УДК 629.78

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГИПЕРЗВУКОВОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА ЭТАПЕ РАЗГОНА-НАБОРА ВЫСОТЫ В АТМОСФЕРЕ

© 2007 А. А. Бебяков

Самарский государственный аэрокосмический университет

Методом принципа максимума решается задача оптимального управления движением центра масс гиперзвукового летательного аппарата (ГЛА) из условия минимума расхода топлива.

Постановка задачи оптимизаци

Постановка рассматривается в форме вариационной задачи Майера [1]. За критерий оптимизации принято количество израсходованного топлива m_T на активном участке полета, выражаемое функционалом

$$m_T = m(t_к) - m(t_н), \qquad (1)$$

где m - масса ГЛА; $t_н, t_к$ - моменты времени начала и окончания движения, соответственно.

Движение ГЛА моделируется как невозмущенное движение материальной точки в вертикальной плоскости с постоянным и максимальным расходом топлива.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{V} = \frac{I_{уд}(h,M)b}{m} cos\,a - C_{xa}(a,M)\frac{r(h)V^2}{2m}S - g\,sinq,\\
&\dot{q} = \frac{1}{V}\left(\frac{I_{уд}(h,M)b}{m} sin\,a + C_{ya}(a,M)\frac{r(h)V^2}{2m}S - g\,cosq\right) +\\
&\quad + \frac{V\,cosq}{R+h},\\
&\dot{h} = V\,sinq,\\
&\dot{m} = -b,
\end{aligned} \qquad (2)$$

где V - скорость, q - угол наклона траектории, h - высота полета, a - угол атаки, b - расход топлива, M - число Маха, r - плотность атмосферы, S - характерная площадь, g - ускорение свободного падения, R - радиус Земли, $I_{уд}$ - удельный импульс, C_{xa}, C_{ya} - коэффициенты силы лобового сопротивления и аэродинамической подъемной силы, соответственно.

Граничные условия движения записываются в виде

$$\begin{aligned}
&t = t_н: \; V = M_н \cdot a(h_н), \quad q = q_н, \quad h = h_н, \quad m = m_н;\\
&t = t_к: \; V = M_к \cdot a(h_к), \quad q = q_к, \quad h = h_к,
\end{aligned} \qquad (3)$$

где $M_н$, $M_к$, $q_н$, $q_к$, $h_н$, $h_к$, $m_н$ - заданные числа, a - скорость звука.

В качестве функции управления принята зависимость угла атаки от времени с ограничениями вида

$$a_{\min} \le a(t) \le a_{\max}. \qquad (4)$$

Физическая постановка: требуется определить управление углом атаки, обеспечивающее минимальные затраты топлива при движении ГЛА на этапе разгона-набора высоты.

Математическая постановка: требуется определить программу управления $a(t)$ с ограничениями (4) для системы уравнений (2) с граничными условиями (3), доставляющую минимум функционалу (1).

Постановка краевой задачи

Для решения поставленной задачи применяется принцип максимума Понтрягина.

Функция Гамильтона H для системы (2) имеет вид

$$H = y_V\left[\frac{I_{\text{уд}}b}{m}cos a - C_{xa}\frac{rV^2}{2m}S - g sin q\right] +$$
$$+\frac{y_q}{V}\left[\frac{I_{уд}b}{m}sin a + C_{ya}\frac{rV^2}{2m}S - g cos q + \frac{V^2 cos q}{R+h}\right] +$$
$$+ y_h V sin q - y_m b,$$

где y_V, y_q, y_h, y_m - сопряженные переменные, соответствующие фазовым координатам системы (2).

