УДК 519.7

ОПТИМИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ МЕТОДОВ

© 2007 М. А. Федорова

Ульяновский государственный университет

В работе исследуется применение эволюционных и численных методов для оптимизации сложных взаимосвязанных систем фильтрации и управления в условиях априорной неопределенности на примере стохастической следящей системы (для краткости, – трекера). Для сравнения различных подходов проведены серии экспериментов на специально разработанном программном продукте. При моделировании трекера обнаружение нарушений производится на основе метода взвешенных квадратов невязок, адаптация – на основе метода вспомогательного функционала качества, а в качестве алгоритмов идентификации использованы – для сравнения их возможностей – метод простой стохастической аппроксимации, метод наименьших квадратов и генетический алгоритм. В сравнительном аспекте исследуется применение эволюционных и численных методов для оптимизации сложных взаимосвязанных систем фильтрации и управления на примере стохастической следящей системы.

Постановка задачи

Рассмотрим заданную в пространстве состояний линейную инвариантную во времени стохастическую систему с контуром управления:

$$x(t_{i+1}) = \Phi_q x(t_i) + \Psi_q\, u(t_i) + w(t_i), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$y(t_i) = H_q x(t_i) + \nu(t_i), \quad y \in R^m, \tag{2}$$

$$\hat{x}_0(t_{i+1}^-) = \Phi_0 \hat{x}_0(t_i^+) + \Psi_0\, u(t_i), \quad \hat{x}_0 \in R^n, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\hat{x}_0(t_i^+) = \hat{x}_0(t_i^-) + K_0 n\,(t_i), \\ &n\,(t_i) = y(t_i) - H_0 \hat{x}_0(t_i^-), \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(t_i) = \begin{cases} f_R[\hat{x}_0(t_i^+)], \\ -G_0^* \hat{x}_0\left(t_i^+\right), \quad u \in R^q. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь $i \in Z$; (1) – объект и (2) – сенсор, параметризованные параметром неопределенности q; (3)-(4) – фильтр Калмана, спроектированный для некоторого номинального значения q_0 параметра q; (5) – управление; $\{w(\cdot)\}$, $\{\nu(\cdot)\}$ считаются независимыми последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним значением и ковариациями $Q_q \geq 0$ и $R_q > 0$ соответственно.

Матрицы, присутствующие в системе (1)-(5), заданы как Φ_0, Ψ_0, Q_0, H_0 и R_0 для номинального режима работы, т.е. для номинального значения $q_0 \in \Theta$ параметра неопределенности $q \in \Theta$, взятого из множества Θ возможных режимов.

Предполагается, что параметр q подвержен внезапным изменениям. Каждое изменение случается в неизвестный момент времени $t_c > t_0$. Это событие можно рассматривать как переключение q с q_0 на некоторое другое неизвестное значение $q_1 \in \Theta$. Чтобы поддерживать обратную связь (ОС) близкой к оптимальной, для вновь возникшего режима (определенного параметром q_1) необходимо соответствующим образом ее перенастроить. Оптимальной перенастройкой является альтернативный фильтр Калмана (KF_1), которому соответствует q_1 с коэффициентом K_1. Таким образом, ОС перенастраивается и (отмечена нижним индексом $_1$) подставляется вместо начальной обратной связи (отмечена нижним индексом $_0$).

Проблема заключается в том, что оптимальную перенастройку нельзя выполнить, потому что q_1 и t_c неизвестны и, таким образом, могут быть заменены только на оценки $\hat{q}_1$ и $\hat{t}_c$, полученные от некоторого практически применимого алгоритма оценки параметра для перенастройки. Можно выполнить только субоптимальную перенастройку и при этом необходимо решать две задачи: обнаружения и адаптации.

1. Обнаружение. Необходимо с наименьшими затратами обнаружить каждый момент изменения t_c с приемлемой задержкой и требуемой надежностью, т.е. необходим некоторый генератор решений DG. В момент тревоги t_a генератор подтверждает внезапное изменение и задает $\hat{t}_c := t_a$.

Будем оценивать момент t_c, используя номинальную ковариацию C_0 последовательности $n(t_i)$ в (4) и специально сконструированную решающую функцию в форме кумулятивной суммы [1]:

$$S_k = \sqrt{m/(2k)} \sum_{i=1}^{k} [n^T(t_i) C_0^{-1} n(t_i)/m - 1].$$

Задача состоит в обнаружении (за приемлемый промежуток времени) момента нарушения t_c при помощи подходящего решающего правила $d_0(t_k) \in \{0, 1\}$ [1]. Ниже представлен один из вариантов такого правила.

