различные максимумы в окрестности апогея орбиты и близко по направлению к трансверсальному (в точках максимума оно строго трансверсально), наименьшие значения уско-

рение имеет вблизи перигея. Сдвиг максимумов ускорения относительно апогея объясняется совместным действием атмосферы и нецентральности гравитационного поля. Характерно, что изменение модели плотности атмосферы приводит только к изменению величины реактивного ускорения и не влияет на программу изменения угла α_1 .

Результаты моделирования выявили колебательный характер как реактивного ускорения, так и угла ориентации тяги относительно трансверсали. Период колебаний соответствует периоду обращения на орбите. Влияние возмущений проявляется в увеличении модуля реактивного ускорения и смещении вдоль орбиты характерных точек, определяющих направление тяги. Исследование закономерностей этой эволюции позволяет строить близкие к оптимальным программы управления с учётом дополнительных факторов и возмущений и оценивать увеличение функционала J по сравнению с известным решением для центрального поля.

2.7. Приближённо-оптимальное управление элементами слабоэллиптических орбит

С использованием модели (1.27) [1] решены задачи оптимального управления «медленными» элементами орбиты на больших интервалах времени.

Сформулируем задачу об оптимальном управлении орбитой следующим образом:

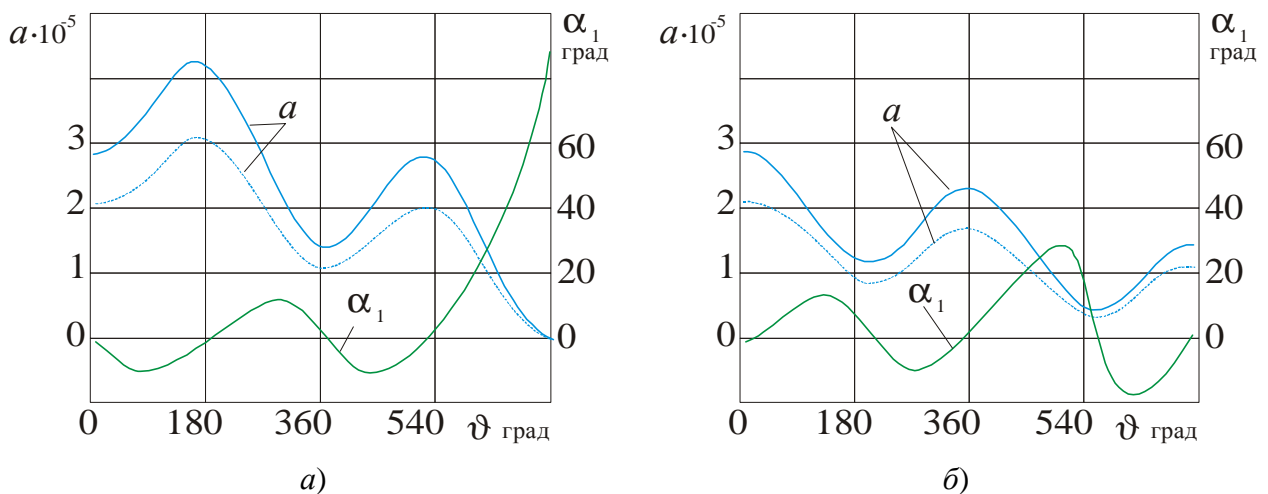


Рис. 2.7. Оптимальные программы управления:
 а - коррекция радиуса перигея; б - коррекция радиуса апогея
 (--- с учётом атмосферы; — без учёта атмосферы)

определить параметры $x(t)$, $h(t)$, которые обеспечивают коррекцию элементов A , e , w , с помощью трансверсальной тяги за минимальное время при наличии на каждой витке пассивных участков. Суммарная продолжительность пассивных участков на витке считается заданной, а их расположение на орбите должно выбираться из соображений оптимальности.

Проведённый анализ позволяет сделать следующий вывод: структура оптимального управления для рассматриваемой задачи коррекции орбиты должна предусматривать два рабочих участка (разгонный и тормозной), центры которых разнесены на угол p по эксцентрической аномалии. Если на витке должен быть предусмотрен пассивный участок протяжённостью $2a_*$, то два пассивных участка шириной a_* должны разделить разгонный и тормозной участки. Расположение рабочих участков на витке будем характеризовать тремя параметрами: h - центр разгонного участка; x - половина его ширины; a_* - ширина одного пассивного участка. Таким образом, для оптимальной структуры управления имеем: $m = 1$; $n = 1$; $x_+ = x$; $h_+ = h$. Суммарная ширина пассивных участков $2a_*$, поэтому $x_- = p - a_* - x$; $h_- = h + p$. После подстановки в уравнения (1.27) получаем систему уравнений движения, описывающую

вековую эволюцию элементов орбиты при оптимальной структуре управления в пределах витка:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4}{p} A \sqrt{\frac{A}{m}} a \left(x + \frac{a}{2} - \frac{p}{2} \right);$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{A}{m}} a \cos \frac{a}{2} \sin \left(x + \frac{a}{2} \right) \cosh; \quad (2.24)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{4}{pe} \sqrt{\frac{A}{m}} a \cos \frac{a}{2} \sin \left(x + \frac{a}{2} \right) \sinh + BA^{-\frac{1}{2}}.$$

На рис 2.8 показаны результаты решения задачи управления элементами A , e , w . Параметры конечной орбиты соответствуют так называемой «стабильной» солнечно-синхронной орбите. Начальная орбита имеет параметры, изменяющиеся в пределах: $A_0 = 7025 \pm 60$ км; $e_0 \leq 0,017$; $w_0 = (11 \dots 83)^\circ$. Анализ полученного решения позволяет установить следующее свойство оптимальной по быстродействию коррекции орбиты: расположение рабочих участков относительно восходящего узла орбиты не изменяется по всей траектории. Это свойство позволяет находить оптимальное управление в результате решения двухпараметрической краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (2.24) без привлечения сопряжённой

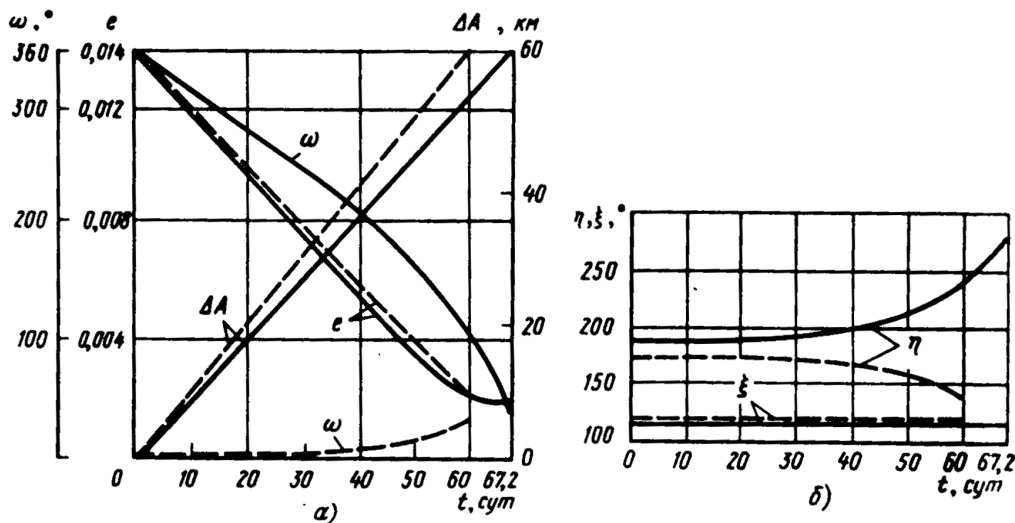


Рис 2.8. Изменение элементов орбиты для $a = 0.175 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2$ на оптимальной траектории (а) и параметров управления (б):
 - - - - для центрального поля, ——— с учётом несферичности Земли

системы уравнений. В результате решения параметрической краевой задачи рассчитываются следующие параметры управления:

$u_h = const$, характеризующий расположение середины разгонного рабочего участка относительно восходящего узла орбиты, и $x = const$, определяющий протяжённость разгонного рабочего участка на витке. Рассчитав по приближённой методике параметры управления для приведённых выше граничных условий, получим: $h = 162,1^\circ$; $x = 123^\circ$;

$t_K^* = 60,45$ сут. Таким образом, приближённое решение даёт погрешность по функционалу (времени манёвра) на 0,6 сут., что составляет всего 1 % от общего времени межорбитального перелёта.

