

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ В ПРЕДЕЛАХ ПЕРВЫХ ДВУХ СТАДИЙ

©2017

В. Е. Зотеев доктор технических наук; доцент кафедры «Прикладная математика и информатика»; Самарский государственный технический университет; zoteev-ve@mail.ru

Р. Ю. Макаров аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика»; Самарский государственный технический университет; makaroman1@yandex.ru

Рассмотрен численный метод определения параметров модели ползучести в пределах первых двух стадий. В основе численного метода лежит переход от модели ползучести, нелинейной по своим параметрам, к линейно-параметрической дискретной модели, в форме разностных уравнений описывающей последовательность экспериментальных значений ползучести. Получены формулы, описывающие связь между параметрами исходной модели и коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели. Для оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели предложена итерационная процедура среднеквадратичного оценивания, позволяющая практически устранить смещение в оценках и тем самым добиться высокой точности оценивания. Проведена апробация разработанного численного метода при обработке экспериментальных кривых ползучести сплава Д16АТ, подтверждающая справедливость полученных соотношений и эффективность метода.

Первая и вторая стадии деформации ползучести; модель ползучести; разностные уравнения; обобщённая регрессионная модель; среднеквадратическое оценивание.

Цитирование: Зотеев В.Е., Макаров Р.Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести в пределах первых двух стадий // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 2. С. 145-156. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-145-156

Введение

Характеристики ползучести и длительной прочности являются одними из наиболее ответственных характеристик, влияющих на работоспособность элементов конструкций, эксплуатируемых в условиях высоких температур и напряжений. Современные тенденции бережливого производства, экономии материальных ресурсов, наиболее полного использования механических свойств конструкционных материалов требуют постоянного развития и совершенствования методов расчёта напряжённо-деформированного состояния элементов конструкций в условиях ползучести. Вместе с тем, нелинейность определяющих уравнений ползучести и длительной прочности существенно ограничивает применение аналитических методов и повышает значимость численных методов решения. Существующие методы обладают рядом недостатков: либо являются чувствительными к монотонности входных данных, либо, что относится к итерационным численным методам, – медленной сходимостью итерационных процедур и неопределённостью выбора начального приближения [11]. В силу вышеизложенного возникает потребность в разработке новых численных методов, лишённых указанных недостатков.

Определяющие уравнения

Для описания кривых ползучести в пределах первых двух стадий [9;10] предлагается закон вида

$$p(t, \sigma) = f_1(t) f_2(\sigma) + f_2(\sigma) t, \quad (1)$$

где $f_1(t) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t})$, $f_2(\sigma)$ – зависимость деформации ползучести от напряжения σ , например, по закону Нортона-Бейли.

Таким образом, совокупность кривых ползучести в пределах стадий неустановившейся и установившейся ползучести при различных значениях номинального напряжения σ может быть описана в виде

$$\tilde{p}(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^m + B \sigma_{0j}^m t, j = \overline{1, M}, \quad (2)$$

где s – количество экспоненциальных слагаемых; c_k , α_k , B , m – параметры материала; σ_{0j} – значения номинального напряжения; M – количество кривых ползучести в серии экспериментов.

Рассмотрим закон (2) в случае одного экспоненциального слагаемого ($s = 1$):

$$\tilde{p}(t, \sigma_{0j}) = c(1 - e^{-\alpha t}) \sigma_{0j}^m + B \sigma_{0j}^m t, j = \overline{1, M}, \quad (3)$$

который известен как закон Содерберга [6;7].

В [6;7] для определения параметров в законе (3) предлагается модификация метода Левенберга-Марквардта. В данной работе определение параметров в (3) основывается на ином подходе, предложенном и описанном в [1 – 5].

