

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТОВ МЕЖДУ НЕКОМПЛАНАРНЫМИ КРУГОВЫМИ ОРБИТАМИ С ДВУХСТУПЕНЧАТЫМ РАЗГОННЫМ БЛОКОМ С ХИМИЧЕСКИМ И ЭЛЕКТРОРЕАКТИВНЫМ ДВИГАТЕЛЯМИ

© 2007 П. В. Фадеенков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается перелет между начальной низкой и целевой высокой некопланарными круговыми околоземными орбитами. Разгонные блоки, доставляющие полезную нагрузку на целевую орбиту, имеют следующие схемы: одноступенчатую и двухступенчатую с химическим ракетным двигателем, одноступенчатую с электроракетным двигателем, комбинированную двухступенчатую с химическим и электроракетным двигателями.

На основе процедур усреднения и принципа максимума для частного случая совместного расположения орбит и размещения активного участка на витке получен оптимальный закон изменения угла отклонения вектора тяги от плоскости орбиты. Использование этого закона и аналитических выражений позволяет свести сложную оптимизационную задачу о максимуме полезной нагрузки к более простой задаче поиска условного экстремума функции пяти переменных.

Проведен сравнительный анализ разгонных блоков различных схем по времени перелета и по массе полезной нагрузки. Определены преимущества комбинированного разгонного блока.

Среди целевых высоких круговых орбит спутников Земли можно выделить геостационарную орбиту и орбиты спутников системы радионавигации. С одной стороны, миниатюризация современных спутников позволяет отказаться от использования мощных ракет-носителей и обратить внимание на баллистические ракеты, которые можно отнести к ракетам среднего и малого класса, а с другой стороны, существующими ракетами-носителями можно выводить группы спутников. В обоих случаях требуется провести исследования энергетических возможностей разгонных блоков (РБ) космических аппаратов (КА), под которыми будем понимать полезную нагрузку (ПН) и РБ.

Рассмотрим РБ, состоящий из двух ступеней. Первая ступень представляет уменьшенный вариант одного из существующих РБ («Фрегат», «Бриз» и т.п.), в котором двигательная установка (ДУ) с химическим ракетным двигателем (ХРД) остается без изменений, а изменения вносятся в систему хранения топлива:

1) уменьшается размер баков и объем топлива, что требует конструктивных изменений;

2) РБ заправляется меньшим количеством топлива без конструктивных изменений.

Первая ступень выполняет перелет с начальной низкой круговой орбиты на промежуточную эллиптическую орбиту и после выполнения маневра отделяется от РБ.

Вторая ступень состоит из блока с электроракетным двигателем (ЭРД) малой тяги (МТ), системы подачи и хранения топлива и энергетической установки (ЭУ). В качестве ЭУ рассматривается ядерный источник энергии как стабильно работающий на продолжительных интервалах времени. Вторая ступень выполняет перелет с промежуточной орбиты на конечную и после выполнения своей задачи остается в составе КА, что позволяет использовать ЭУ для работы целевой аппаратуры, а двигатели - для коррекции целевой орбиты.

Наличие ЭУ делает возможным использование на первой ступени ДУ с подогревом топлива, которая характеризуется средними значениями скорости истечения рабочего тела (РТ) по сравнению с ХРД и ЭРД.

В качестве критерия оптимальности перелета между начальной и целевой некопланарными соосными круговыми орбитами выберем массу ПН при фиксированной массе КА и заданном времени перелета.

Запишем уравнение масс:

$$M_0 = M_{ПН} + \sum_{i=1}^2 (M_i^D + M_i^B + M_i^{PT}) + M_{ЭУ}, \quad (1)$$

где M_0 – масса КА на начальной орбите; $M_{ПН}$ – масса ПН; M_i^D, M_i^B, M_i^{PT} – соответственно массы двигателя, баков и рабочего тела i -го РБ; $M_{ЭУ}$ – масса ЭУ.