Из рис. 2.8 видно, что сжатие Земли оказывает существенное влияние на характеристики оптимального процесса. Минимальное время коррекции здесь равно $t_K^* = 67,2$ сут. Зависимость $w(t)$ представляет собой монотонную функцию, близкую к линейной. Это объясняется тем, что при заданном уровне ускорения доминирующим фактором, определяющим изменение w , является прецессия орбиты, обусловленная влиянием второй зональной гармоники в разложении потенциала гравитационного поля Земли. Поскольку $i = 98^\circ$, то аргумент перигея уменьшается. Как показали расчёты, для оптимальной по быстрдействию коррекции элементов орбиты с учётом прецессии характерно, что аргумент широты центра разгонного участка изменяется по закону, близкому к линейному: $u_h \approx u_{h0} + BA^{-1/2}t$.

2.8. Приближённый метод расчета энергетики манёвра и параметров управления элементами орбиты

Управление элементами A, e, w . Получены формулы для затрат характеристической скорости $V_{xK}(t)$ при условии непрерывной работы двигателей ($a \equiv 0$). Для этого уравнения (1.27) представлены в виде конечных приращений, и из этих уравнений получена формула для V_{x1} :

$$V_{x1} = \frac{p|\Delta e|}{4 \sin x_1} \sqrt{\frac{m}{A_{\delta}} (1 + tg^2 h_1)} = \frac{p|\Delta e|}{4 \sin x_1} \sqrt{\frac{m}{A_{\delta}} \left[1 + \frac{\Delta w_a^2}{\ln^2(1 + \Delta e/e_0)} \right]}. \quad (2.25)$$

На рис. 2.9,а показана зависимость (2.25) в виде изолиний «приведённой» характеристической скорости:

$$V_{x1} \% = \frac{4}{\pi e_0} \sqrt{\frac{\mu}{A_{cp}}} \sin \xi \cdot V_{x1}$$

в координатах Δw_a и $\Delta e/e_0$. Полученная зависимость является универсальной и может быть использована на стадии проектно-баллистических расчётов при определении затрат рабочего тела на манёвр коррекции. По существу это изолинии функции «будущих потерь» – критерия оптимальности V_x в задаче оптимизации плоских манёвров в центральном поле.

Управление элементами Ω, i . Из уравнений (1.27) с помощью аналогичного приёма приведения к конечным приращениям получим

$$V_{x2} = \frac{\pi|\Delta i|}{2} \sqrt{\frac{\mu}{A_{cp}} \left(1 + \frac{\Delta \Omega_a^2}{\ln^2 \left| tg \frac{i_0 + \Delta i}{2} ctg \frac{i_0}{2} \right|} \right)} \approx \frac{\pi|\Delta i|}{2} \sqrt{\frac{\mu}{A_{cp}} \left(1 + \frac{\Delta \Omega_a^2 \sin^2 i_{cp}}{\Delta i^2} \right)}. \quad (2.25')$$

На рис. 2.9,б зависимость (2.25') представлена в виде изолиний $V_{x2} = const$ в координатах $\Delta \Omega_a$ и $Di \sin^{-1} i_{\delta}$. Получено аналитическое выражение для оценочной функции $j: \tilde{f}^{(0)}(x, t) = \tilde{f}_1^{(0)}(A, e, w) + \tilde{f}_2^{(0)}(i, \Omega)$, где первое слагаемое соответствует приближённому решению задачи о минимуме характеристической скорости плоского межорбитального манёвра

$$\tilde{f}_1^{(0)} = - \frac{p(e_K - e)}{4 \sin x(A, e)} \sqrt{\frac{m}{A_{cp}}} \sqrt{1 + \frac{(w_K - w)^2}{\ln^2 \frac{e_K}{e}}}, \quad (2.26)$$

а второе – приближённому решению задачи оптимального поворота плоскости орбиты

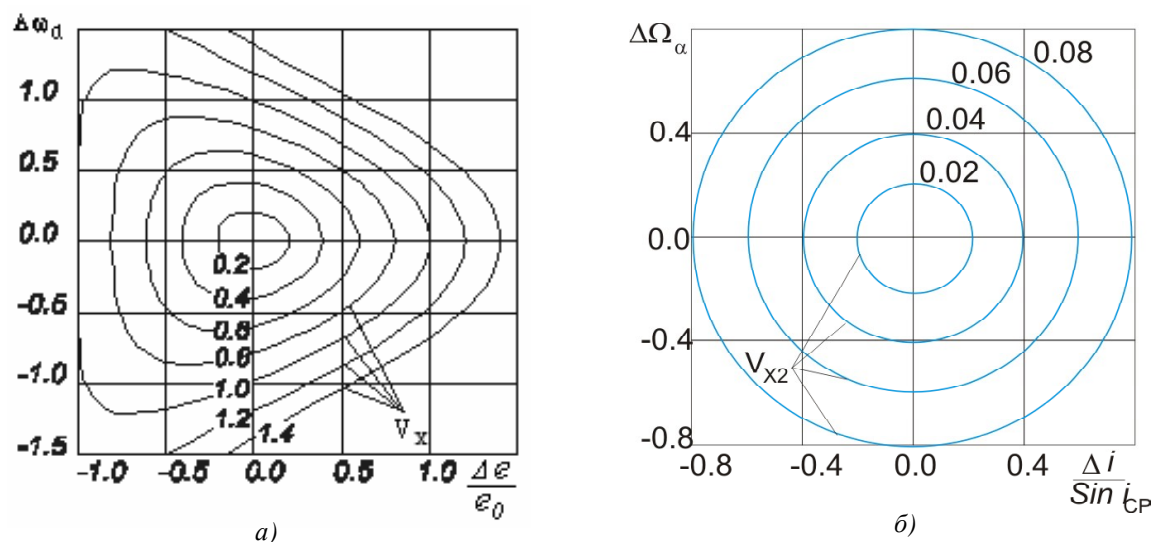


Рис. 2.9. Затраты характеристической скорости на манёвры

$$\Phi_2^{(0)} = -\frac{\pi(i_K - i)}{2} \sqrt{\frac{\mu}{A_{cp}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{(\Omega_K - \Omega)^2 \sin^2 i_{cp}}{(i_K - i)^2}}. \quad (2.27)$$

Оценка любых допустимых управлений $\tilde{u}(t, x)$ может быть проведена на основе функций $j_1^{(0)}, j_2^{(0)}$ [1].

2.9. Задача оптимальных перелётов между орбитами с большими эксцентриситетами

Рассмотрены два варианта ориентации вектора тяги: свободная и по трансверсали.

Для варианта свободной ориентации получена квазиоптимальная программа управления на витке

$$\tilde{q}_{opt}^* = \arctg \left\{ \frac{\sin E}{2(K + \cos E)} \right\}, \quad (2.28)$$

где $K(t)$ - параметр управления, являющийся медленной переменной; q - угол, характеризующий ориентацию тяги в плоскости орбиты; E - эксцентрисическая аномалия.

Для трансверсальной ориентации было показано, что оптимальная структура управления на витке должна содержать не более двух активных участков разного знака, разделённых равными пассивными участками.