Согласно принципу максимума, необходимыми условиями минимума функционала (1) являются:

- условие максимума функции H по заданному управлению на заданном промежутке времени

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}, a) = \max_{a \in A} H, \; t \in [t_н, t_к], \tag{5}$$

где $\boldsymbol{x} = \{V, q, h, m\}$ - вектор фазовых координат или вектор состояния ГЛА; $\boldsymbol{\psi} = \{y_V, y_q, y_h, y_m\}$ - вектор сопряженных переменных; A - область определения управления, задаваемая (4);

- условие трансверсальности в начальный и конечный моменты времени

$$[\boldsymbol{\psi} d\boldsymbol{x} - dm - Hdt]_н^к = 0. \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений для сопряженных переменных имеет вид

$$\dot{y}_V = -y_V\left[\frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial M}\frac{b}{ma}cos a - \left(\frac{\partial C_{xa}}{\partial M}\frac{V}{a} + 2C_{xa}\right)\frac{rV}{2m}S\right] +$$
$$+ y_q\left(\frac{I_{\text{уд}}a}{V} - \frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial M}\right)\frac{b}{Vma}sin a -$$
$$- y_q\left[\left(\frac{\partial C_{ya}}{\partial M}\frac{V}{a} + C_{ya}\right)\frac{rS}{2m} + \frac{cos q}{R+h}\right] - y_h sin q;$$
$$\dot{y}_q = y_V g cos q + y_q\left(\frac{V}{R+h} - \frac{g}{V}\right) sin q - y_h V cos q;$$
$$\dot{y}_h = -y_V\left[\left(\frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial h} - \frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial M}\frac{\partial a}{\partial h}\frac{V}{a^2}\right)\frac{b}{m}cos a + \left(\frac{\partial C_{xa}}{\partial M}\frac{\partial a}{\partial h}\frac{V}{a^2}r - \frac{\partial r}{\partial h}C_{xa}\right)\frac{V^2 S}{2m}\right] -$$
$$- y_q\left[\left(\frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial h} - \frac{\partial I_{\text{уд}}}{\partial M}\frac{\partial a}{\partial h}\frac{V}{a^2}\right)\frac{b}{Vm}sin a - \left(\frac{\partial C_{ya}}{\partial h}\frac{\partial a}{\partial h}\frac{V}{a^2}r - \frac{\partial r}{\partial h}C_{ya}\right)\frac{VS}{2m} - \frac{V cos q}{(R+h)^2}\right];$$
$$\dot{y}_m = \frac{y_V}{m^2}\left(I_{уд}b\, cos a - C_{xa}\frac{rV^2}{2}S\right) + \frac{y_q}{m^2 V}\left(I_{уд}b\, sin a + C_{ya}\frac{rV^2}{2}S\right). \tag{7}$$

Условие трансверсальности (6) в начальный момент времени выполняется автоматически, так как начальные значения фазовых координат и момент времени t_n заданы. Для конечного момента времени $t_к$ из (6) с учетом (3) определяются:
граничное условие для системы (7)

$$y_{mк} = 1, \tag{8}$$

а также значение функции Гамильтона в конце траектории

$$H_к = 0. \tag{9}$$

Область определения управления по каналу угла атаки

$$-2^0 \le a \le 10^0.$$

В этом случае (вследствие малых углов атаки) при расчетах используются приближения

$$sin a \approx a, \; cos a \approx 1 - a^2/2. \tag{10}$$

Необходимое условие экстремума функции H по управлению a с учетом (9) имеет вид

$$\frac{\partial H}{\partial a} = -y_V\left[\frac{I_{\text{уд}}b}{m}a + \frac{\partial C_{xa}}{\partial a}\frac{rV^2}{2m}S\right] +$$
$$+\frac{y_q}{V}\left[\frac{I_{\text{уд}}b}{m} + \frac{\partial C_{ya}}{\partial a}\frac{rV^2}{2m}S\right] = 0. \tag{11}$$

Аналитические зависимости аэродинамических коэффициентов от угла атаки записываются в виде

$$C_{xa}(a, M) = C_{xa0}(M) + C_{xa1}(M)a + C_{xa2}(M)a^2;$$
$$C_{ya}(a, M) = C_{ya0}(M) + C_{ya1}(M)a. \tag{12}$$