В соответствии с данным подходом осуществляется переход от математической модели, нелинейной по параметрам, к линейно-параметрической дискретной модели, описывающей последовательные значения нелинейной математической зависимости. При этом получают соотношения, описывающие связь между параметрами исходной нелинейной модели и коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели. Оценивание коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели происходит с помощью итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания. При этом практически решается проблема выбора начального приближения с достаточно высокой скоростью сходимости итерационной процедуры. Рассмотрим применение данного подхода в задаче оценивания параметров в законе (3).

Формирование разностных уравнений

С учётом гипотезы подобия кривых ползучести с разделением переменных [9;10] деформация ползучести может быть описана следующим образом:

$$p = f_1(t) f_2(\sigma).$$

С её учётом закон (3) примет вид:

$$\tilde{p}(t, \sigma_{0j}) = [c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt] \sigma_{0j}^m, j = \overline{1, M}. \quad (4)$$

При равномерной дискретизации по времени с периодом τ получаем дискретный аналог (4):

$$\tilde{p}_{k,j} = p_k \sigma_{0j}^m, j = \overline{1, M}, k = \overline{0, N-1}, \quad (5)$$

где

$$\tilde{p}_k = c(1 - e^{-\alpha\tau k}) + B\tau k, k = \overline{0, N-1}, \quad (6)$$

N – объём выборки результатов наблюдений.

Подставляя в выражение (6) вместо k значение $k-1$, получим

$$\tilde{p}_{k-1} = c(1 - e^{-\alpha\tau(k-1)} + B\tau(k-1)) \text{ или } \tilde{p}_{k-1} = c - ce^{-\alpha\tau} e^{\alpha\tau} + B\tau(k-1).$$

Выражая функцию $-ce^{-\alpha\tau k} = (\tilde{p}_{k-1} - c - B\tau(k-1))e^{-\alpha\tau}$ и подставляя полученное соотношение в (6), получим: $\tilde{p}_k = c + (\tilde{p}_{k-1} - c - B\tau(k-1))e^{-\alpha\tau} + B\tau k$.

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$\tilde{p}_k = \tilde{p}_{k-1}e^{-\alpha\tau} + (B\tau - B\tau e^{-\alpha\tau})k + c - ce^{-\alpha\tau} + B\tau e^{-\alpha\tau} \text{ или}$$

$$\tilde{p}_k = \tilde{p}_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

где

$$\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}, \lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau}), \lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}. \quad (8)$$

С учётом (5) имеем выражение $\tilde{p}_k = \frac{\tilde{P}_{k,j}}{\sigma_{0j}^m}, j = \overline{1, M}, k = \overline{0, N-1}$, подставляя которое в (7),

получим $\frac{\tilde{P}_{k,j}}{\sigma_{0j}^m} = \frac{\tilde{P}_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}$.

Таким образом, получаем разностное уравнение, описывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемых законом (4):

$$\begin{cases} \tilde{P}_{0,j} = 0, \\ \frac{\tilde{P}_{k,j}}{\sigma_{0j}^m} = \frac{\tilde{P}_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая естественный разброс в экспериментальных данных $\varepsilon_{k,j}$, значения деформации ползучести $p_{k,j}$ можно представить в виде

$$p_{k,j} = \tilde{p}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}, k = \overline{0, N-1}, j = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в разностное уравнение (9), получаем математическую модель в форме разностных уравнений, описывающую последовательность экспериментальных значений деформации в серии кривых ползучести в пределах первых двух стадий:

$$\begin{cases} p_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^m} = \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \lambda_1 + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^m}, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}. \end{cases} \quad (11)$$

Так как разностные уравнения зависят от параметра m , то на первом этапе численного метода необходимо вычислить оценку \hat{m} . Оценивание происходит на основе логарифмирования (5). С учётом естественного разброса данных имеем

$$p_{k,j} = \tilde{p}_k \sigma_{0j}^m + \varepsilon_{k,j}, j = \overline{1, M}, k = \overline{0, N-1}. \quad (12)$$