Функция включения тяги d определяется следующим образом:

$$d = \frac{1}{2} \{ \text{sign}[(E - h - x - a)(E - h - 2p + a + x)] - \text{sign}[(E - h)^2 - x^2] \} \quad (2.29)$$

где x - протяжённость в угловой мере половины разгонного участка, a - протяжённость в угловой мере одного пассивного участка, h - угловое расстояние центра разгонного участка относительно перицентра.

Проводилось численное решение оптимизационных задач принципом максимума Понтрягина для обоих вариантов управления вектором тяги. На рис. 2.10 представлены результаты решения задачи о переходе КА с низкой круговой орбиты на орбиту спутника “Молния” при трансверсальной ориентации вектора тяги для различных значений общего времени перелёта.

Полученные решения позволили построить для ряда баллистических задач области достижимости при фиксированных затратах характеристической скорости. Для орбиты спутника “Молния” построены области корректируемых параметров в координатах “большая полуось – эксцентриситет”. Показано, что выигрыш в характеристической скорости при свободной ориентации вектора тяги по сравнению с трансверсальной ориентацией может быть значительным (рис. 2.11).

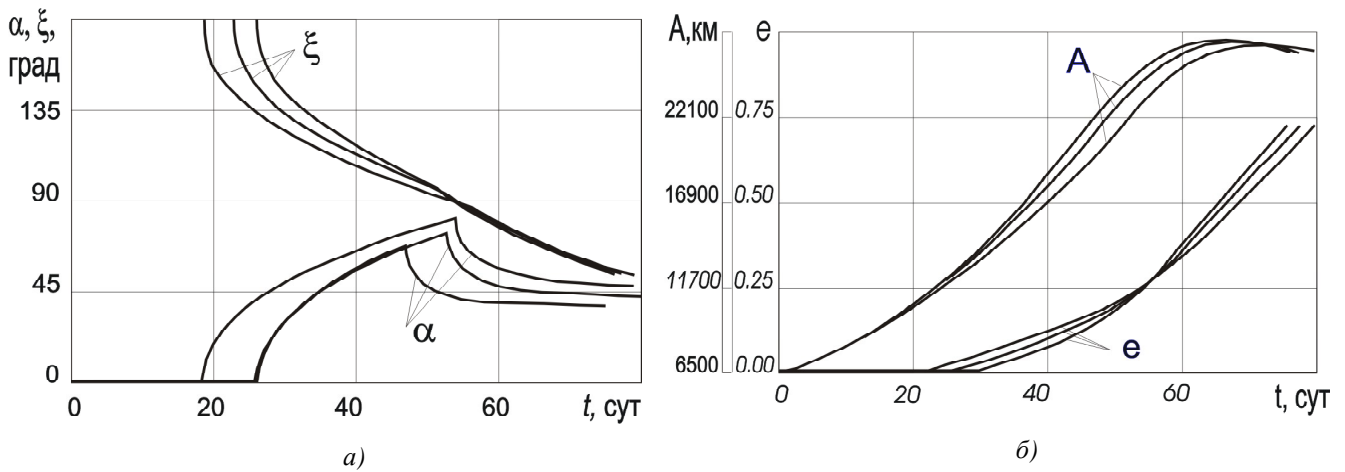


Рис. 2.10. Параметры управления и оскулирующие элементы для перехода на высокоэллиптическую орбиту

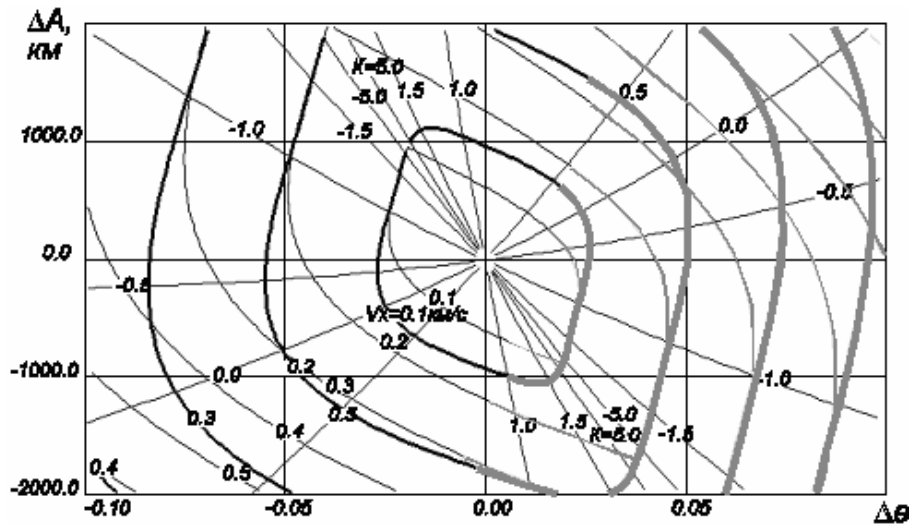


Рис. 2.11. Области достижимости для начальной орбиты с параметрами: $A=26621$ км, $e=0,74$,
 — свободная ориентация вектора тяги, — трансверсальная

2.10. Задача наведения КА в расчётную точку околокруговой орбиты

Рассмотрим задачу наведения КА в заданную точку орбиты для случая малого эксцентриситета e . Параметрами движения можно считать только большую полуось A и относительное положение спутника на орбите, определяемое параметром Δu . Запишем уравнения движения:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{4}{p} \sqrt{\frac{A^3}{m}} a_1 \left(x - \frac{p}{2} \right),$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} = \sqrt{m} (A^{-1.5} - A_K^{-1.5}). \quad (2.30)$$

С использованием формализма принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального с точки зрения быстродействия управления элементами A и Δu получено, что оптимальная структура управления содержит не более одного разгонного ($x = p$) и одного тормозного ($x = 0$) участков на витке. Исходя из этого, будем характеризовать оптимальное управление следующими параметрами:

t_k - момент окончания манёвра; t_f - момент переключения тяги; $x_0 = \{0, p\}$ - параметр, характеризующий направление тяги в начальный момент движения. Проинтегрировав первое уравнение в (2.30), получим выражение для момента окончания манёвра:

$$t_k = \frac{p\sqrt{m}}{a_1(2x_0 - p)} \left(\frac{1}{\sqrt{A_k}} - \frac{1}{\sqrt{A_0}} \right) + 2t_f. \quad (2.31)$$

Подставив текущее значение большой полуоси во второе уравнение (2.30) и проинтегрировав его, получим следующее соотношение для определения времени переключения направления тяги:

$$\Delta\bar{u} + 2\sqrt{mA_k^{-1.5}}t_f + \frac{pm}{2a_1(2x_0 - p)} \times \left[\left(\frac{1}{\sqrt{A_0}} - \frac{a_1(2x_0 - p)}{p\sqrt{m}} t_f \right)^4 + 1,5A_k^{-2} - 0,5A_0^{-2} - A_0^{-0,5}A_k^{-1,5} \right] = 0, \quad (2.32)$$

где $\Delta\bar{u} = \Delta u_k - \Delta u_0 + 2pn$, n - число витков в относительном движении (в общем случае неизвестно и выбирается так, чтобы обеспечить наименьшее конечное время t_k).

На рис. 2.12 представлены изолинии затрат характеристической скорости V_x на поле ΔA , $\Delta\bar{u}$ для $A_k = 7030$ км и $a_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ м/с².