Тогда с учетом (12) из (11) имеем

$$\overline{a} = \frac{y_q\left[2I_{\text{уд}}b_{max} + C_{ya1}rV^2S\right] - y_V C_{xa1}rV^3S}{2y_V V\left[I_{\text{уд}}b_{max} + C_{xa2}rV^2S\right]}. \tag{13}$$

Программа управления углом атаки (13) является оптимальной только в случае, когда соответствующее значение функции управления доставляет максимум функции *H*. Достаточное условие максимума *H* по управлению имеет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial a^2} = -y_V \left(I_{\text{уд}} b + C_{xa2} r V^2 S \right) < 0 . \qquad (14)$$

Так как коэффициент C_{xa2} положителен, как старший коэффициент параболы, описывающей зависимость коэффициента лобового сопротивления C_{xa} от угла атаки, то выражение в скобках в (14) всегда положительно. Поэтому достаточное условие принимает вид

$$y_V > 0 . \qquad (15)$$

Система уравнений (2), описывающих движение, вместе с сопряженной системой (7) образуют совокупную систему уравнений.

Пусть угол атаки в совокупной системе определяется согласно (13). Тогда система становится замкнутой относительно векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{\psi}$ и вместе с граничными условиями (3), (8) приводит к краевой задаче для системы нелинейных дифференциальных уравнений первой степени.

Таким образом, рассматриваемая задача оптимального управления сводится к следующей четырехпараметрической краевой задаче: требуется найти решение совокупной системы уравнений (2), (7), замкнутой соотношением (13), которое удовлетворяет граничным условиям (3), (8).

Параметрами краевой задачи являются значения сопряженных переменных в начальный момент времени: $y_{Vн}, y_{qн}, y_{hн}, y_{mн}$.

Определение начальных приближений сопряженных переменных

Так как в любой точке временного отрезка, на котором функция *H* достигает максимума, существует первый интеграл совокупной системы *H = const*, то для начального момента времени, согласно (9), можно получить следующее выражение:

$$\psi_{hн} = -\frac{\psi_{Vн}\dot{V}_н + \psi_{qн}\dot{q}_н + \psi_{mн}\dot{m}_н}{\dot{h}} . \qquad (16)$$

Предположим, что в начальный момент времени известно значение оптимального угла атаки. Тогда функция *H* достигает своего максимального значения и выполняется необходимое условие экстремума. Используя (13), получим

$$y_{qн} = y_{Vн} \frac{\left[2 I_{\text{уд}} b\, a_н + (C_{xa1} + 2 C_{xa2} a_н) r V_н^2 S \right]}{2 I_{\text{уд}} b + C_{ya1} r V_н^2 S} . \qquad (17)$$

Таким образом, неизвестными остаются три параметра: $a_н, y_{mн}, y_{Vн}$. Значения параметра $a_н$ выбираются из области определения управления.

Для определения отрезка числовой оси, в котором находится значение $y_{mн}$, примем следующее допущение: масса топлива, затрачиваемого на рассматриваемом участке, при движении по произвольной траектории составляет 10 % от стартовой массы ГЛА.

Следовательно, для определения параметра $y_{mн}$ можно воспользоваться линейным приближением решения соответствующего дифференциального уравнения сопряженной системы (7):

$$\psi_{mн} = \psi_{mк} - \dot{\psi}_m (t_к - t_н) . \qquad (18)$$

Применяя приближенную формулу для коэффициента лобового сопротивления $C_{xa} = C_{xa0} + A C_{ya}^2$, можно показать, что

$$\psi_q \approx \psi_V V a . \qquad (19)$$

Поэтому из последнего уравнения сопряженной системы с учетом (18), (19) и граничного условия в конечный момент времени: $\psi_{mк} = 1$ в качестве начального приближения y_m принимается

$$\psi_{mн} = 1 - sign(\dot{V}_н) m_T / m_н \approx$$
$$\approx 1 - 0.01 \cdot n \cdot sign(\dot{V}_н) \cdot m_н / m_н .$$

Поскольку в начальный момент времени ГЛА должен разгоняться ($\dot V_н > 0$), то отсюда следует, что параметр краевой задачи $y_{mн} \in [0.9,1]$.

