

УДК 539.3

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ И ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В МАШИНОСТРОЕНИИ

© 2007 Е. П. Кочеров

ОАО «Самарское конструкторское бюро машиностроения»

Рассмотрены различные подходы к расчету полей деформаций в окрестности зон локализации пластической деформации (концентраторов деформаций), в том числе основанные на жесткопластическом анализе. Предложены алгоритмы включения жесткопластических суперэлементов в известные пакеты программ типа MSC, ANSYS. Рассчитаны предельные значения поля тензора деформаций. Предложен подход к оценке прочности элементов конструкций.

Одной из целей расчета полей напряжений и деформаций и их изменения во времени в машиностроении является оценка прочности конструкции в процессе эксплуатации, т. е. определение того, насколько далеко находится от критического напряженно-деформированное состояние конструкции в данный момент времени или на момент отработки соответствующего ресурсного показателя.

Остановимся на проблеме расчетов в механике, тесно связанной с вопросами оценки надежности конструкций в машиностроении – проблеме расчетов полей деформаций в элементах конструкций. Эта проблема связана с формулировкой условий разрушения материала элементов конструкций, учитывающих историю эксплуатации. Основными механическими полями, которые должны входить в эти условия, являются поля напряжений, деформаций, скоростей деформаций и удельной диссипации энергии. Расчет этих полей составляет основную задачу расчета на прочность.

Определение полей деформаций.

В механике сплошных сред поля деформаций и скоростей деформаций связаны дифференциальным соотношением

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik}V_{k,j} + E_{jk}V_{k,i} = e_{ij}, \quad (1)$$

где $E_{ij} = \frac{1}{2}(d_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0)$ – тензор конечных деформаций Альманси; $e_{ij} = \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i})$ –

тензор скоростей деформаций; V_i – скорость перемещений; x_i^0 – лагранжевы координаты.

Накопление деформаций полностью определяется полем скоростей перемещений. Одним из основных предметов исследований в нелинейной механике является определение полей деформаций и связанных с ними диссипативных процессов в окрестности угловых точек (в частности, вершины трещины). В связи с сингулярностью механических полей в окрестности этих точек численное определение их затруднено. Одной из моделей механики деформируемого твердого тела, позволяющей проводить аналитический анализ полей деформаций, является идеальное жесткопластическое тело.

Основные соотношения теории идеального жесткопластического тела. Эти соотношения включают:

– уравнения равновесия

$$s_{ij,j} = 0;$$

– условие текучести;

$$f(s_{ij}) = 0;$$

– ассоциированный закон пластического течения

$$e_{ij} = I \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \quad (I > 0),$$

где $f(s_{ij})$ – функция текучести; s_{ij} – тензор напряжений; $i, j = 1, 2, 3$.

Будем рассматривать идеальное жесткопластическое тело [1] при условии текучести, удовлетворяющем условию несжимаемости:

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0.$$

В [2, 3] приведены примеры расчетов полей деформаций в окрестности точек разрыва полей скоростей перемещений в рамках модели идеального жесткопластического тела. В [4] предложен жесткопластический суперэлемент, позволяющий рассчитывать поля деформаций и удельных диссипаций энергии в окрестности угловых точек для упрочняющихся упругопластических тел. На рис. 1 представлена схема применения суперэлемента в задаче о растяжении полосы с угловым вырезом с использованием пакета программ MSC. Указанный подход состоит в представлении полосы как составного тела, состоящего из внешней упругопластической части и внутренней окрестности вершины углового выреза, которая моделируется идеальным жесткопластическим телом. Для внешней части полосы (рис. 2) расчет полей напряжений и деформаций выполняется па-