Выразим массы, входящие в (1), через проектные и баллистические параметры с помощью удельных массовых характеристик, используя соотношения [1]:

$$\begin{aligned} M_{ПН} &= m_{ПН} \cdot M_0, \\ M_i^D &= g_i^D \cdot P_i^m, \\ M_i^B &= g_i^B \cdot M_{РТ}, \\ M_i^{PT} &= \int_{t_{0i}}^{t_{xi}} d_i q_i dt, \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_{ЭУ} = g_{ЭУ} \cdot N_{max}.$$

Здесь $m_{ПН}$ – относительная масса ПН; P_i^m – максимальное значение тяги двигателей; $g_i^D, g_i^B, g_{ЭУ}$ – соответственно удельные массовые характеристики двигателей, баков и ЭУ; $d_i = \{0,1\}$ – функция включения маршевых двигателей; q_i – секундный расход РТ;

t_{0i}, t_{xi} – соответственно время начала и окончания работы; N_{max} – максимальная полезная мощность ЭУ; индекс i обозначает номер ступени РБ.

Массу рабочего тела можно выразить через формулу Циолковского, если функция включения слабо зависит от конструктивных характеристик:

$$M_i^{PT} = M_{0i} \cdot (1 - e^{-\frac{V_{xi}}{C_i}}), \quad (3)$$

где V_{xi}, C_i – соответственно затраты характеристической скорости на перелет и скорость истечения РТ i -й ступени РБ.

Для случая, когда первая ступень РБ заправляется меньшим количеством топлива, массу баков и двигателя можно считать постоянной:

$$M_1^D + M_1^B = const. \quad (4)$$

Сравним проигрыш по $M_{ПН}$ данного варианта с вариантом, когда размер баков уменьшается. Подставив (3) и (4) в (1), получим зависимости массы ПН от затрат характеристической скорости для ракеты-носителя «Союз» и РБ «Фрегат» (рис. 1). Из рис. 1 следует, что для перелета с низкой орбиты на геостационарную ($V_x = 4,212$ км/с) проигрыш по массе достигает 100 кг.