Для определения параметра $y_{Vн}$ используется первый интеграл совокупной системы вида

$$(H,L) = const, \tag{20}$$

где $L = \frac{\partial H}{\partial a}\cdot m;$ $\quad (\,,)$ - скобки Пуассона.

Подстановка в (20) соотношения (17) после преобразований дает

$$\left[\frac{df_1(x,a)}{dt}+\frac{df_2(x,a)}{dt}\frac{2I_{уд}ba+\frac{\partial C_{xa}}{\partial a}rV^2S}{2I_{уд}b+\frac{\partial C_{ya}}{\partial a}rV^2S}V\right]y_V = const, \tag{21}$$

где $f_1(x,a)=\left[I_{уд}ba+\frac{\partial C_{xa}}{\partial a}\frac{rV^2}{2}S\right],$

$$f_2(x,a)=-\left[I_{уд}b+\frac{\partial C_{ya}}{\partial a}\frac{rV^2}{2}S\right]\frac{1}{V}.$$

Пусть сопряженная переменная y_V в момент времени t_j определяется по методу Эйлера:

$$y_{Vj}=y_{Vн}+\dot y_{Vн}\Delta t_j, \tag{22}$$

где $\Delta t_j = t_j - t_н$.

Введем обозначение

$$F=\left[\frac{df_1(x,a)}{dt}+\frac{df_2(x,a)}{dt}\frac{2I_{уд}ba+\frac{\partial C_{xa}}{\partial a}rV^2S}{2I_{уд}b+\frac{\partial C_{ya}}{\partial a}rV^2S}V\right]. \tag{23}$$

Тогда, согласно (21) и (22), параметр $y_{Vн}$ определяется как

$$y_{Vн}=\frac{F_j}{F_н-F_j}\dot y_{Vн}\Delta t_j. \tag{24}$$

С учетом уравнения сопряженной системы для $\dot y_V$ (24) запишется в виде

$$y_{Vн}=-\frac{y_{mн}b}{V_н}\frac{F_j\Delta t_j}{F_н-F_j\left(1+G_н\Delta t_j\right)}, \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}G={}&-\left[\frac{\partial I_{уд}}{\partial M}\frac{b}{ma}\cos a-\left(\frac{\partial C_{xa}}{\partial M}\frac{V}{a}+2C_{xa}\right)\frac{rV}{2m}S\right]+\\&+\left\{\left(\frac{I_{уд}a}{V}-\frac{\partial I_{уд}}{\partial M}\right)\frac{b}{Vma}\sin a-\right.\\&\left.-\left[\left(\frac{\partial C_{ya}}{\partial M}\frac{V}{a}+C_{ya}\right)\frac{rS}{2m}+\frac{\cos q}{R+h}\right]\right\}\frac{2I_{уд}ba+\frac{\partial C_{xa}}{\partial a}rV^2S}{2I_{уд}b+\frac{\partial C_{ya}}{\partial a}rV^2S}+\\&+\left[\dot V+\dot q\frac{2I_{уд}ba+\frac{\partial C_{xa}}{\partial a}rV^2S}{2I_{уд}b+\frac{\partial C_{ya}}{\partial a}rV^2S}\right]\frac{1}{V}.\end{aligned}$$

Расчет по формуле (25) проводится следующим образом:

- при $t = t_н$ задаются значения вектора состояния x из граничных условий движения ГЛА, начальное приближение угла атаки $a_н$ из области ограничений на управление и начальное значение сопряженной координаты y_m;