Из выражения (12) после логарифмирования имеем

$$\begin{aligned} \ln(p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) &= \ln(\tilde{p}_k) + m \ln(\sigma_{0j}), j = 1, k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{p_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}}\right) &= m \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right), j = \overline{2, M}, k = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

После линеаризации по переменным $\varepsilon_{k,j}, \varepsilon_{k,j-1}$ в первом приближении получаем выражения:

$$\begin{aligned} \ln(p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) &\approx \ln(p_{k,j}) - \frac{\varepsilon_{k,j}}{p_{k,j}}, j = 1, k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{p_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{p_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}}\right) &\approx \ln\left(\frac{p_{k,j}}{p_{k,j-1}}\right) - \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j} + \frac{1}{p_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, j = \overline{2, M}, k = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Подставив их в (13), получаем:

$$\begin{aligned} \ln(p_{k,j}) &= \ln(\tilde{p}_k) + m \ln(\sigma_{0j}) + \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j}, j = 1, k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{p_{k,j}}{p_{k,j-1}}\right) &= m \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) + \frac{1}{p_{k,j}} \varepsilon_{k,j} - \frac{1}{p_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, j = \overline{2, M}, k = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (14) лежат в основе формирования регрессионной модели.

Введём следующие вектора и матрицы: $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$ – N -мерный вектор коэффициентов регрессионной модели;

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор правой части размера $(N-1) \times M$, состоящий из M векто-

$$\text{ров } b_j: b_1 = \begin{bmatrix} \ln(p_{1,0}) \\ \ln(p_{2,0}) \\ \vdots \\ \ln(p_{N-1,0}) \end{bmatrix}, b_j = \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{p_{1,j}}{p_{1,j-1}}\right) \\ \ln\left(\frac{p_{2,j}}{p_{2,j-1}}\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{p_{N-1,j}}{p_{N-1,j-1}}\right) \end{bmatrix}, j = 2, \dots, M;$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} - \text{блочная матрица размера } [(N-1)M \times N], \text{ состоящая из } M \text{ матриц } F_j$$

размера $[(N-1) \times N]$ вида

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln(\sigma_0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \ln(\sigma_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \ln(\sigma_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \ln(\sigma_0) \end{bmatrix},$$

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \end{bmatrix}, j = 2, \dots, M;$$

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера $[(N-1) \times M \times 1]$, состоящий из M векторов ε_j размера $[(N-1) \times 1]$:

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, j = 1, 2, \dots, M;$$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $[(N-1)M \times 1]$, состоящий из M векторов η_j размера $[(N-1) \times 1]$:

$$\eta_j = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T, \text{ где } \eta_{i,j} = \frac{1}{p_{i,j}} \varepsilon_{i,j}, j = 1, k = \overline{1, N-1},$$

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{p_{i,j}} \varepsilon_{i,j} + \frac{1}{p_{i,j-1}} \varepsilon_{i,j-1}, j = \overline{2, M}, k = \overline{1, N-1};$$

P – квадратная матрица линейного преобразования вектора остатков размера $[(N-1)M \times (N-1)M]$, где по главной диагонали расположены элементы:

$$P_{ii} = \frac{1}{p_{i,j}}, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, N-1};$$

по побочной диагонали расположены элементы:

$$P_{i,j-1} = -\frac{1}{p_{i,j-1}}, j = \overline{2, M}, i = \overline{1, N-1}.$$

С учётом введённых векторов и матриц получаем регрессионную модель вида

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P\varepsilon. \end{cases} \quad (15)$$

Оценивание коэффициентов находится как

$$\hat{\lambda} = [F^T (P^{-1})^T P^{-1} F]^{-1} F^T (P^{-1})^T P^{-1} b; \quad (16)$$

оценка параметра m :

$$\hat{m} = \hat{\lambda}_{N-1}. \quad (17)$$

Далее формируется обобщённая регрессионная модель, в основе которой лежат уравнения (11).