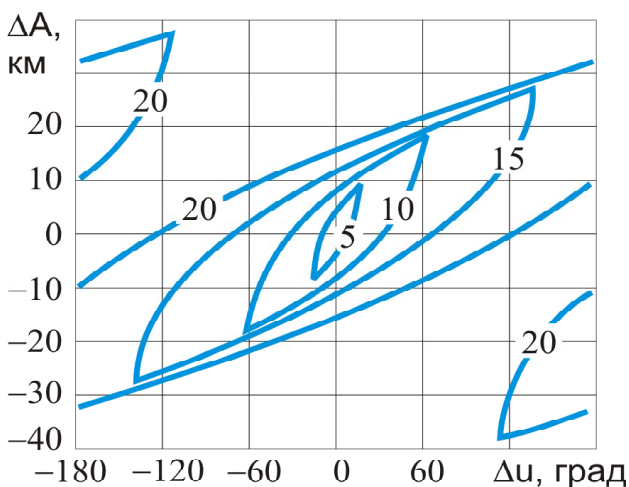


Рис. 2.12. Области достижимости в отклонениях по ΔA , $\Delta\bar{u}$

2.11. Задача коррекции орбиты спутника Земли с учётом неопределённости силы сопротивления верхних слоев атмосферы

Как уже отмечалось, особенностью движения КА на низких околоземных орбитах является неопределённость возмущающей силы аэродинамического сопротивления, обусловленная неточностью знания баллистического коэффициента s_x и плотности атмосферы. Для оценки возмущающего ускорения использовалась изотермическая модель плотности, в которой высота однородной атмосферы H изменяется в зависимости от уровня солнечной активности. Баллистический коэффициент изменяется в зависимости от текущего аргумента широты u .

Средняя за виток величина реактивного ускорения \hat{a} , компенсирующего влияние аэродинамических возмущений, определяется путём взятия интеграла от $|f_a|$ на интервале, равном периоду обращения. Результаты расчёта \hat{a} для $s_x = 0.002$ м²/кг приведены в табл. 2.2.

Получены приближённые аналитические решения для расчёта параметров «корректирующего импульса», создаваемого двигателем МТ. Показано, что одновременная коррекция большой полуоси и перигейного расстояния при одном активном участке на витке принципиально возможна в ограниченной области параметров, характеризующейся отношением корректируемых ошибок.

Рассмотрим более подробно коррекцию элементов орбиты трансверсальным реактивным ускорением ($a = const$, $a \equiv 0$). Пусть $m = 1$. Исследуем принципиальную возможность одновременной коррекции двух элементов орбиты при одном активном участке на витке. Для примера рассмотрим одновременную коррекцию оскулирующего периода T и перигейного расстояния r_p . В этом случае необходимо решить систему уравнений:

Таблица 2.2. Результаты расчёта среднего «компенсирующего» реактивного ускорения

| Параметры орбиты | | Минимальный уровень солнечной активности | Максимальный уровень солнечной активности |
|------------------------------|------------------------------|--|---|
| высота перигея H_p , км | высота апогея, H_a , км | $\left(F_0 = 75 \cdot 10^{-22} \frac{Bm}{m^2 \Gamma_{\zeta}}\right) \hat{a}_H \cdot 10^5, \text{ м/с}^2$ | $\left(F_0 = 250 \cdot 10^{-22} \frac{Bm}{m^2 \Gamma_{\zeta}}\right) \hat{a}_H \cdot 10^5, \text{ м/с}^2$ |
| 250 | 350 | 0.68 | 1.556 |
| 350 | 350 | 0.035 | 0.325 |

$$\Delta r_p = \frac{ap_0^3}{m\sqrt{(1-e_0)^5}} [(4-e_0)x] - 4 \sin x \cos h + \frac{e_0}{2} \sin 2x \cos 2h, \quad (2.33)$$

$$\Delta T = 12pap_0^3 \sqrt{p_0} x / m\sqrt{m(1-e_0)^3}.$$

Выражая ускорение из (2.33), после преобразований получим

$$x = B \left[(4-e_0)x - 4 \sin x \cos h + \frac{e_0}{2} \sin 2x \cos 2h \right],$$

где $B = \frac{\Delta A}{4\Delta r_p}$ является функцией отношения

корректируемых ошибок. Тривиальное решение $x = 0$ соответствует отсутствию коррекции.

Если параметр B известен, то можно определить предельную координату середины активного участка $h_{ID\hat{A}\hat{A}}$, при которой коррекция таких ошибок возможна:

$$h_{ID\hat{A}\hat{A}} = \arccos \left[\frac{1}{e_0} \left(1 - \sqrt{(1-e_0)^2 + e_0 / 2B} \right) \right]. \quad (2.34)$$

Таким образом, одновременная коррекция оскулирующего периода (большой полуоси) и перигейного расстояния при одном активном участке на витке принципиально возможна в ограниченной области параметров, характеризуемой отношением корректируемых ошибок. Если $B < 1/8$, такая коррекция невозможна. Если $B \in \left[\frac{1}{e_0}, \frac{1}{4-e_0} \right]$, то

расположение активного участка должно выбираться в области: $\cos h \leq \cos h_*$. Этот результат объясняется следующим образом. Если соотношение между корректируемыми ошибками таково, что преобладает ошибка по большой полуоси ΔA , то активный участок следует располагать ближе к перигею, чтобы большая ошибка ΔA ликвидировалась за счёт увеличения апогейного расстояния. Если же преобладает ошибка в перигейном расстоянии, то целесообразно исправить её, располагая активный участок ближе к апогею. Это хорошо согласуется с известными результатами по импульсной коррекции эллиптических орбит. Наконец, если ошибка в перигейном расстоянии превосходит некоторый «критический» уровень по отношению к ошибке ΔA , то решение задачи в рамках одного активного участка невозможно.

2.12. Метод выбора универсальных параметров двигателя малой тяги, предназначенного для поддержания низкой орбиты спутника Земли

Характерной особенностью задачи выбора проектных параметров ЭРД, предназначенного для поддержания низких околоземных орбит, является многоцелевое назначение двигателя, а также многорежимный характер выполнения каждой коррекции.

Задачу поддержания орбиты будем формулировать как задачу ликвидации вековых возмущений периода обращения T , возникающих из-за действия силы аэродинамического сопротивления.

Весь интервал управления разобьём на N равных частей, каждая из которых состоит из m пассивных и n активных витков. На активных витках ЭРД создаёт постоянное по

величине реактивное трансверсальное ускорение a_r . В результате за $(m+n)$ витков период обращения восстанавливается с некоторой избыточностью (рис. 2.13).

В качестве критерия оптимальности выберем относительную полезную массу m , а оптимизируемыми параметрами ЭРД будем считать скорость истечения рабочего тела c и реактивное ускорение a_r . Предложен метод решения задачи выбора ограниченного числа s двигательных установок МТ, предназначенных для гарантированного поддержания некоторого множества орбит Y . Орбиту будем характеризовать высотой перигея h_p , высотой апогея h_a и наклоном орбиты i .

Систему двигательных установок $\Gamma = \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ будем считать универсальной для поддержания множества орбит Y , если:

- 1) система Γ может решить задачу поддержания любой орбиты $y \in Y$,
- 2) максимальная степень неоптимальности для любого двигателя системы минимальна.

Величина

$$r(y, p') = \frac{\max_p m(y, p, v_H)}{m(y, p', v_B)} \quad (2.35)$$

характеризует степень неоптимальности двигателя с параметрами p' , поддерживающего орбиту y при высоком уровне плотности атмосферы ($v = v_B$), по сравнению с двигате-

лем, специально спроектированным для выполнения этой задачи при низком уровне плотности ($v = v_H$).

За цикл коррекции управление должно полностью компенсировать действие возмущающей аэродинамической силы. Уровень реактивного ускорения a_r , необходимый для поддержания орбиты:

$$\dot{a}_e = a_e(h_p, n) = \frac{[2(m+n)-1] m \sqrt{m}}{24 p^2 n A^3 \sqrt{A(1-e^2)}} d\Gamma(h_p, n). \quad (2.36)$$

Соответственно, характеристическая скорость за всё время составит

$$V_{x_e} = V_x(h_p, n) = \frac{[2(m+n)-1] m \sqrt{m} \epsilon}{24 p^2 n A^3 \sqrt{A(1-e^2)}(m+n)} d\Gamma(h_p, n). \quad (2.37)$$

Оптимальное значение скорости истечения при коррекции периода обращения определяется только циклограммой работы двигателя и не зависит от орбиты и внешних условий полета. Это существенно облегчает решение задачи универсализации, так как позволяет выбрать скорость истечения, оптимальную для всего множества орбит Y .