- из решения задачи Коши для системы, описывающей движение ГЛА, определяется значение вектора x в момент времени $t_1 = t_н + h$, где h - шаг интегрирования;

- задается значение производной угла атаки в начальный момент времени $\dot a_н$;

- определяется значение угла атаки a в момент времени t_1 по формуле $a_1 = a_н + \dot a_н \cdot h$;

- методом секущих определяется значение сопряженной переменной y_V в момент времени $t = t_н$:

1) величины $x_н$, x_1, $a_н$, a_1, $y_{mн}$ подставляются в формулу (25), причем $j=1$, $\Delta t_j = h$;

2) по (16) и (17) определяются сопряженные переменные $\psi_{hн}$, $\psi_{qн}$, и на отрезке времени $t \in [t_н, t_1]$ решается задача Коши для совокупной системы;

3) из решения определяется оптимальный угол атаки в момент времени t_1 - $\bar{\alpha}_1$, удовлетворяющий условию максимума функции H, $\alpha_1^k = \bar{\alpha}_1$;

4) определяется значение производной угла атаки в начальный момент времени по формуле: $\dot{\alpha}_н^k = \left(\alpha_1^k - \alpha_н\right)/h$;

5) проверяется условие окончания итерационного процесса

$$\left|\dot{\alpha}_н^k - \dot{\alpha}_н\right| \le \varepsilon , \qquad (26)$$

где ε - малая положительная константа;

6) если (26) не выполняется, то по формуле секущих определяется значение угла атаки α_1^{k+1}, $\alpha_1 = \alpha_1^{k+1}$, k=k+1, и процесс повторяется с пункта 1.

В результате параметрами краевой задачи являются значения угла атаки α, производной угла атаки по времени $\dot{\alpha}$ и сопряженной переменной ψ_m в начальный момент времени, лежащие в отрезках числовой оси:

$$\begin{cases} \alpha_{min} \le \alpha_н \le \alpha_{max}, \\ \dot{\alpha}_{min} \le \dot{\alpha}_н \le \dot{\alpha}_{max}, \\ 0.9 \le \psi_{mн} \le 1. \end{cases}$$

Границы $\dot{\alpha}_{min}$ и $\dot{\alpha}_{max}$ определяются аэродинамическими характеристиками ГЛА.

Расчет оптимальных траекторий и программы управления

В качестве объекта управления рассматривается ГЛА со стартовой массой 300000 кг, выполненный по схеме «бесхвостка» с крылом двойной стреловидности [2] с ракетно-турбинным пароводородным двигателем (РТДп) и стартовой тяговооруженностью μ_0 = 1 [3].