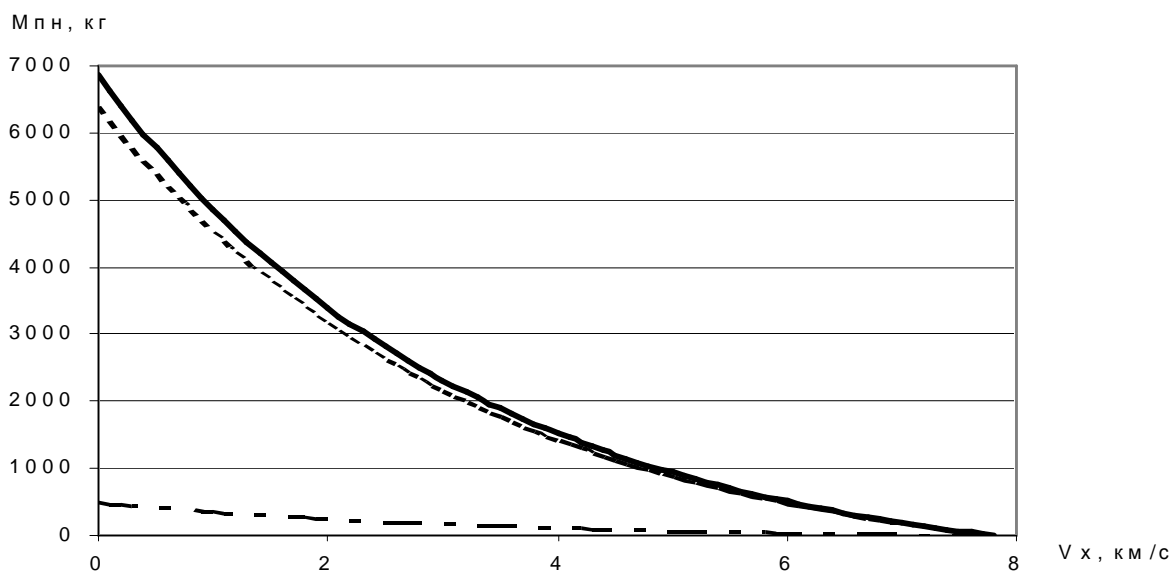


Рис. 1. Зависимость массы ПН от затрат характеристической скорости на перелет

— $M_{ПН}$ для изменяемых баков, $M_{ПН}$ для неизменяемых баков, - · - · разница в $M_{ПН}$

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать вариант с конструктивными изменениями первой ступени РБ с ХРД.

Для второй ступени с ЭРД масса ДУ может варьироваться в широких пределах без существенных конструктивных изменений. Будем считать, что максимальное значение тяги двигателей P^m , скорость истечения РТ и максимальная полезная мощность N_{max} постоянны. Используя формулу (3) и соотношения, приведенные в [1], можно выразить тягу и мощность через скорость истечения РТ, моторное время и затраты характеристической скорости.

Таким образом, разделив левую и правую части (1) на M_0 , получим выражение для относительной массы ПН, универсальное для стартовой массы КА на начальной орбите:

$$m_{ПН} = \left\{ 1 - g_{ХРД}^D - \left(1 - e \frac{V_{ХРД}^x}{C_{ХРД}} \right) \cdot \left(1 + g_{ХРД}^B \right) \right\} \times \left\{ 1 - \left(1 - e \frac{V_{ЭРД}^x}{C_{ЭРД}} \right) \cdot \left(1 + g_{ЭРД}^B + \frac{C_{ЭРД}}{T_m} \cdot [g_{ЭРД}^D + C_{ЭРД} \cdot g_{ЭУ}] \right) \right\}. \quad (5)$$

Здесь $m_{ПН}$ - масса ПН, отнесенная к массе КА на начальной орбите; g^D, g^B, V^x, C - соответственно удельные массы двигателя и баков, затраты характеристической скорости, скорость истечения РТ; нижний индекс обозначает тип двигателя - ХРД и ЭРД, соответственно; $g_{ЭУ}$ - удельная масса ЭУ; T_m - моторное время работы двигателей ЭРД.

Удельные массовые характеристики и $C_{ХРД}$ заданы. $V_{ХРД}^x$ для перелета с начальной низкой круговой орбиты на промежуточную высокую эллиптическую орбиту с изменением наклона определим по формулам импульсной теории [2]. $V_{ЭРД}^x$ для перелета с промежуточной орбиты на конечную высокую круговую орбиту рассчитаем по выражениям, приведенным в [3, 4, 5].

Получим расчетные формулы для случая многовиткового перелета с активным участком на витке, симметрично расположенным

относительно одной из апсидальных точек, при ориентации вектора тяги по трансверсали. Особенность исследуемой задачи состоит в продолжительном активном участке при управлении, приводящем к совместному изменению большой полуоси, эксцентриситета и наклона.

Примем, что возмущения от несферичности Земли, атмосферы и других факторов отсутствуют. Тогда система уравнений движения имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2\sqrt{\frac{A^3}{m(1-e^2)}} [a_x(1+e\cos J) + a_y e \sin J] \\ \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left\{ a_y \sin J + a_x \left[\left(1 + \frac{1}{1+e\cos J} \right) \cos J + \frac{e}{1+e\cos J} \right] \right\}, \\ \frac{di}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \frac{a_z \cdot \cos u}{1+e\cos J}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \frac{a_z \cdot \sin u}{(1+e\cos J) \cdot \sin i}, \\ \frac{dw}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left[-a_y \frac{\cos J}{e} + \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e\cos J} \right) \sin J - a_z \cdot e \cdot \frac{\sin u \cdot \operatorname{ctgi}}{1+e\cos J} \right], \\ \frac{dJ}{dt} &= \sqrt{\frac{A(1-e^2)}{m}} \left[\frac{m(1+e\cos J)^2}{A^2(1-e^2)^2} + a_y \frac{\cos J}{e} - \frac{a_x}{e} \left(1 + \frac{1}{1+e\cos J} \right) \sin J \right], \\ \frac{dV_x}{dt} &= a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a_0 \exp\left(\frac{V_x}{C}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