Введём следующие вектора и матрицы:

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ – трёхмерный вектор коэффициентов обобщённой регрессионной модели;

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор правой части размера $M \times N$, состоящий из M векторов b_j

вида $b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^m} \\ \vdots \\ \frac{p_{N-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, M;$

$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $[NM \times 3]$, состоящая из M матриц F_j размера

$[N \times 3]$ вида $F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_0}{\sigma_{0j}^m} & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{\sigma_{0j}^m} & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{p_{N-2}}{\sigma_{0j}^m} & N-2 & 1 \end{bmatrix};$

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера $[N \times M \times 1]$, состоящий из M векторов ε_j размера $[N \times 1]$:

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad j=1, 2, \dots, M;$$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $[NM \times 1]$, состоящий из M векторов η_j размера $[N \times 1]$:

$$\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T, \quad \text{где } \eta_{i,j} = -\frac{\varepsilon_{i-1,j}}{\sigma_{0j}^m} \lambda_1 + \frac{\varepsilon_{i,j}}{\sigma_{0j}^m}, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad \eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \quad j=1, 2, \dots, M;$$

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{блочно-диагональная квадратная матрица линейного преобразования}$$

вектора остатков размера $[NM \times NM]$, состоящая из M матриц P_j размера $[N \times N]$, $j=1, 2, \dots, M$ и нулевых матриц Θ , где

$$P_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0j}^m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^m} & \frac{1}{\sigma_{0j}^m} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^m} & \frac{1}{\sigma_{0j}^m} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^m} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^m} & \frac{1}{\sigma_{0j}^m} \end{bmatrix}.$$

С учётом введённых векторов и матриц обобщённая регрессионная модель может быть представлена в виде

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases} \quad (18)$$

Итерационная процедура среднеквадратичного оценивания

В основе оценивания параметров модели (4) лежит минимизация остаточной суммы квадратов $Q = \|\varepsilon\|^2 = \|p - \tilde{p}\|^2 \rightarrow \min$, которую с учётом системы (18) при невырожденной матрице P_λ можно представить в виде $Q = \|\varepsilon\|^2 = \|P_\lambda^{-1}b_\lambda - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2$. Дифференцируя остаточную сумму квадратов по переменным λ_i , приравнявая нулю результаты

дифференцирования, получаем систему нормальных уравнений, которая в векторной форме имеет вид

$$(F^T - B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} F \lambda = (F^T - B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} b. \quad (19)$$

Здесь B_λ – блочная диагональная матрица размера $[3N \times 3]$ с матрицами-столбцами

$$P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) \quad \text{по диагонали:} \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) \end{bmatrix},$$

$$D_p = \begin{bmatrix} \frac{dP_\lambda}{d\lambda_1} & \frac{dP_\lambda}{d\lambda_2} & \frac{dP_\lambda}{d\lambda_3} \end{bmatrix} - \text{блочная матрица-строка размера } [N \times 3N].$$

Решение системы (19) имеет вид

$$\lambda = \left[(F^T - B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} F \right]^{-1} (F^T - B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} b. \quad (20)$$

Формула (20) лежит в основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания элементов вектора λ . Рекуррентное соотношение, описывающее итерационный процесс уточнения коэффициентов на основе (20), имеет вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left[(F^T - B_{\lambda_i} D_p^T) \Omega_{\lambda_i}^{-1} F \right]^{-1} (F^T - B_{\lambda_i} D_p^T) \Omega_{\lambda_i}^{-1} b, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

Начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$ находится из минимизации функционала $\|\eta\|^2 = \|b - F\hat{\lambda}\|^2 \Rightarrow \min$, откуда

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b. \quad (22)$$

Таким образом, алгоритм итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания может быть описан следующим образом.

1. По представленным формулам строится регрессионная модель (15) и по формулам (16)-(17) находится оценка параметра m .

2. Строятся вектора и матрицы, входящие в обобщённую регрессионную модель (18).

3. По формуле (22) находится начальное приближение $\hat{\lambda}^{(i)}, i = 0$.