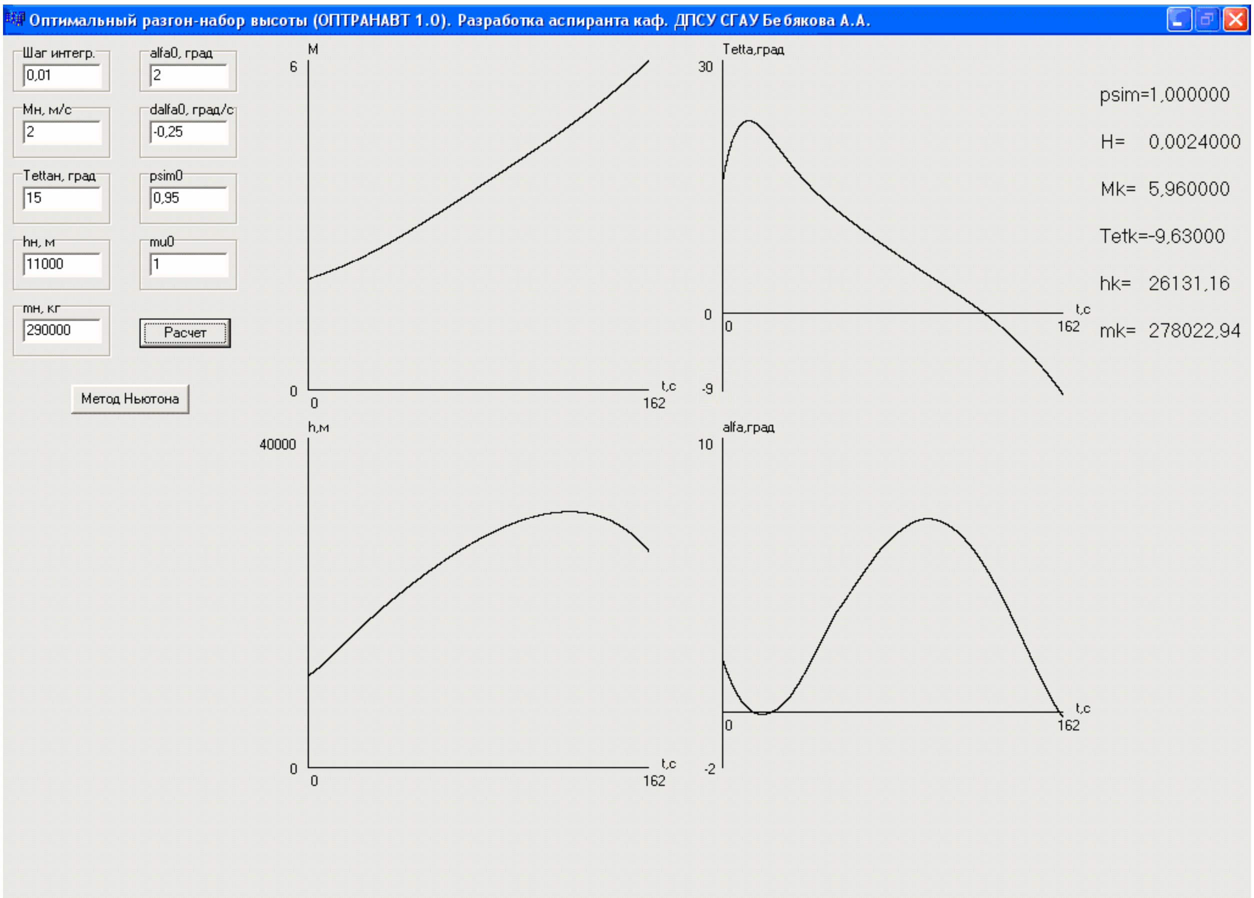

Рис. 1. Скриншот результатов работы программы ОПТРАНАВТ при выборе начальных приближений краевой задачи в интерактивном режиме