где A, e, i, W, w, u, u - элементы орбиты; V_x - характеристическая скорость; a_0 - начальное ускорение; C - скорость истечения рабочего тела; m - гравитационная постоянная; a_x, a_y, a_z - составляющие реактивного ускорения в связанной системе координат.

Для заданного управления и принятых допущениях получим:

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos q, \\ a_y &= a \sin q, \\ a_z &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь q - угол отклонения вектора тяги ДУ от плоскости орбиты; d - функция включения двигателей:

- центр активного участка в перигее

$$d = \begin{cases} 1, & -a \leq u \leq a, \\ 0, & a \leq u \leq 2p - a, \end{cases} \quad (8)$$

- центр активного участка в апогее

$$d = \begin{cases} 1, p - a \leq u \leq p + a, \\ 0, a - p \leq u \leq p - a, \end{cases} \quad (9)$$

где a - половина ширины разгонного участка.

Согласно (7) в моменты $u = p/2$ направление тяги меняется на симметричное относительно плоскости орбиты.

Примем, что оси аписид промежуточной и конечной орбит совпадают с линиями узлов и лежат в плоскости экватора:

$$w_0 = 0, \quad (10)$$

где w_0 - аргумент перигея в начальный момент времени.

Перейдем к новой независимой переменной – эксцентрисической аномалии E , приняв, что использование МТ не приводит к существенному уходу оси аписид:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{m}{A^3}} (1 - e \cdot \cos E)^{-1}. \quad (11)$$

Общая формула процедуры усреднения имеет вид

$$\frac{d\tilde{x}}{dE} = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} \frac{dx}{dE} dE, \quad (12)$$

где x - фазовая переменная, \tilde{x} - усредненная фазовая переменная.

Подставим в (12) угол a , который будем отсчитывать по эксцентрисической аномалии и считать постоянным. Тогда формула процедуры усреднения в зависимости от положения центра активного участка преобразуется:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dE} &= \frac{1}{2p} \int_{-a}^a \frac{dx}{dE} dE - \text{для перигея,} \\ \frac{d\tilde{x}}{dE} &= \frac{1}{2p} \int_{p-a}^{p+a} \frac{dx}{dE} dE - \text{для апогея.} \end{aligned} \quad (13)$$

Момент изменения тяги на симметричное направление относительно плоскости орбиты определяется соотношением

$$E_{nep} = \arccos(e) = \arcsin \sqrt{1 - e^2}. \quad (14)$$

Проведем процедуру усреднения и получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dE} &= \frac{2}{2p} a \cdot \cos q \frac{A^3}{m} \sqrt{1 - e^2} \cdot 2a, \\ \frac{de}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \cos q \frac{A^2}{m} \sqrt{1 - e^2} \left(\pm 4 \sin a - 3ea - \frac{e \cdot \sin 2a}{2} \right), \\ \frac{di}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \sin q \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} f_1(e, a), \\ \frac{d\Omega}{dE} &= 0, \\ \frac{dw}{dE} &= 0, \\ \frac{dV_x}{dE} &= \frac{1}{2p} a \cdot \sqrt{\frac{A^3}{m}} (2a + 2e \sin a), \end{aligned} \quad (15)$$

где “+” перигей, “-” апогей.