4. По формуле (21) находится приближение $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ вектора коэффициентов обобщённой регрессионной модели (18).

5. Сравниваются по модулю величины $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ и $\hat{\lambda}^{(i)}$. Если $\max |\hat{\lambda}_j^{(i+1)} - \hat{\lambda}_j^{(i)}| < \delta$, $j = \overline{1, 3}$, где $\delta > 0$ – заданное значение предельной абсолютной погрешности, то процесс вычислений заканчивается и за вектор оценок коэффициентов обобщённой регрессионной модели принимается вектор $\hat{\lambda}^{(i+1)}$. Если $\max |\hat{\lambda}_j^{(i+1)} - \hat{\lambda}_j^{(i)}| \geq \delta$, то, увеличив i на единицу, следует вернуться к шагу 4 алгоритма.

По найденным оценкам коэффициентов обобщённой регрессионной модели (18) находятся оценки параметров модели ползучести (3). На основе (8) получаем:

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\lambda}_1), \quad \hat{B} = \frac{\hat{\lambda}_2}{(1 - \hat{\lambda}_1)\tau}, \quad \hat{c} = \frac{\hat{\lambda}_3}{1 - \hat{\lambda}_1} - \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}{(1 - \hat{\lambda}_1)^2}. \quad (23)$$

Апробация разработанного метода

Для апробации разработанного метода обработаны три экспериментальных кривых ползучести для алюминиевого сплава Д16АТ при температуре 150°С по данным работы [8] при постоянных номинальных напряжениях $\sigma_0 = 25; 29; 31 \frac{\text{кг}}{\text{мм}^2}$. Кривые ползучести представлены на рис. 1.

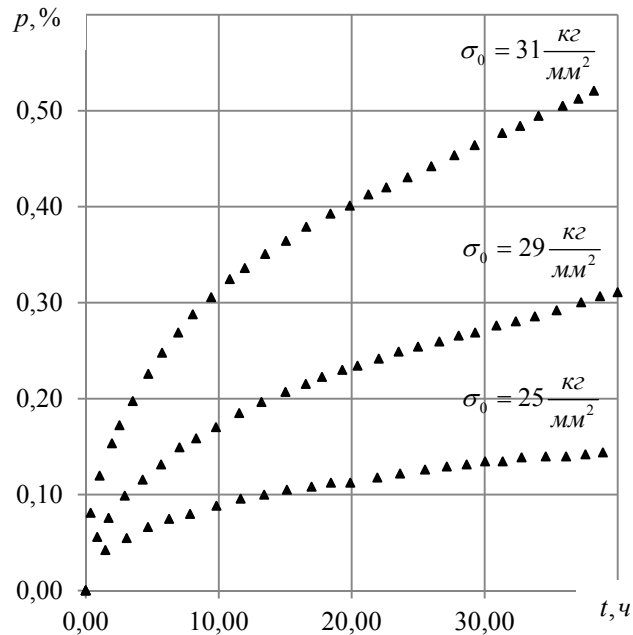


Рис. 1. Кривые ползучести сплава Д16АТ

На этапе предварительной обработки были сформированы равномерные по координате t выборки с периодом равномерной дискретизации $\tau = 0.5$ и объёмом $N = 80$.

Установлено, что предварительная обработка результатов эксперимента на основе сглаживания с помощью скользящего среднего практически не меняет исходные экспериментальные данные ползучести [5].

В процессе реализации описанного алгоритма были получены следующие результаты. На первом этапе численного метода получена оценка параметра $\hat{m} = 6.256$. В результате выполнения итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания после семи итераций были получены оценки коэффициентов $\hat{\lambda}$: $\hat{\lambda}_1 = 0.853$, $\hat{\lambda}_2 = 2.348 \cdot 10^{-13}$, $\hat{\lambda}_3 = 1.837 \cdot 10^{-13}$. Используя соотношения (23), были получены оценки $\hat{\alpha} = 0.317$, $\hat{n} = 1.159 \cdot 10^{-10}$, $\hat{B} = 3.201 \cdot 10^{-12}$.