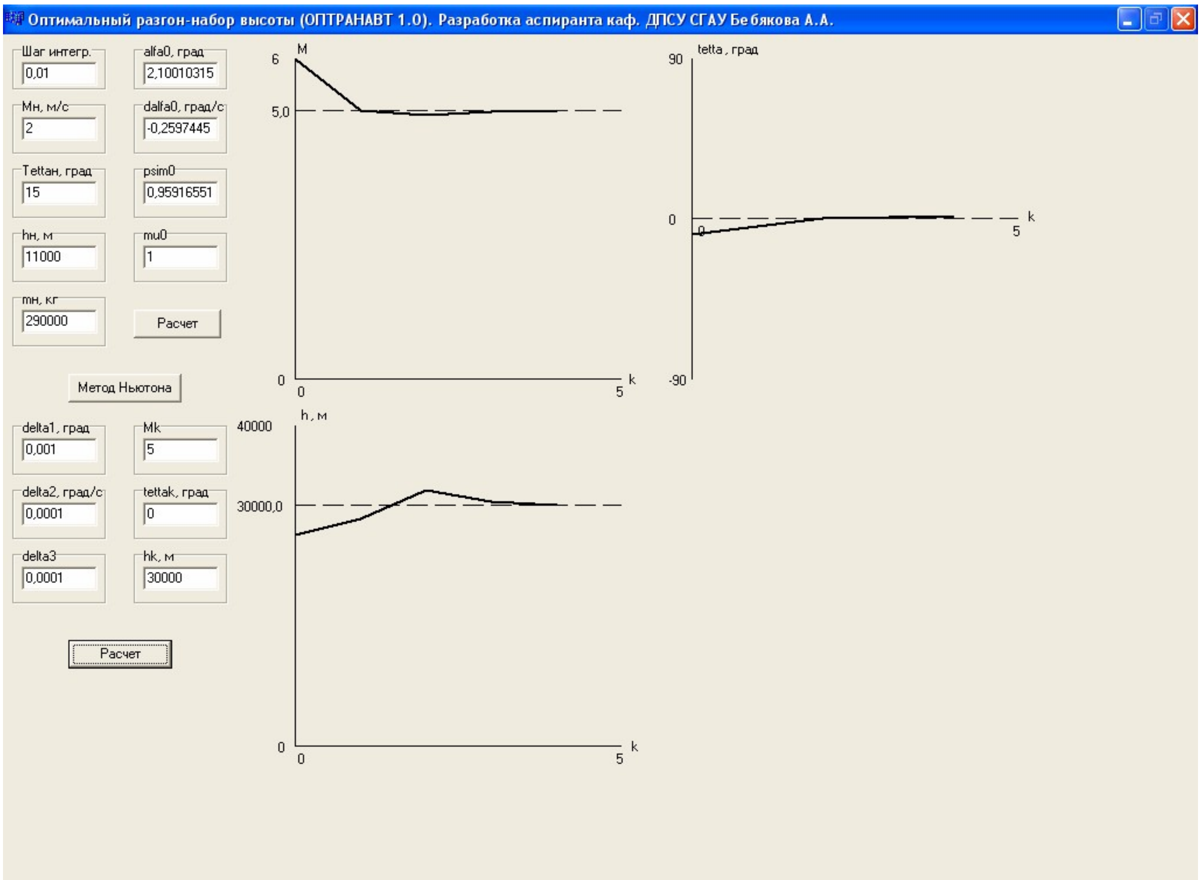

Рис. 2. Скриншот результатов работы программы ОПТРАНАВТ при реализации метода Ньютона