Конкретизируем выражение для степени неоптимальности (2.35) и с учётом выражений (2.26), (2.27) получим

$$r(h_p, a, c) = \frac{1 - dd\Gamma_H(h_p)}{1 - J/c - g \frac{ac}{2}}, \quad (2.38)$$

где

$$d = \frac{[2(m+n)-1]}{12 p^2 A^3} \sqrt{g t_H K^3 / 2n(m+n)A(1-e^2)}. \quad (2.39)$$

Максимальное значение функции r при гарантированном поддержании диапазона орбит Y зависит от границ диапазона и будет равно

$$\bar{r} = \max_{h_p \in [h_{p \min}, h_{p \max}]} r(h_p, a, c) = \frac{1 - dd\Gamma_H(h_{p \max})}{1 - J/c - g \frac{ac}{2}}. \quad (2.40)$$

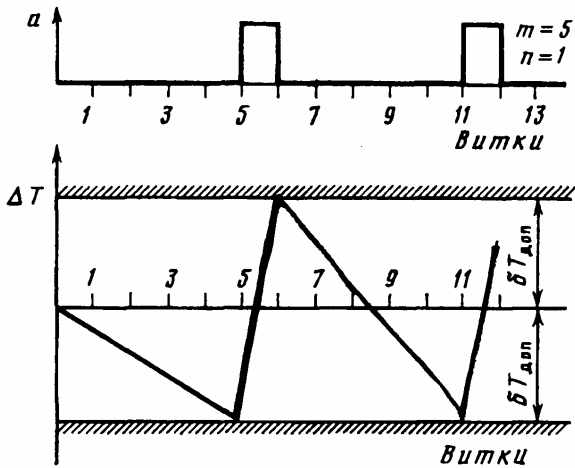


Рис. 2.13. Циклограмма включения ЭРД при поддержании периода обращения ($m = 5, n = 1$)

Изменение периода на одном витке пропорционально величине баллистического коэффициента S_x и зависит от плотности атмосферы и параметров орбиты. Для расчёта уменьшения периода обращения на одном витке $dT(h_{pV})$ можно использовать аппроксимационные формулы.

На рис. 2.14 приведены «предельные» зависимости: $dT_n(h_p)$, которая соответствует минимальной плотности атмосферы, и $dT_g(h_p)$, которая соответствует максимальной плотности атмосферы, полученные путём обработки результатов численного моделирования движения КА с использованием модели плотности по ГОСТ 22721-77 для высоты апогея $h_a=350$ км и наклона $i = 51^\circ$.

В рассматриваемом примере минимальная гарантированная степень неоптимальности $F^{(2)} = 1,0696$ при применении двух разнотипных ЭРД. При этом весь диапазон высот перигея разбивается на два поддиапозона. При $h_p \in [160, 173]$ км двигатель первого типа должен обеспечить реактивное ускорение $a_1 = 7,9 \cdot 10^{-4}$ м/с², а при $h_p \in (173, 240]$ км двигатель второго типа должен обеспечить реактивное ускорение $a_2 = 6,22 \cdot 10^{-4}$ м/с². Оптимальное значение скорости истечения c_{opt} для рассмотренного примера равно 36,25 км/с. Отметим, что при использовании для всего диапазона манёвров первого типа двигателя, располагающего большим реак-

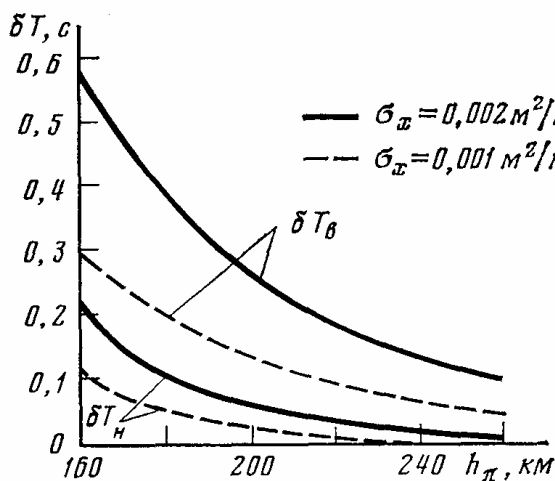


Рис. 2.14. Границы изменения периода обращения на одном витке

тивным ускорением, степень неоптимальности равна $F^{(1)} = 1,091$. Результаты анализа показали, что дальнейшее увеличение числа двигателей (больше двух) практически не уменьшает гарантированную степень неоптимальности.

2.13. Оптимальное управление относительным движением КА с помощью двигателей МТ

Представим исходную задачу, описанную в [1] моделью (1.31), в виде последовательности менее сложных задач, допускающих аналитические решения.

Система (1.31) с помощью замены:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= r_1^{-1}(\Delta r + I_1^{-1} \Delta V_u), \\ \bar{x}_2 &= -\frac{1}{3}(\Delta u - 2I_1^{-1} r_1^{-1} \Delta V_r), \quad t = I_1 t \end{aligned}$$

приводится к канонической форме, использование которой позволяет получить решение задачи об оптимальном по быстродействию переводе её из произвольного начального состояния в начало координат:

$$\begin{aligned} a_T &= -a \operatorname{sign} \left[\bar{x}_2 + \frac{\bar{x}_1 \bar{x}_2}{2\bar{a}} \right] = \\ &= -a \operatorname{sign} \left[-\frac{1}{3}(\Delta u - 2I_1^{-1} r_1^{-1} \Delta V_r) + I_1^2 \frac{(\Delta r + I_1^{-1} \Delta V_u) \Delta r + I_1^{-1} \Delta V_u}{2\bar{a} r_1} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Структура оптимального управления содержит лишь одно переключение. Для этого случая имеем точную оценку продолжительности манёвра ($\Delta V_r \equiv 0$ и $\Delta V_u \equiv 0$), являющуюся по существу функцией будущих потерь:

$$T_{H \min} = \min_{d(0)} \left\{ I_1^{-1} \left(-\frac{\Delta r_1 I_1^2}{ad(0)} + 2 \sqrt{\left(\frac{\Delta r_1(0) I_1^2}{a} \right)^2 + \frac{\Delta u_0 I_1^2 r_1}{3ad(0)}} \right) \right\} \quad (2.42)$$

Для продольного относительного движения характерным является наличие периодических и вековых составляющих. При отсутствии возмущений один КА будет двигаться относительно другого в плоскости $(\Delta r, \Delta L)$ по эллипсу, центр которого смещается с постоянной скоростью. Параметры, ха-

рактически характеризующие смещение эллипса и размер его полуоси, можно считать вековыми, а характеризующие положение КА на эллипсе - периодическими.