Таким образом, для описания зависимости ползучести от времени и напряжения может быть использована функция

$$p(t, \sigma_0) = \left[1.159 \cdot 10^{-10} (1 - e^{-0.317t}) + 3.201 \cdot 10^{-12} t \right] \sigma_0^{6.256}. \quad (24)$$

На рис. 2 изображена зависимость (24), построенная при различных значениях номинального напряжения σ_0 .

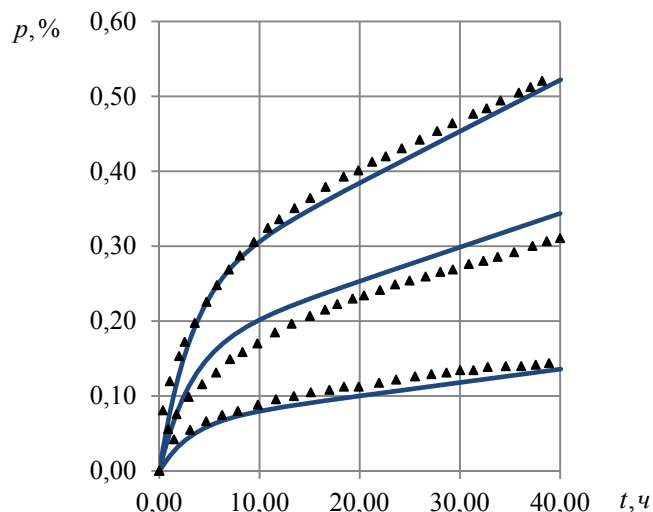


Рис.2. Экспериментальные кривые ползучести сплава Д16АТ (точки) и кривые, построенные на основе метода, при различных значениях номинального напряжения σ_0

Остаточные суммы квадратов для каждой j -й диаграммы ползучести в относительных единицах составили: 11.098%, 11.117%, 4.766% соответственно. По совокупности всех кривых остаточная сумма квадратов в относительных единицах равна 7.209%. Коэффициент детерминации R^2 , который косвенно может служить оценкой адекватности построенной модели экспериментальным данным по совокупности всех диаграмм ползучести, равен 0.981, что свидетельствует о высокой степени адекватности построенной модели (24) данным эксперимента.

Заключение

Разработан численный метод оценивания параметров деформации в пределах первых двух стадий ползучести по совокупности кривых ползучести, построенных при обработке результатов эксперимента для различных значений номинального напряжения. Результаты апробации метода при обработке результатов эксперимента в форме кривых ползучести алюминиевого сплава Д16АТ при температуре 150°C подтвердили достоверность полученных соотношений и выводов и его эффективность при оценивании параметров третьей стадии деформации ползучести.

Библиографический список

1. Зотеев В.Е. Итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения колебания систем с турбулентным трением // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2005. № 38. С. 100-109.
2. Зотеев В.Е. Итерационный метод среднеквадратичного оценивания параметров корреляционной функции распределения случайного поля неупругой реологической деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2006. № 42. С. 123-134.
3. Зотеев В.Е. Математические основы построения разностных уравнений для задач параметрической идентификации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2008. № 2 (17). С. 192-202.

4. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. М.: Машиностроение, 2009. 343 с.
5. Зотеев В.Е., Макаров Р.Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести разупрочняющегося материала // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2016. Т. 20, № 2. С. 328-341. DOI: 10.14498/vsgtu1488
6. Катанаха Н.А., Гецов Л.Б., Данюшевский И.А., Семенов А.С. Ресурс гибов высокотемпературных паропроводов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2013. № 178. С. 82-94.
7. Катанаха Н.А., Семенов А.С., Гецов Л.Б. Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация её параметров // Проблемы прочности. 2013. № 4. С. 143-157.
8. Работнов Ю.Н. Опытные данные по ползучести технических сплавов и феноменологические теории ползучести (обзор) // Прикладная математика и техническая физика. 1965. Т. 6, № 1. С. 141-159.
9. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочнённых конструкциях. М.: Машиностроение-1, 2005. 226 с.
10. Радченко В.П., Симонов А.В. Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 1999. № 7. С. 51-62.
11. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. М.: Статистика, 1977. 200 с.