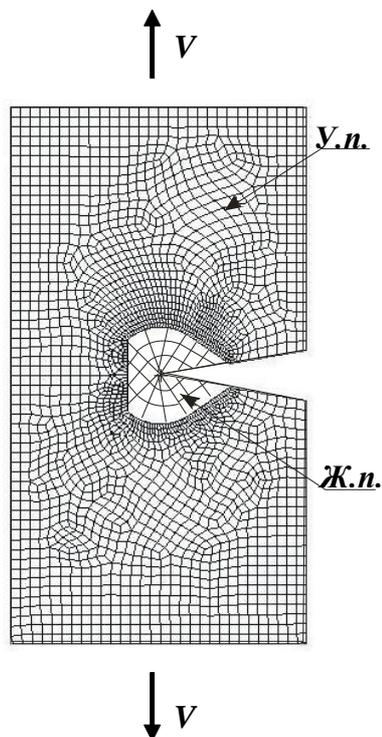


Рис. 1. Схема применения суперэлемента в задаче о растяжении полосы

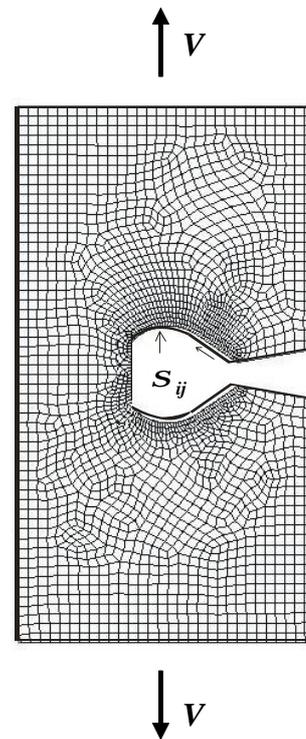


Рис. 2. Упругопластическая часть полосы

кетом программ MSC. При этом взаимодействие с внутренней частью задается распределением напряжений на поверхности раздела.

Для внутренней части полосы (рис. 3) поля напряжений, скоростей деформаций и деформаций определяются аналитически. Взаимодействие с внешней частью определяется нормальными скоростями движения частиц на поверхности раздела.

В [2] показано, что предельное распределение деформаций в окрестности углового выреза определяется системой уравнений (1), которая для случая плоской деформации имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{de}{da} f + g \cos 2(q - y) &= 0, \\ \frac{dg}{da} f + \left(e - \frac{1}{2} \right) \cos 2(q - y) &= 0, \\ 2g \frac{dq}{da} f - \left(e - \frac{1}{2} \right) \sin 2(q - y) - g &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{где } f = \frac{u - (a' \cos a + b' \sin a)}{u + \frac{\partial v}{\partial a}};$$

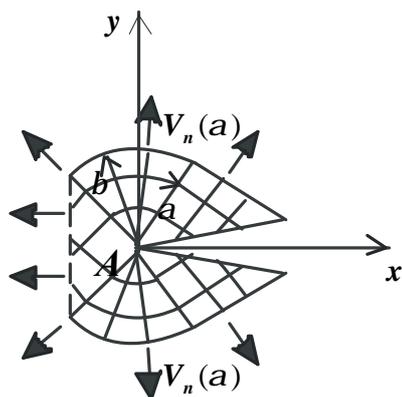


Рис. 3. Жесткопластическая часть полосы

$$e = \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}), \quad g = \frac{1}{2}\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}$$

– инварианты тензора Альманси; q – угол наклона первого (алгебраически наибольшее) главного значения тензора E_{ij} к оси Ox ; u, v – проекции скорости перемещений на a, b линии скольжения в подвижной системе координат, связанной с угловой точкой; a – полярный угол.

На рис. 4 дана зависимость первого главного значения тензора Альманси E_1 от угла a в полярной системе координат с центром в вершине углового выреза (точка A).

Наибольшее значение $E_1 = E_{1max}$ определяется параметрами жесткопластической области и скоростью движения вершины углового выреза ($\mathbf{m} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j}$). Рассматриваемый пример показывает, что изменение положения углового выреза в полосе может моделировать процесс распространения тре-

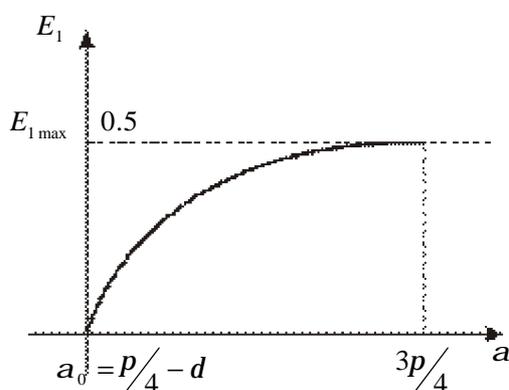


Рис. 4. Зависимость максимальных деформаций от полярного угла при $a' = V, b' = 0$

щины, если принять за механическую характеристику разрушения материала максимально допустимые деформации E_{1max} .