Решение принимается в конце интервала выборки номер $l = 1, 2, \ldots, L$, каждый размера N:

$$d_0(l) = \begin{cases} 0 \text{ if } \forall k = 1, \ldots, N : \left| S^{(0)}_{N(l-1)+k} \right| < h; \text{ отбой}, \\ 1 \text{ if } \exists k = 1, \ldots, N : \left| S^{(0)}_{N(l-1)+k} \right| \geq h; \text{ тревога}. \end{cases}$$

Если «тревога», то генератор подтверждает внезапное изменение и включает алгоритм адаптации.

2. Адаптация. После того, как принято решение о том, что произошло нарушение (сигнал «тревога»), необходимо провести адаптацию системы к вновь возникшему режиму работы с q_1. Для этого за основу взят метод вспомогательного функционала качества. При этом в качестве возможных методов идентификации для сравнения выбирать будем из следующего списка:

- простая стохастическая аппроксимация;
- метод наименьших квадратов;
- генетический алгоритм.

Моделирование стохастической следящей системы

Стохастическая следящая система (трекер) – система, состоящая из двух независимых подсистем: соответственно, замкнутого и разомкнутого типа. Таким образом, в трекере некоторый «управляемый объект» следит за некоторой «опорной моделью». Следящая система в обобщенном виде может быть представлена как система (1) - (5), где векторы и матрицы представлены в виде

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ x_r \end{bmatrix}, \; \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_p & 0 \\ 0 & \Phi_r \end{bmatrix}, \; \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_p \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w = \begin{bmatrix} w_p \\ w_r \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} Q_p & 0 \\ 0 & Q_r \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} y_p \\ y_r \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} H_p & 0 \\ 0 & H_r \end{bmatrix},$$

$$v = \begin{bmatrix} v_p \\ v_r \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix},$$

$$u(t_i) = -G_p \hat{x}_{0p}(t_i^+) - G_r \hat{x}_{0r}(t_i^+).$$

Здесь индекс «*p*» обозначает «управляемый объект», а индекс «*r*» – «опорную модель».

Для моделирования возьмем пример из [2] и конкретизируем следящую систему:

$$x(t_{i+1}) = \begin{bmatrix} 0.82 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} x(t_i) + \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_i) + w(t_i),$$

$$y(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t_i) + v(t_i),$$

$$\hat{x}_0(t_{i+1}^-) = \begin{bmatrix} 0.82 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix} \hat{x}_0(t_i^+) + \begin{bmatrix} 0.18 \\ 0 \end{bmatrix} u(t_i),$$

$$\hat{x}_0(t_i^+) = \hat{x}_0(t_i^-) + \begin{bmatrix} K_{0p} & K_{0r} \end{bmatrix} \left(y(t_i) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_0(t_i^-) \right),$$

$$u(t_i) = \begin{bmatrix} 0.36 \\ -0.19 \end{bmatrix} \hat{x}_0(t_i^+).$$

Моделирование неопределенности следящей системы ограничим первым, но достаточно типичным случаем, когда неизвестными или резко изменяющимися величинами могут быть лишь параметры (ковариации) шумов.

Адаптивный фильтр и функция чувствительности

Адаптивную модель построим для оценивания состояния объекта и для определения невязки, т. е. разности между состоянием адаптивной модели и состоянием объекта. Критерий качества зададим в виде функции от невязки [3]. При этом предполагаем, что невязка такова, что минимум критерия качества достигается только при таких значениях параметров модели, которые в точности совпадают с фактическими значениями соответствующих параметров объекта и/или оптимального установившегося фильтра.

Присоединим к системе (1)-(5) адаптивную модель, совпадающую по своей структуре с фильтром Калмана. При этом получаем общую структуру моделируемого трекера с присоединенным блоком обнаружения нарушений и блоком адаптивного фильтра (рис. 1).