NUMERICAL METHOD OF DETERMINING CREEP MODEL PARAMETERS WITHIN THE FIRST TWO STAGES OF CREEP

©2017

V. E. Zoteev Doctor of Science (Engineering), Department of Applied Mathematics and Information Science;
Samara State Technical University; Samara, Russian Federation;
zoteev-ve@mail.ru

R. Yu. Makarov post-graduate student, Department of Applied Mathematics and Information Science;
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation;
makaroman1@yandex.ru

The article describes a new numerical method for determining the parameters of a creep model within the first two stages of creep. The numerical method is based on the transition from a nonlinear model of creep to a linear-parametric discrete model. The linear-parametric discrete model describes the sequence of experimental values of creep deformation. The formulas describing the relationship between the coefficients of the linear parametric discrete model and the parameters of the reference creep model are presented. We propose an iterative procedure of RMS estimation of the coefficients of the linear parametric discrete model. The developed numerical method was tested in the estimation of parameters of a creep model, and the validity of the relationships obtained was confirmed.

First and secondary stages of creep; creep model; difference equations; generalized regression model; RMS estimation.

Citation: Zoteev V.E., Makarov R.Yu. Numerical method of determining creep model parameters within the first two stages of creep. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2017. V. 16, no. 2. P. 145-156. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-2-145-156

References

1. Zoteev V.E. Iteration procedure of RMS estimation of coefficients of a stochastic difference equation of turbulence-friction systems' vibration. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2005. No. 38. P. 100-109. (In Russ.)
2. Zoteev V.E. Iteration procedure of RMS estimation of the correlation function of distribution of the plastic rheological deformation random field. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2006. No. 42. P. 123-134. (In Russ.)
3. Zoteev V.E. Mathematical Base for Difference Equations Formulation in Parametrical Identification Problems. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2008. No. 2 (17). P. 192-202. (In Russ.)
4. Zoteev V.E. *Parametricheskaya identifikatsiya dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravneniy* [Parametric identification of dissipative mechanical systems on the basis of difference equations]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2009. 343 p.
5. Zoteev V.E., Makarov R.Yu. A numerical method for the determination of parameters of the strain softening creep model. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2016. V. 20, no. 2. P. 328-341. (In Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1488
6. Katanakha N.A., Getsov L.B., Danyushevskii I.A., Semenov A.S. The resource for the bends of high-temperature steampipes. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*. 2013. No. 178. P. 82-94. (In Russ.)
7. Katanakha N.A., Semenov A.S., Getsov L.B. Unified Model of Steady-State and Transient Creep and Identification of Its Parameters. *Strength of Materials*. 2013. V. 45, Iss. 4. P. 495-505. DOI: 10.1007/s11223-013-9485-7
8. Rabotnov Ju.N. Experimental data on creep of engineering alloys and phenomenological theories of creep. A review. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1965. V. 6, Iss. 1. P. 137-154. DOI: 10.1007/BF00914390
9. Radchenko V.P., Saushkin M.N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazheniy v uprochnennykh konstruktsiyakh* [Creep and relaxation of residual stresses in strengthened structures]. Moscow: Mashinostroenie-1 Publ., 2005. 226 p.
10. Radchenko V.P., Simonov A.V. Computerized system for constructing models of inelastic deformation of metals on the basis of methods of nonparametric data smoothing. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 1999. No. 7. P. 51-62. (In Russ.)
11. Chetyrkin E.M. *Statisticheskie metody prognozirovaniya* [Statistical methods of forecasting]. Moscow: Statistika Publ., 1977. 200 p.