Введём переменные: Δr_{cp} - среднее смещение вдоль радиуса; ΔL_{cp} - среднее смещение вдоль орбиты; l - малая полуось эллипса относительного движения КА в плоскости орбиты; l_z - амплитуда взаимных колебаний аппаратов в боковом направлении; j, j_z - углы, характеризующие положения КА на эллипсе относительного движения (рис. 2.15). Дифференциальные уравнения относительного движения примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta r}_{cp} &= \frac{2}{\lambda} a_T, \quad \dot{\Delta L}_{cp} = -\frac{3}{2} \lambda \Delta r_{cp} - \frac{2}{\lambda} a_S, \\ \dot{\varphi} &= \lambda + \frac{1}{\lambda l} (a_S \cos \varphi - 2 a_T \sin \varphi), \\ \dot{l} &= \frac{1}{\lambda} (a_S \sin \varphi + 2 a_T \cos \varphi), \\ \dot{l}_z &= \frac{1}{\lambda} a_w \cos \varphi_z, \quad \dot{\varphi}_z = \lambda - \frac{1}{\lambda l_z} a_w \sin \varphi_z. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Для системы (2.43) получено оптимальное в смысле быстродействия управление для совместного изменения элементов продольного движения:

$$tg a_{opt} = \frac{-2y_L + y_l \sin j + l^{-1} y_j \cos j}{2y_r + 2y_l \cos j - 2l^{-1} y_j \sin j}. \quad (2.44)$$

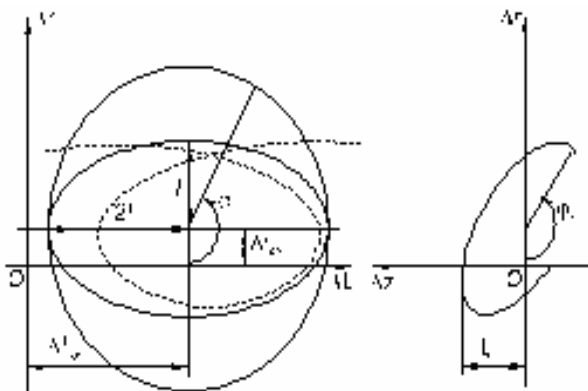


Рис. 2.15. Параметры относительного движения $\Delta r_{cp}, \Delta L_{cp}, l, l_z, j, j_z$

Стратегия управления вековыми и периодическими составляющими состоит из следующих этапов с соответствующими граничными условиями:

- управление вековыми составляющими Δr_{cp} и ΔL_{cp} : $\Delta r_{cp}(t_k) = 0, \quad \Delta L_{cp}(t_k) = 0$;
- коррекция амплитуды боковой составляющей относительного движения: $l_z(t_k) = 0$;
- коррекция амплитуды периодической составляющей $\Delta L(t_k) = 0$.

Некоторые результаты моделирования по этой стратегии представлены на рис. 2.16, где показаны проекции пространственной траектории относительного движения на продольную и боковую плоскости. Точкой с координатами (0, 0, 0) показано положение пассивного КА с высотой базовой орбиты $H_0 = 3000$ км. Ускорение тяги двигателя маневрирующего КА $a_0 = 10^{-4}$ м/с². На верхней части (рис. 2.16, а) показан начальный этап формирования спутниковой системы сопровождения. На нижней части (рис. 2.16, б) приведена проекция траектории относительного движения на боковую плоскость в момент коррекции амплитуды боковой составляющей. Для уменьшения амплитуды с 11 до 3 км потребовалась непрерывная работа двигательной установки в течение 8 орбитальных витков.

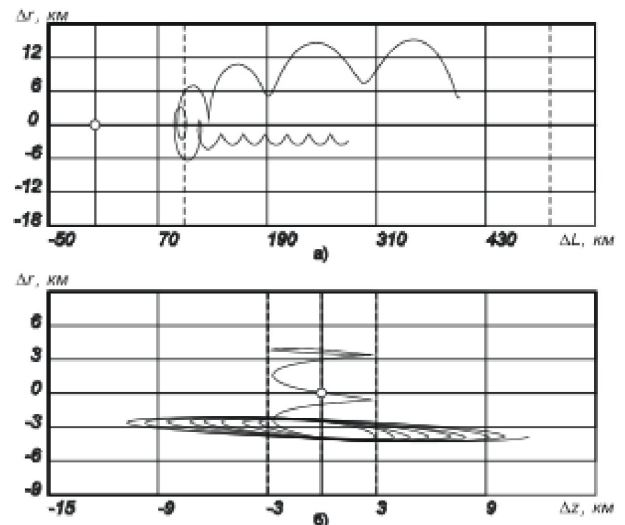


Рис. 2.16. Результаты моделирования

2.14. Оптимизация проектных параметров маневрирующего КА сопровождения

Представим полную массу активного КА II в виде суммы масс отдельных его компонентов в соответствии с массовой моделью, описанной в [1]. В качестве критерия оптимальности примем относительную массу полезного груза $m = \frac{M_{\text{пг}}}{M_0}$.

$$m = \frac{M_{\text{пг}}}{M_0}$$

Стратегию гарантирующего управления выбираем в следующем виде. Пусть КА II находится в заданном диапазоне смещений вдоль орбиты с отклонением по среднему радиусу $\Delta r_{cp} \neq 0$. Активный аппарат в относительном движении эволюционирует, смещаясь вдоль орбиты (рис. 2.17). В точке "1"

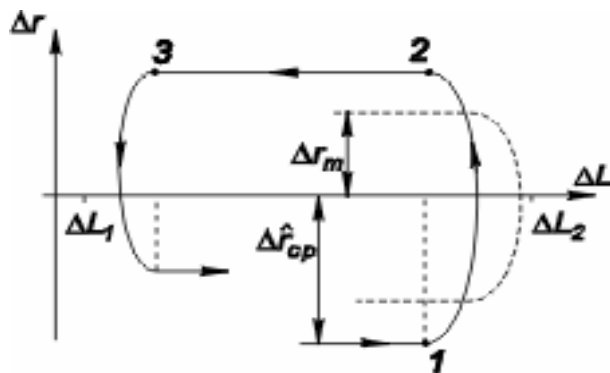


Рис. 2.17. Управление относительным движением

($\Delta L = \Delta L_{p1}$), находящейся внутри заданного диапазона, включается двигательная установка аппарата, и он переводится в точку "2" с гарантированным изменением знака Δr_{cp} . После этого КА II начинает дрейфовать в противоположную сторону. В точке "3" ($\Delta L = \Delta L_{p0}$) тяга двигателей включается на торможение, и КА II переходит на орбиту с меньшим, чем у пассивного КА I, средним радиусом. Затем процесс повторяется. В процессе дрейфа при необходимости осуществляется коррекция полуоси эллипса взаимного движения.

Проведено имитационное моделирование работы алгоритмов управления на различных режимах полета. Выбор оптимальных параметров, определяющих проектный облик КА II, будем проводить поэтапно, используя на каждом следующем этапе более полную и точную модель объекта. Результаты изменения проектных и баллистических характеристик по итерациям для орбиты со средней высотой 660 км приведены в табл. 2.3. Оказалось достаточно трёх итераций. При этом критерий оптимальности m изменяется не очень существенно (на 3...6%), но основной проектный параметр a_0 меняется на 10...12% по сравнению с первоначальным значением.

Таблица 2.3. Изменение оптимальных параметров по итерациям $A_k = 7030$ км, $i = 98^\circ$, $\Delta A_{\text{max}} = \pm 60$ км, $\Delta e_{\text{max}} = 0,02$, $T_{PEC} = 10^4$ час, $T_{\text{форм.}} = 30$ сут, $\Delta r'_{\text{max}} = 1,2$ км, $\Delta L'_{\text{max}} = 125$ км, $g_{3У} = 50$ кг/кВт, $g_{ДУ} = 48$ кг/Н

| Итерации | Расчёт энергетики маневра по верхней оценке V_x | Модель центрального поля. «Идеальный» предельный цикл поддержания $\Delta r_{\text{max}} = 1,5$ км, $\Delta L_{\text{max}} = 150$ км | Учёт несферичности Земли. Синтез циклограммы с учётом амплитуды колебаний | Численное моделирование манёвра |
|--|---|--|---|---------------------------------|
| $a_0 \cdot 10^5, \text{ м/с}^2$ | 9,91 | 10,72 | 8,08 | 8,08 |
| $c, \text{ км/с}$ | 38,7 | 38,9 | 38,9 | 38,9 |
| m | 0,85 | 0,83 | 0,803 | 0,817 |
| Продолжительность формирования $T_{\text{форм.}}$, сут | 18,0 | 17,6 | 19,8 | 19,7 |
| Число коррекций, n ($t_n = 1$ сут) | - | - | 2 | 2 |
| Моторное время этапа поддержания $T_{\text{м2.}}$, час | 9570 | 9580 | 9574 | 9163 |
| Общее число включений ЭРД, $n_{\text{вкл}}$ | 2129 | 2303 | 2166 | 2220 |
| Средняя продолжительность одного включения, $\Delta t_{\text{вкл.}}$, час | 4,49 | 4,16 | 4,42 | 4,13 |
| Средняя продолжительность паузы, $\Delta t_{\text{п.}}$, час | 16,1 | 14,87 | 15,82 | 15,61 |

2.15. Задача оптимизации межпланетных перелётов с МТ

Оптимальное управление КА на гелиоцентрических участках определяется по уравнениям (1.26) или (1.35) [1] в зависимости от используемой модели движения согласно принципу максимума Понтрягина.