Для уравнения, описывающего изменение наклона i в (15), имеются следующие соотношения:

- импульсы прикладываются в перигее:

$$f_1(e, a) = \begin{cases} a < E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \left(2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) \right) \\ a > E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \left(2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) - \right. \\ & \left. 2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (2 + e^2) + 6 \cdot e \cdot \arccos(e) \right) \end{cases} \quad (16)$$

- импульсы прикладываются в апогее:

$$f_1(e, a) = \begin{cases} a < p - E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \cdot \left(-2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) \right) \\ a > p - E_{nep}, & \frac{1}{2p} a_0 \cdot \exp\left(-\frac{V_x}{C}\right) \cdot \sin q \times \\ & \frac{A^2}{m \sqrt{1 - e^2}} \cdot \left(-2 \sin a (1 + e^2) - e \cdot \left(3a + \frac{\sin 2a}{2} \right) + \right. \\ & \left. 2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot (2 + e^2) - 6 \cdot e \cdot \arccos(e) + \right. \\ & \left. + 6 \cdot e \cdot p \right) \end{cases} \quad (17)$$

Первые два уравнения в (15) могут быть проинтегрированы:

$$A \cdot (\sin a \pm e \cdot k_1)^{\frac{a}{k_1}} = const, \quad (18)$$

$$k_1 = \frac{3}{4}a + \frac{\sin 2a}{8},$$

где “+” апогей, “-” перигей.

Для импульсных перелетов формула (18) преобразуется к полученной ранее в [6]:

$$A \cdot (1 \pm e) = const, \quad (19)$$

что означает постоянство радиуса орбиты в апсидальной точке, которая соответствует центру активного участка.

Определим оптимальную программу изменения угла $|q|$.

Система (15) может быть сокращена на три уравнения, поскольку эксцентрическая аномалия, отсутствуя в уравнениях и не влияя на управление, может быть исключена. Перейдем к новой независимой переменной V_x :

$$\frac{dA}{dV_x} = 2 \cdot \cos q \cdot \sqrt{\frac{A^3}{m}} \cdot \sqrt{1-e^2} \cdot \frac{a}{a+e \cdot \sin a}, \quad (20)$$

$$\frac{di}{dV_x} = \sin q \cdot \sqrt{\frac{A}{m \cdot (1-e^2)}} \cdot f_1(e, a).$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина составим гамильтониан системы

$$H = \frac{dA}{dV_x} \Psi_A + \frac{di}{dV_x} \Psi_i - \Psi_{V_x}, \quad (21)$$

где $\Psi_e, \Psi_i, \Psi_{V_x}$ - сопряженные множители.

Уравнения для сопряженных множителей имеют вид

$$\dot{\Psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial i} = 0,$$

$$\dot{\Psi}_{V_x} = -\frac{\partial H}{\partial V_x} = 0, \quad (22)$$

$$\dot{\Psi}_A = -\frac{\partial H}{\partial A}.$$

Из (22) следует, что два сопряженных множителя постоянны на всей оптимальной траектории, а уравнение для третьего множителя представляется сложной зависимостью.

Управление определится в явном виде

из условия $\frac{\partial H}{\partial q} = 0$:

$$ctg q = \frac{2 \cdot A \cdot (1-e^2) \cdot a \cdot \Psi_A}{(a+e \cdot \sin a) \cdot f_1(e, a) \cdot \Psi_i}. \quad (23)$$

Подставив (20) и (23) в (21), учитывая, что из (22) следует $\Psi_i = const$, получим выражение относительно синуса угла:

$$\frac{1}{\sin q} \cdot \sqrt{\frac{A}{m \cdot (1-e^2)}} \cdot f_1(e, a) = const. \quad (24)$$

Как следует из (24), управление зависит только от фазовых переменных e и A , и поэтому после подстановки (24) в (15) исходная система может быть проинтегрирована.

Перелет по предлагаемой схеме по сравнению с перелетом при раздельном изменении параметров орбиты осуществляется с меньшими затратами рабочего тела [7].