Поскольку из-за априорной неопределенности критерий качества системы недоступен непосредственному измерению, то особый интерес для решения задачи идентификации представляет теория вспомогательного функционала качества (ВФК) [3]. Исходный функционал качества (ИФК) от недо-

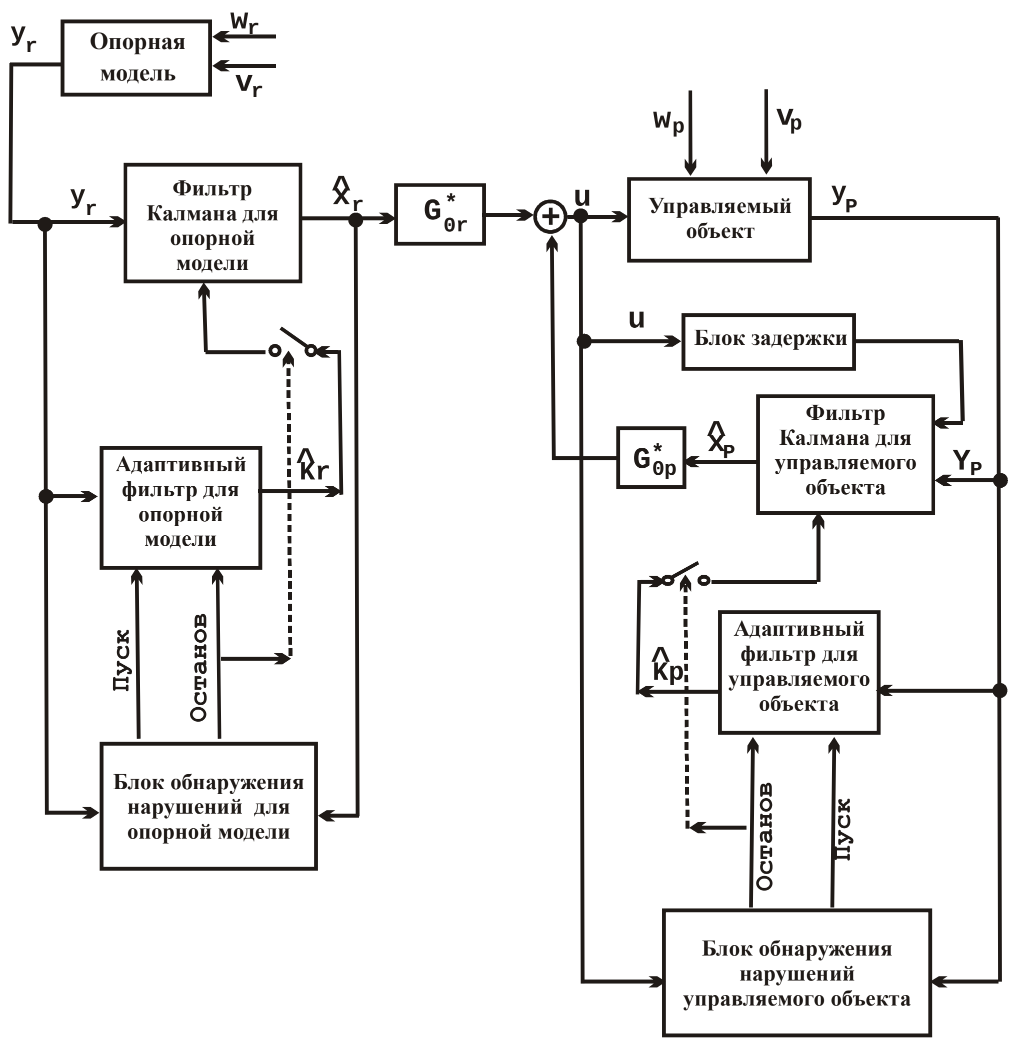

Рис. 1. Структура стохастического трекера с блоком обнаружения нарушений и адаптивным фильтром

ступной ошибки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ зададим следующим образом:

$$J_e(q) = \mathrm{E}\left\{F\left(e(t),q\right)\right\}.$$

Будем конструировать вспомогательный функционал качества, содержащий только известные величины (в зависимости от уровня неопределенности в понятие «доступная информация» вкладывается различный смысл). В основу ВФК положим такую величину $e(t)$, которая является аналогом $e(t)$ в ИФК:

$$J_e(q) = \mathrm{E}\left\{F\left(e(t),q\right)\right\}.$$

Условием оптимальности адаптивного фильтра является достижение минимума функционалом качества, исходя из чего равенство нулю градиента

$$\nabla_q J_e(t) = e^T(t)S(t) = \vec{0}$$

будет необходимым условием оптимальности. Матрица $S(t)$ определяется равенством

$$S(t) = \left[\frac{\partial e(t)}{\partial q_1} \quad \mathbf{K} \quad \frac{\partial e(t)}{\partial q_N}\right] = \nabla_q e(t),$$

где N – размерность модельного параметра. Критерий оптимальности, выраженный в виде функции вектора параметров q, $J_e(t,q)$, в явной форме неизвестен. Это значит, что известны лишь реализации величины произведения $e^T(t,q)\cdot S(t,q)$, которые зависят от вектора q. Задача состоит в определении оптимального значения q^* вектора q, доставляющего минимум функционалу качества. Очевидно, единственно возможный путь решения этой задачи связан с наблюдением текущей реализации и ее обработкой, поскольку минимизируемый ИФК содержит оператор математического ожидания по всему ансамблю реализаций.