В зависимости от граничных условий перелётов и целевого функционала возможны различные постановки краевых задач: оптимальные по быстродействию или расходу; с фиксированной угловой дальностью перелёта или нет.

Вариационная задача об оптимальных по критериям минимума приведённого рабочего времени или быстродействию гелиоцентрических перелётах сводится к двухточечным четырёхпараметрическим (для модели А) или шестипараметрическим (для модели Б) краевым задачам [2]. Получены оптимальные законы управления и баллистические параметры для различных межпланетных перелётов. На рис. 2.18 показаны оптимальные гелиоцентрические траектории достижения планет Солнечной системы для КА с ЭРД с солнечным источником энергии, полученные для модели А.

Расчёт планетоцентрических манёвров набора скорости и торможения КА проводится с использованием трансверсального закона управления и эмпирических зависимостей

расхода рабочего тела и длительности манёвра от проектных параметров, полученных в [2].

Планетоцентрическое движение КА в рамках модели Б рассчитывалось в комбинированной системе координат (1.35) [1] с учётом возмущений от нецентральности поля сил тяготения планет, воздействия атмосферы и затенения панелей СБ (рис. 2.19). Для расчёта пространственного манёвра набора параболической скорости использовался трансверсальный закон управления тягой двигателей с отклонениями тяги от плоскости орбиты с переключением знака бинормальной составляющей тяги дважды за виток.

В процессе моделирования движения на планетоцентрических участках траектории было установлено, что наиболее существенное влияние на баллистические характеристики манёвров набора параболической скорости и торможения оказывает время пребывания КА в тени планеты. Значительное увеличение длительности манёвра (более чем на 20 %) приводит к изменению гелиоцентрических координат КА в момент выхода из сферы действия планеты, что, в свою очередь, существенно влияет на траекторию и проектно-баллистические параметры межпланетного перелёта (оптимальное управление, расход РТ и др.).

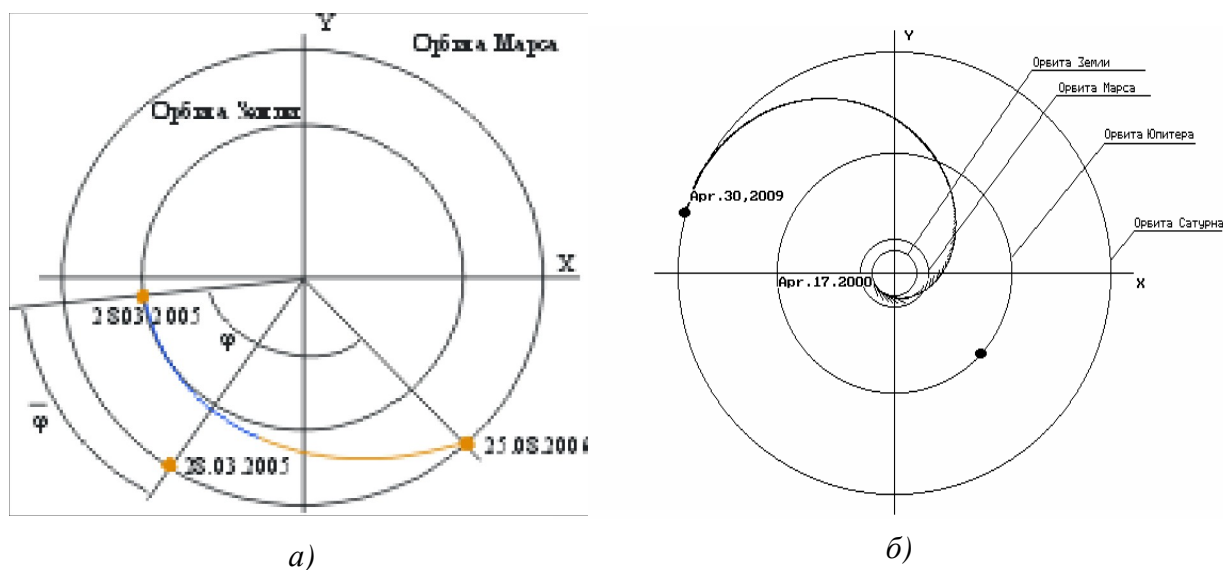


Рис. 2.18. Примеры оптимальной пролётной гелиоцентрической траектории (а) и траектории с выравниванием скоростей (б)

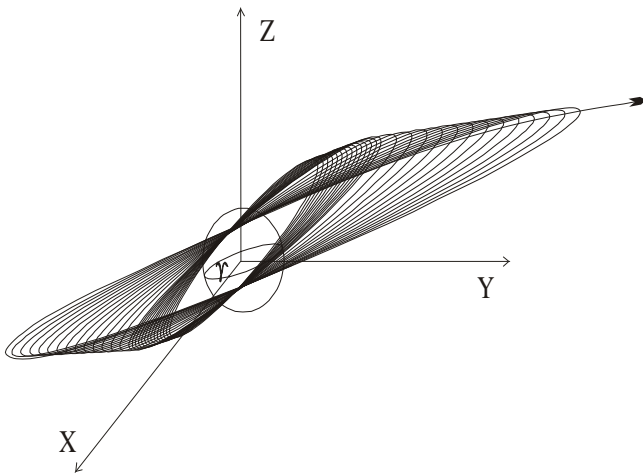


Рис. 2.19. Траектория участка набора параболической скорости

Алгоритм оптимизации замкнутых межпланетных перелётов основан на последовательном моделировании участков плането- и гелиоцентрических участков движения с их стыковкой, предусмотренной в рамках используемой модели движения при заданных значениях проектных и баллистических параметров, и последующем решении задачи математического программирования для определения их оптимальных значений. В качестве баллистических параметров выбраны: t - отношение длительности прямого перелёта к суммарной продолжительности замкнутого перелёта, \bar{j} - относительное угловое расположение Земли и Марса (определя-

ет дату старта). Проектными параметрами, описывающими облик КА, являются: P - тяга и c - скорость истечения двигателей МТ.

Результаты проектно-баллистической оптимизации замкнутого перелёта Земля-Марс-Земля, выполняемого КА с солнечной энергетической установкой и двигателями малой тяги, представлены на рис. 2.20.

В таблице 2.4 показано изменение результатов комплексной оптимизации перелёта, полученных при использовании различных моделей движения.

На рис. 2.21 показана оптимальная баллистическая схема пилотируемой экспедиции Земля – Марс – Земля, соответствующая проектно-баллистическим параметрам: $t = 0,456$, $P = 350$ Н, $c = 70$ км/с. Траектории получены с учетом эллиптичности и некомпланарности орбит планет для оптимальных дат старта. При этом учтены специфические ограничения на минимальное гелиоцентрическое расстояние (средний радиус орбиты Венеры) и продолжительность пилотируемой экспедиции ($T = 770$ суток), обеспечивающие безопасность экипажа.

Заключение

Описанные выше теоретические результаты нашли практическое использование.