Данный подход к описанию процессов зарождения и распространения трещин может быть обобщен на пространственное деформирование материала [5, 6].

Деформационные состояния идеального жесткопластического тела. Идеальное жесткопластическое тело предполагается несжимаемым. Условие несжимаемости можно записать в виде

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \quad (2)$$

Это уравнение определяет в пространстве главных деформаций E_i гиперболическую поверхность третьего порядка \mathcal{C} (рис. 5,а).

Рассмотрим проекцию поверхности \mathcal{C} на девиаторную плоскость с нормалью, равнонаклоненную к осям E_i (рис. 5,б), на которой представлены проекции линий уровня (линий пересечения поверхности \mathcal{C} с плоскостью, параллельной девиаторной плоскости, расположенной на расстоянии $h = (E_1 + E_2 + E_3)/\sqrt{3}$ до начала координат.

Поверхность \mathcal{C} обладает симметрией относительно трех плоскостей, проходящих через координатные оси и линию, равнонаклоненную к осям координат, что следует из симметрии уравнения (2) относительно E_1, E_2, E_3 . Будем изображать процессы деформирования частиц идеального жесткопластического материала линиями L , расположенными на поверхности \mathcal{C} .

Условия разрушения (деформационно-энергетические критерии). С точки зрения идеального жесткопластического тела условия разрушения должны содержать величины, входящие в определяющие уравнения модели, тензоры деформаций и напряжений и их производные по пространственным переменным и времени:

$$\Phi_k(E_{ij}, e_{ij}, s_{ij}, \dots) = 0 \quad (k = 1, \dots, N),$$

где Φ_k – изотропные функции тензорных аргументов; N определяется моделью разрушения.

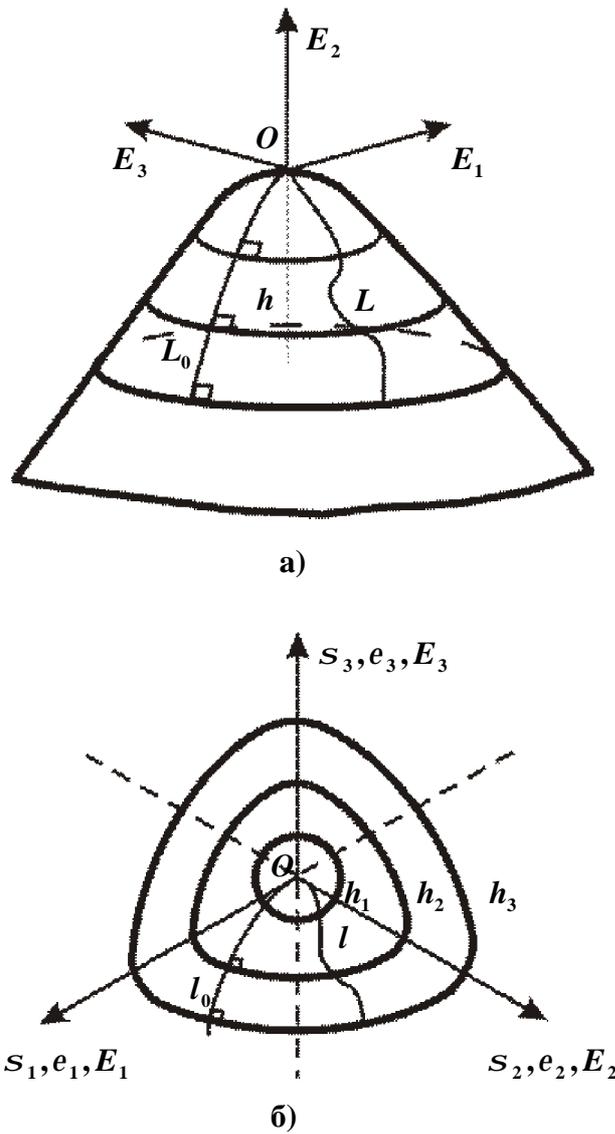


Рис. 5: а) поверхность деформационных состояний; б) проекция поверхности состояний на девиаторную плоскость