Таким образом, задавая параметры промежуточной орбиты, на которой происходит отделение первой ступени РБ и начинается работа второй ступени, можно рассчитать затраты характеристической скорости для каждой из ступеней РБ.

Если ширина активного участка остается постоянной во время выполнения маневра, то моторное время T_m связано с временем

перелета T соотношением $T_m = \frac{a}{p} \cdot T$. Для

случая непрерывной работы двигателей второй ступени РБ времена T_m и T совпадают. Будем считать, что время перелета с начальной орбиты на промежуточную существенно меньше, чем время на многовитковый перелет с промежуточной орбиты на конечную.

Таким образом, выражение (5) зависит от параметров промежуточной орбиты A, e, i , ширины активного участка a и времени на перелет T , и исходная задача поиска максимальной массы полезного груза сводится к

задаче поиска максимума (5) в общем случае по пяти переменным. Такая задача может быть решена только численно.

Проведено моделирование перелета с низкой круговой орбиты высотой 200 км на геостационарную орбиту высотой 36000 км с разницей наклона $51,7^\circ$, с заданным временем перелета в интервале от 40 до 160 суток с шагом в одни сутки. Зависимости относительной массы ПН для различных РБ приведены на рис. 2:

1) перелет с одноступенчатым РБ с ХРД (традиционная схема);

2) перелет с двухступенчатым РБ с ХРД на каждой ступени;

3) перелет с одноступенчатым РБ с ЭРД;

4) перелет с двухступенчатым комбинированным РБ с ХРД и ЭРД.

Анализ результатов, приведенных на рис. 2, позволяет сделать следующие выводы:

1) комбинированный РБ предпочти-

тельнее использовать при времени перелета от 46 суток по сравнению с РБ традиционной схемы (точка пересечения графиков 1 и 4) или от 62 суток по сравнению с возможной двухступенчатой схемой РБ с ХРД (точка пересечения графиков 2 и 4) и до 146 суток по сравнению с одноступенчатым РБ с ЭРД (точка пересечения графиков 3 и 4);

2) одноступенчатый РБ с ЭРД предпочтительнее использовать при времени перелета, превышающим 128 суток по сравнению с одноступенчатым РБ с ХРД (точка пересечения графиков 1 и 3) и 135 суток по сравнению с двухступенчатым РБ с ХРД (точка пересечения графиков 2 и 3);

3) максимальный выигрыш в массе ПН при использовании комбинированного РБ с ХРД и ЭРД составляет 29 % по сравнению с одноступенчатым РБ с ХРД, 13 % по сравнению с двухступенчатым РБ с ХРД и более чем в два раза по сравнению с одноступенчатым РБ с ЭРД.