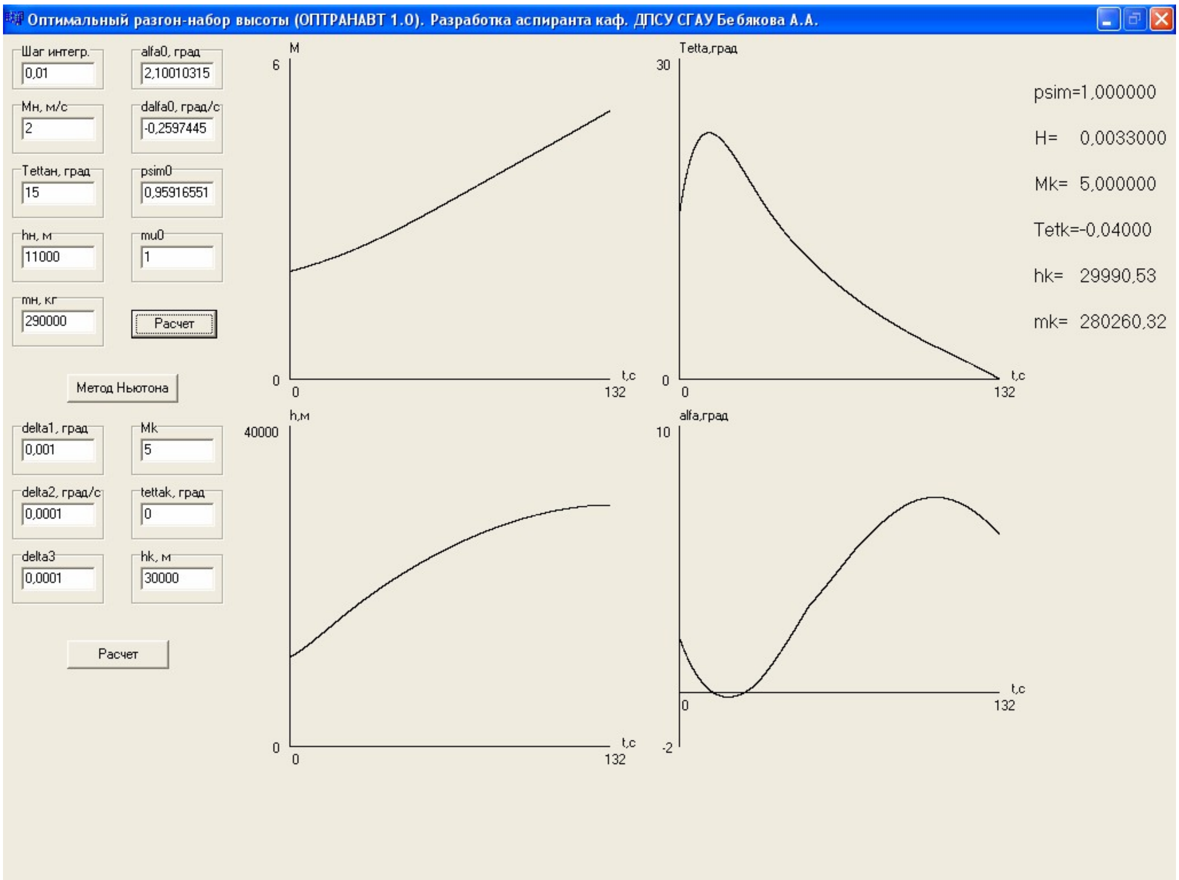

Рис. 3. Скриншот результатов работы программы ОПТРАНАВТ при расчете оптимальных траекторий и программы управления ГЛА

В начальный момент времени принимается положение ГЛА на типовой траектории [2] со следующими граничными условиями (3) для $t = t_н$: $M_н$ = 2, $q_н$ = 15 град, $h_н$ = = 11000 м, $m_н$ = 290000 кг.

В конечный момент времени граничные условия движения задаются на границе гиперзвукового участка для $t = t_к$: $M_к$ = 5, $q_к$ = = 0, $h_к$ = 30000 м.

Для расчета оптимальных траекторий и программ управления углом атаки реализована программа «Оптимальный разгон-набор высоты» (ОПТРАНАВТ) средствами среды программирования Borland C++ Builder 6.0. На рис. 1-3 в качестве примера приведены начальные приближения краевой задачи, выбираемые в интерактивном режиме, решение краевой задачи методом Ньютона и результаты расчетов.

Список литературы

1. Летов А. М. Динамика полета и управление. - М.: Наука, 1969.

2. Нечаев Ю. Н. Силовые установки гиперзвуковых и воздушно – космических летательных аппаратов. - М.: Издание Академии Космонавтики им. К. Э. Циолковского, 1996.

3. Нечаев Ю. Н., Полев А. С., Никулин А. В. Моделирование условий работы пароводородного РТД в составе силовой установки гиперзвукового летательного аппарата / Вестник академии космонавтики: направление фундаментальных и прикладных проблем космонавтики, - материалы научных докладов на заседаниях направления в 1996-1997 гг. - М.: Издание Академии Космонавтики им. К. Э. Циолковского, 1998. - С. 159-191.

THE TASK OF HYPERSONIC AIRCRAFT MOTION OPTIMUM CONTROL AT THE ACCELERATION – CLIMB STAGE IN THE ATMOSPHERE

© 2007 A. A. Bebyakov

Samara State Aerospace University

The task of optimum control of the hypersonic aircraft centre of mass on the condition of minimum fuel consumption is dealt with using the maximal principle method.