Отыскание оптимального вектора будем проводить численными и эволюционными методами.

Численные и эволюционные методы

Рассмотрим численные методы.

1. Простая стохастическая аппроксимация. Данный алгоритм представляет собой стохастический аналог градиентного метода, который обычно записывают в виде

$$\hat{q}[n+1] = \hat{q}[n] - l[n+1]e^T[n]S[n],$$

$$l[n+1] = \frac{1}{n+1},$$

$$n = 1, 2, \mathbf{K}, K.$$

2. Метод наименьших квадратов. Запишем общий вид алгоритма

$$\hat{q}[n+1] = \hat{q}[n] - \Lambda[n+1]e^T[n]S[n],$$

$$n = 1, 2, \mathbf{K}, K.$$

В частном случае – для метода наименьших квадратов – множитель определяется по формуле

$$\Lambda[n+1] = \Lambda[n] - \Lambda[n]S^T[n](S[n]\Lambda[n]S^T[n])^{-1}S[n]\Lambda[n].$$

Эволюционные методы принадлежат направлению, которое описывает системы по типу вычислительных моделей эволюционных процессов. Эволюционные алгоритмы включают в себя три главных направления фундаментальных исследований: генетические алгоритмы, эволюционное моделирование (эволюционные стратегии) и эволюционное программирование [5]. Приведем названия генетических операторов, которые использовались при исследованиях.

Оператор кодирования – оператор, при помощи которого осуществляется кодирование параметров и декодирование хромосом. При моделировании на выбор предлагаются следующие три разновидности оператора кодирования: двоичное кодирование, интервальное кодирование с бинарным кодом и интервальное кодирование с кодом Грея.

Фитнес-функция – функция оценки приспособленности индивида. Данная функция построена на основе метода статистической ортогональности (реализуемого по схеме полярного коррелометра). Значение фитнес-функции сопоставляется каждой хромосоме в популяции, при этом чем больше значение функции, тем лучше приспособленность данного индивида. Для получения оценок всех индивидов в текущей популяции необходима выборка размера *M*.

Отбор – оператор, посредством которого осуществляется копирование хромосом, согласно их приспособленности, в промежуточную популяцию для последующего применения операторов скрещивания и мутации и для формирования таким образом новой популяции. При моделировании на выбор предлагаются следующие два вида этого оператора: «колесо рулетки» и остаточный отбор.

Скрещивание – оператор, который с определенной вероятностью применяется к хромосомам, выбранным оператором отбора. В результате действия этого оператора происходит появление новых индивидов в популяции. При этом скрещивание может быть: одноточечным, двуточечным и маскированным.

Мутация – оператор, который применяется к каждому потомку индивидуально после скрещивания. Мутация случайно изменяет ген хромосомы с небольшой (задаваемой эмпирически) вероятностью.

Элитизм – оператор, задаваемый коэффициентом элитизма. Коэффициент элитизма – это число хромосом, переходящих из текущей популяции в новую популяцию без применения каких-либо генетических операторов.

Результаты вычислительных экспериментов

Для проведения экспериментов предложенные алгоритмы полностью реализованы в специально разработанном программном продукте MASSS [6]. MASSS позволяет наблюдать за поведением различных процессов стохастической системы, обнаруживать нарушения в системе и проводить ее адаптацию к новым условиям. При моделировании в этом приложении доступны следующие функции:

- выбор моделируемых систем (управляемый объект, опорная модель, управляемый объект и опорная модель);
- выбор точки внезапного изменения;
- выбор алгоритмов идентификации (простая стохастическая аппроксимация, метод наименьших квадратов, генетический алгоритм);
- выбор типа сглаживания оценки градиента (экспоненциальное, с фиксированными отсчетами, скользяще среднее);
- изменение параметров модели;
- изменение параметров алгоритмов;
- визуализация данных;
- просмотр данных в табличном виде и т. д.