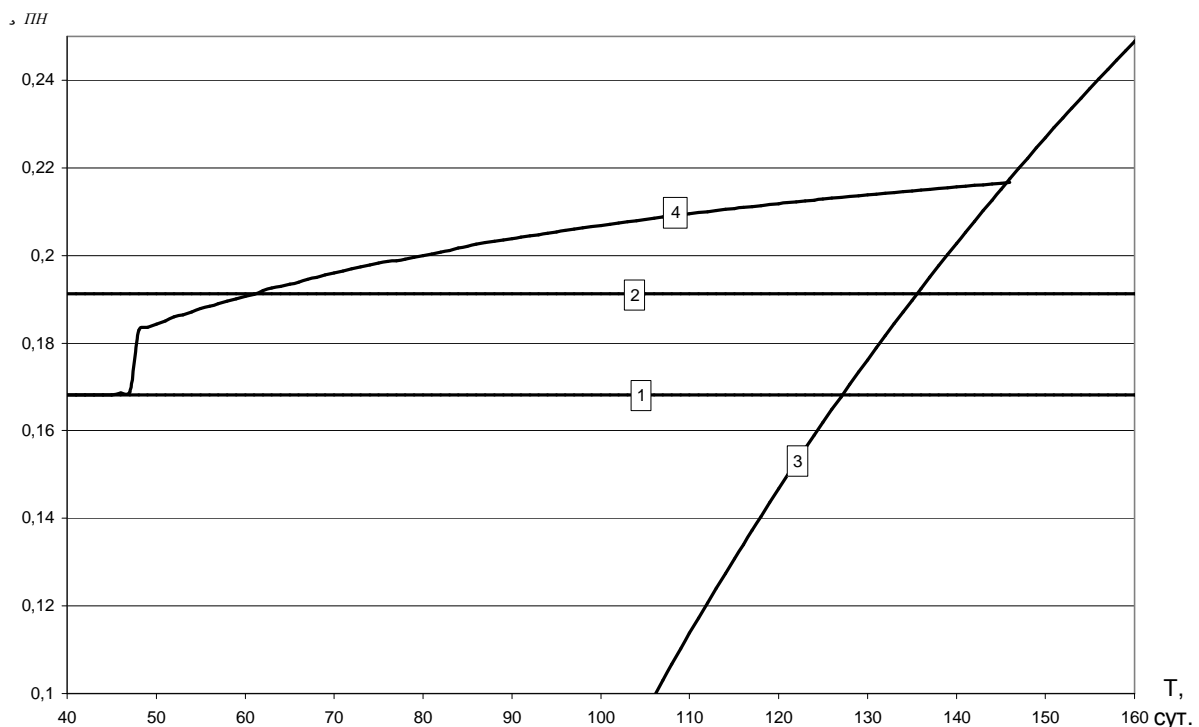


Рис. 2. Графики зависимостей относительной массы полезного груза от времени перелета для различных РБ

Список литературы

1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. - М.: Наука, 1975.

2. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю. Г. Основы механики космического полета. - М.: Наука, 1990.

3. Лебедев В. Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой // Математические методы в динамике космических аппаратов. - М. – 1968. - Вып.5.

4. Ишков С. А., Романенко В. А. Формирование и коррекция высокоэллиптической орбиты спутника Земли с двигателем малой тяги // Космические исследования. - 1997. Т. XXXVI. - Вып.2. – С. 11-20.

5. Ишков С. А. Расчет оптимальных межорбитальных перелетов с малой тягой между круговой и эллиптической орбитами // Космические исследования. - 1997. Т. XXXVI. - Вып.2. – С. 1-10.

6. Фадеенков П. В., Ишков С. А. Баллистическое обоснование применения двигате-

лей ограниченной тяги для формирования энергоемких орбит // Сб. тр. IX Всерос. научно-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Ч. 1/Самарский филиал Российской Академии космонавтики. - Самара, 1999. – С. 144-148.

7. Фадеенков П. В. Оптимизация перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами с двигателями малой тяги // Сб. тр. XIII Всерос. научно-техн. семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Ч. 1/ Самарский филиал Российской академии космонавтики. - Самара, 2007. – С. 193-197.

OPTIMIZATION OF FLIGHTS BETWEEN NON-COPLANAR CIRCULAR ORBITS WITH A TWO-STAGE BOOSTER WITH CHEMICAL AND ELECTROJET ENGINES

© 2007 P. V. Fadeyenko

Samara State Aerospace University

The paper deals with a flight between the non-coplanar circular near-earth orbits – the initial low orbit and the target high one. Boosters delivering payload to the target orbit are: one-stage and two-stage with a chemical rocket engine, one-stage with an electrorocket engine or combined two-stage with a chemical and an electrocket.

The optimal law of changing the angle of thrust vector deviation from the orbit plane is obtained on the basis of averaging procedures and maximal principle for a particular case of the orbits' relative position and location of the active site on the loop. The use of this law and analytical expressions makes it possible to reduce the complicated optimization task of payload maximum to a simpler task of searching five-variable function conditional extremum.

Comparative analysis of various kinds of boosters according to the time of flight and the mass of payload is given. The advantages of a combined booster are defined.