Научный коллектив выполнил ряд научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ по заданиям ведущих предпри-

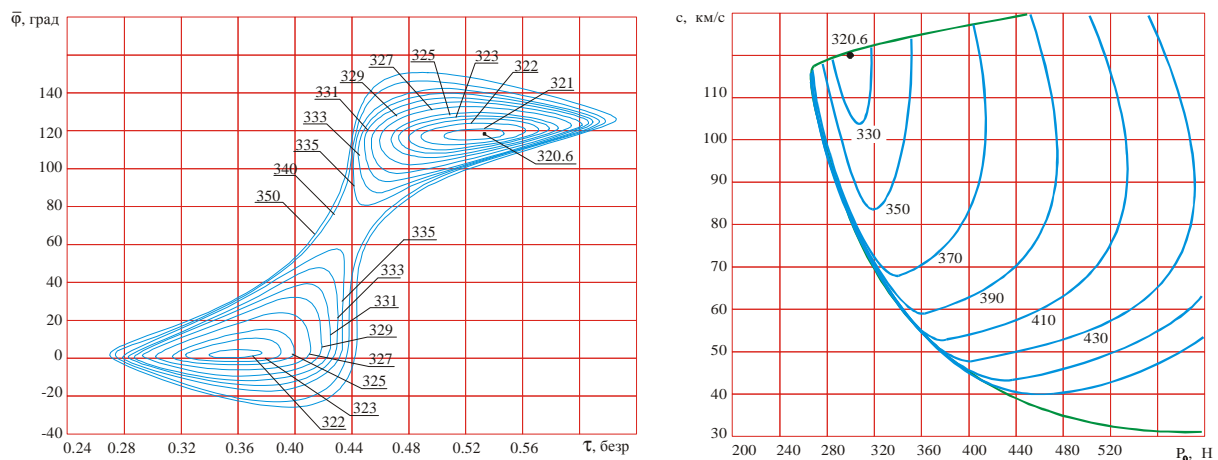


Рис. 2.20. Изолинии стартовой массы КА на поле баллистических параметров \bar{j}, t и на поле проектных параметров $p = \{P_0, c\}$ для пилотируемой экспедиции Земля-Марс-Земля



Рис. 2.21. Оптимальная баллистическая схема экспедиции Земля-Марс-Земля

ятий ракетно-космической отрасли: РКК «Энергия», ЦНИИМАШ, ГНП РКЦ «ЦСКБ – Прогресс», НИИ электромеханики и других. Результаты научных разработок использовались при проектировании ряда изделий ракетно-космической техники. В частности:

- разработаны технические предложения и сформирован принципиальный проектный облик и алгоритмы управления для орбитального КА сопровождения с длительным сроком функционирования;
- разработано техническое задание и проведены проектные исследования межор-

битального многоразового буксира с ЭРДУ, предназначенного для транспортировки крупногабаритных конструкций малой жёсткости на удалённые орбиты;

- проведены исследования и даны технические предложения по увеличению сроков активного функционирования низкоорбитальных спутников Земли за счёт включения в состав бортовых систем корректирующей ЭРДУ малой тяги;

- проведены проектные исследования и разработана методика выбора оптимальных проектно-баллистических параметров, траекторий и законов управления как для пилотируемых экспедиций Земля-Марс-Земля, так и для автоматических межпланетных КА.

Библиографический список

1. Салмин, В. В. Приближенные методы расчета оптимальных перелетов космических аппаратов с двигателями малой тяги. Часть I [Текст] / В. В. Салмин, В. В. Васильев, С. А. Ишков, В. А. Романенко, О. Л. Старинова, В. О. Соколов, В. В. Юрин // Вестник СГАУ № 1 (11). - 2007. – С. 37-52.
2. Салмин, В. В. Методы решения вариационных задач механики космического полета с малой тягой. Монография [Текст] / В. В. Салмин, С. А. Ишков, О. Л. Старинова. – Самара: Изд-во Самарского науч. центра Рос. акад. наук, 2006. – 164 с.

Таблица 2.4. Результаты поэтапной проектно-баллистической оптимизации пилотируемой экспедиции Земля-Марс-Земля с двигателем МТ

| Использованная модель | Оптимальные даты | | τ , безр | T_{Σ} , сут | Масса КА, тонн | | | Оптимальные параметры | |
|--|------------------|-----------|------------------|-----------------------|----------------|-------|--------|-----------------------|------------|
| | старта | финиша | | | старт | финиш | расход | P , Н | c , км/с |
| Планетоцентрическое и гелиоцентрическое движение рассчитывалось по приближенным зависимостям | 6.7.2017 | 5.8.2019 | 0,456 | 770 | 371,0 | 130,0 | 181,0 | 350,2 | 72 |
| Модель А | 8.7.2017 | 7.8.2019 | 0,456 | 770 | 361,8 | 129,9 | 171,9 | 350,1 | 70 |
| Модель Б (без оптимизации точек стыковки плането- и гелиоцентрических участков) | 8.7.2017 | 7.8.2019 | 0,454 | 770 | 316,8 | 129,9 | 126,9 | 350,0 | 70 |
| Модель Б (оптимальная стыковка плането- и гелиоцентрических участков) | 9.7.2017 | 8.8.2019 | 0,456 | 770 | 309,7 | 129,9 | 119,8 | 350,0 | 70 |
| Модель В (имитационное моделирование) | 9.7.2017 | 10.8.2019 | - | 772 | 309,7 | 129,9 | 119,8 | 350,0 | 70 |

References

1. Salmin, V. V. Approximate methods of calculating optimal flights of space vehicles with low-thrust engines. Part I. / V. V. Salmin, V. V. Vassiliev, S. A. Ishkov, V. A. Romanenko, O. L. Starinova, V. O. Sokolov, V. V. Yurin // SSAU Vestnik (Bulletin) No. 1 (11). – 2007. – pp. 37-52.
2. Salmin, V. V. Methods of solving variational problems of mechanics of low-thrust space flight. Monograph. / V. V. Salmin, S. A. Ishkov, O. L. Starinova. – Samara: Publishing house of Samara scientific centre of Russian Academy of Science, 2006. – 164 pp.

**APPROXIMATE METHODS OF CALCULATING OPTIMAL FLIGHTS
OF SPACE VEHICLES WITH LOW-THRUST ENGINES. PART II.**

© 2008 V. V. Salmin, V. V. Vassiliev, S. A. Ishkov, V. A. Romanenko,
V. O. Sokolov, O. L. Starinova, V. V. Yurin

Samara State Aerospace University

The second part of the article presents the results of solving some applied problems of flights of space vehicles with low-thrust engines.

Space vehicle, low thrust, optimal control, approximate methods, geocentric manoeuvres, relative motion, interplanetary flights.

Информация об авторах

Салмин Вадим Викторович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой летательных аппаратов СГАУ.

Ишков Сергей Алексеевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры динамики полета и систем управления СГАУ.

Васильев Валерий Валерианович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры аэрогидродинамики СГАУ.

Романенко Владимир Александрович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры организации и управления перевозками на транспорте СГАУ.

Соколов Владимир Октябrevич, кандидат технических наук, доцент, доцент СГАУ.

Старинова Ольга Леонардовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры летательных аппаратов СГАУ.

Юрин Владимир Викторович, кандидат технических наук, доцент, доцент СГАУ.

Salmin, Vadim Viktorovitch, Doctor of Technical Sciences, professor, head of aircraft construction department, SSAU.

Ishkov, Sergey Alexeyevitch, Doctor of Technical Sciences, professor, professor of the department of flight dynamics and control systems, SSAU.

Vassiliev, Valery Valerianovitch, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of aerohydrodynamics department, SSAU.

Romanenko, Vladimir Alexandrovitch, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of the department of transportation organization and management, SSAU.

Sokolov, Vladimir Oktyabrevitch, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of SSAU.

Starinova, Olga Leonardovna, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of aircraft construction department, SSAU.

Yurin, Vladimir Viktorovitch, Candidate of Technical Sciences, associate professor, associate professor of SSAU.