Для тестирования алгоритмов проведены несколько серий экспериментов. Параметры одной из серий представлены ниже в таблице 1.

На рис. 2 представлено поведение генетического алгоритма в качестве метода идентификации.

Для проведения сравнительного анализа различных алгоритмов идентификации использована интегральная относительная ошибка (IPE), усредненная по результатам серии экспериментов. Графики изменения относительной ошибки простой стохастической аппроксимации, метода наименьших квадратов и генетического алгоритма в зависимости от номера итерации представлены на рис. 3

Как показывают результаты экспериментов, в большинстве случаев усредненное поведение генетического алгоритма дает меньший уровень относительной ошибки по сравнению с процедурой простой стохастической аппроксимации или методом наименьших квадратов. Однако следует отметить, что поведение генетического алгоритма более непостоянно, чем поведение стандартных численных методов. Численные методы последовательны в своих операциях, в то время как генетический алгоритм – параллелен и требует наличия множества индивидов, формирующих текущую популяцию адаптивных фильтров.

Таблица 1. Параметры серии экспериментов

Общие параметры	
Количество экспериментов в серии	100
Максимальной количество итераций	5000
Параметры и обозначения численных алгоритмов	
Простая стохастическая аппроксимация	ПСА
Метод наименьших квадратов	МНК
Параметр экспоненциального сглаживания	0.5
Параметры и обозначения генетического алгоритма	
Генетический алгоритм	ГА
Длина хромосомы	7
Мощность популяции	50
Вероятность мутации	0.1
Вероятность скрещивания	0.8
Коэффициент элитизма	1
Режим отбора	остаточный отбор
Режим скрещивания	маскированный
Кодирование	интервальное с кодом Грея
Параметры внезапного изменения и идентификации	
Итерация внезапного изменеия	300
Истинное значение идентифицируемого параметра *до изменения* (опорная модель)	0.258
Истинное значение идентифицируемого параметра *после изменения* (опорная модель)	0.736
Истинное значение идентифицируемого параметра *до изменения* (управляемый объект)	0.900
Истинное значение идентифицируемого параметра *после изменения* (управляемый объект)	0.547

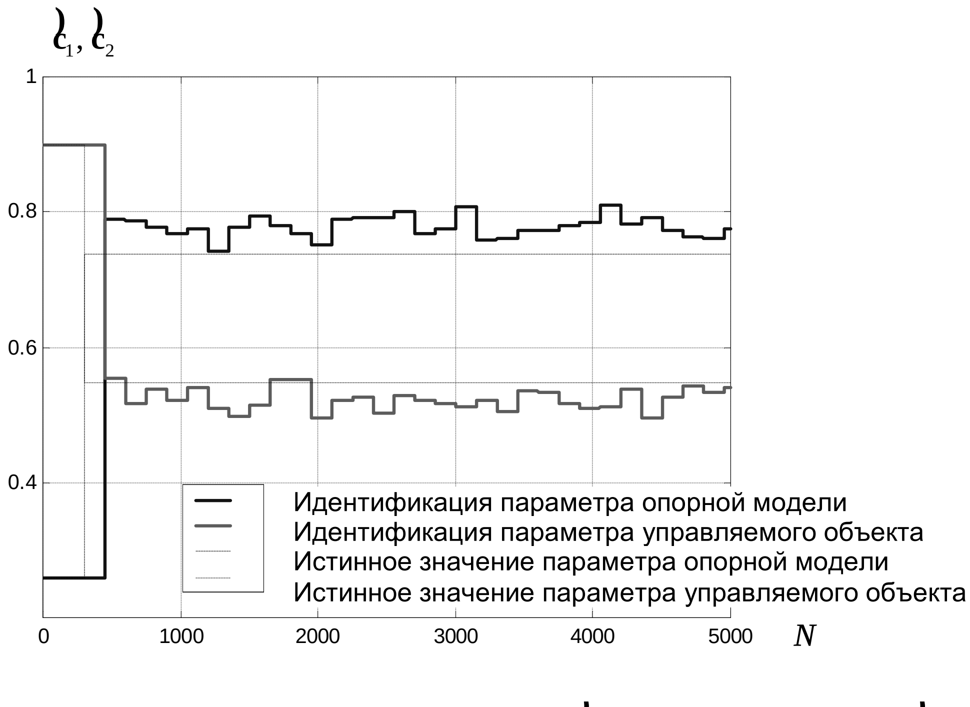

Рис. 2. Зависимости оценок параметров опорной модели (ξ_1) и управляемого объекта (ξ_2) от номера итерации N