Стандартные экспериментальные исследования по растяжению плоских и цилиндрических образцов показывают, что разрушение материалов происходит при определенных деформациях. При этом определяемые характеристики разрушения (относительное удлинение и сужение образца при разрушении) могут служить основой для вычисления соответствующих значений E_i^* . Эти эксперименты определяют минимальную систему точек на поверхности \mathcal{E} , которая может быть аппроксимирована некоторой кривой

$$\begin{cases} \Phi(E_1, E_2, E_3) = 0, \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Это позволяет постулировать, что при пересечении линии (3) кривой, соответствующей процессу деформирования, происходит разрушение материала.

В качестве аппроксимирующих кривых естественный интерес представляют линии уровня

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 + E_3 = H, \quad (H = \sqrt{3}h), \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

так как эти линии всегда пересекаются меридиональными процессами деформирования и, в частности, кривыми, соответствующими стандартным испытаниям на одноосное растяжение-сжатие. Поэтому положение кривой (4) с определенной степенью приближения может быть получено экспериментально для каждого конструкционного материала.

Вместе с тем известно, что даже при небольших циклически изменяющихся пластических деформациях при соответствующем числе циклов деформирования происходит разрушение практически всех материалов (малоцикловая усталость). Поэтому в уравнениях (4) должны быть включены параметры, учитывающие историю деформирования частиц материала. Одним из основных параметров истории деформирования является удельная диссипация энергии, совершенная частицей, вдоль всего пути S движения частицы:

$$D = \int_S e_{ij} s_{ij} dt.$$

Уравнения (4) при этом примут вид:

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + E_3 = H(D), \\ (1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения (5) означают, что критическая линия уровня, определяющая момент разрушения каждой частицы, приближается к недеформированному состоянию в процессе пластического деформирования соответственно диссипации энергии. Функция $H(D)$ должна быть определена экспериментально.

Особенность подхода состоит в локальном использовании жесткопластического анализа пластических течений в окрестнос-

ти зон локализации пластических деформаций.

Возможность такого анализа обусловлена результатами исследований, приведенных в [1–6].

Преимущества предлагаемого подхода. Предлагаемый подход:

1) подтверждается корректным использованием экстремальных принципов неравновесной термодинамики;

2) обеспечивает возможность формулировки критериев выбора предпочтительного пластического течения (иерархии решений), например, в следующем виде: реализуется такое пластическое течение, при котором максимальная удельная диссипация энергии минимальна;

3) обеспечивает возможность формулировки критериев разрушения, согласованных с п. 4: разрушение материала происходит при достижении удельной диссипации энергии в частице материала критического значения;

4) позволяет рассчитывать предельные значения полей тензоров деформаций и

удельной диссипации энергии в окрестности концентраторов деформации.

Список литературы

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. - Владивосток: Дальнаука, 1998.

2. Хромов А. И. Деформация и разрушение жесткопластических тел. - Владивосток: Дальнаука, 1996.

3. Хромов А. И., Козлова О. В. Разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения. - Владивосток: Дальнаука, 2005.

4. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций // ДАН. - 2006. - Т. 407. - № 6. - С. 777-781.

5. Хромов А. И., Кочеров Е. П., Григорьева А. Л. Деформационные состояния и условия разрушения жесткопластических тел // ДАН. - 2007. - Т. 4. - № 413. - С. 481-485.

6. Кочеров Е. П., Хромов А. И. Деформационные состояния и разрушение идеальных жесткопластических тел // Вестник СамГТУ. - 2006. - № 42. - С. 66-71.

NUMERICAL-AND-ANALYTICAL METHODS OF DEFORMATION CALCULATION AND EVALUATION OF STRUCTURAL MEMBER STRENGTH IN MECHANICAL ENGINEERING

© 2007 Ye. P. Kotcherov

Joint-Stock Company «Samara Mechanical Engineering Design Bureau»

The paper deals with various approaches to calculating deformation fields in plastic deformation localization areas (deformation concentrators), including those based on rigid plastic analysis. Algorithms of incorporating rigid plastic superelements into familiar program packages like MSC, ANSYS are proposed. Limiting values of deformation tensor field are calculated. An approach to evaluating structural member strength is proposed.