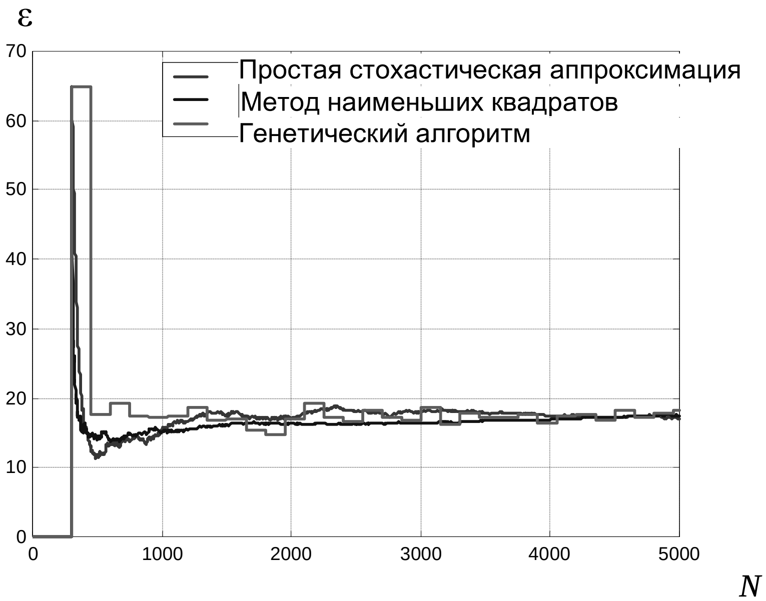

Рис. 3. Сравнительные зависимости относительных ошибок методов идентификации от номера итерации N

На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о пригодности эволюционных методов к решению указанной задачи оптимизации.

Список литературы

1. Семушин И. В. Контроль оптимальности адаптивного фильтра Калмана по реализации скалярного процесса // Известия академии наук СССР. Техническая кибернетика, 1979.– № 6.

2. Maybeck P. S. Stochastic models, estimation and control. – New York: Academic Press, 1982, Vol.3.

3. Семушин И. В. Адаптивное управление стохастическим линейным объектом в условиях неопределенности. // Нелинейные динамические системы: качественный анализ и управление / Сб. научных трудов. Институт системного анализа РАН. Под ред. акад. РАН С. В. Емельянова, чл.-корр. РАН С.К. Коровина. – М.: Изд-во МГУ. - 1994. Вып. 2.

4. Semoushin I. V., Tsyganova J. V. Indirect Error Control for Adaptive Filtering. // Proceedings of the. Third European Conference on Numerical Mathematics and Applied Applications/ Eds. P. Neittaanmaki, T. Tiihonen and P. Tarvainen, World Scientific, 2000.

5. Ярушкина Н. Г. Основы теории нечетких и гибридных систем: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2004.

6. Федорова М. А. Моделирование адаптивной стохастической системы MASSS. // Москва: ВНТИЦ. Программное и информационное обеспечение поддержки научно исследовательских работ, 2007.– ЕСПД. 03254577.01880-01.

OPTIMIZATION OF A STOCHASTIC TRACKING SYSTEM USING NUMERICAL AND EVOLUTION METHODS

© 2007 M. A. Fyodorova

Ulianovsk State University

The paper analyses the use of evolution and numerical methods for the optimization of complex interrelated screening and control systems under a priori uncertainty using a stochastic tracking system (a tracker, for short) as an example. To compare various approaches a series of experiments have been carried out on specially developed software. When modeling a tracker faults are discovered on the basis of the method of weighted squares of error of closure, adaptation is performed on the basis of the method of auxiliary quality functional. The method of simple stochastic approximation, the method of least squares and the genetic algorithm are used as identification algorithms to as to compare their possibilities. In the comparative aspect the use of evolution and numerical methods for the optimization of complex interrelated screening and control systems is analysed using a stochastic tracking system as an example.

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени академика С. П. КОРОЛЕВА

№ 1 (12)

2007

Корректор **Карпова Л. М.**
Компьютерная верстка **Коломиец В. В.**
Переводчик **Безрукова Е. И.**
Технолог **Прилепский И. В.**

Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 200. Заказ 28.

Отпечатано в отделе интеллектуальной собственности и информационного обеспечения
Самарского государственного аэрокосмического университета
443086 Самара, Московское шоссе, 34