ББК У9(2)245

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СТИМУЛИРОВАНИЯ

© 2006 О. В. Павлов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматривается задача стимулирования в динамической системе со связанными периодами функционирования. Приводится математическая постановка задачи. Для решения задачи оптимального управления предлагается численный метод.

Введение

Рассматривается детерминированная динамическая организационная система, состоящая из центра и агента. Агент выполняет действие (производит продукцию), за произведенное действие центр выплачивает материальное вознаграждение. В качестве центра может рассматриваться как управляющая компания, в этом случае агент - дочерняя компания, так и менеджмент предприятия, в этом случае агент – трудовой коллектив. В качестве целевой функции центра рассматривается получение прибыли в долгосрочной перспективе с горизонтом планирования T. Состояние системы описывается параметром x, под которым понимается себестоимость, трудоемкость продукции, несоответствие продукции принятым требованиям. На практике часто используется комплексный параметр x, представляющий комбинации различных показателей с соответствующими весовыми коэффициентами. Рассматривается динамическая организационная система со связанными периодами функционирования.

Задача дальновидного центра состоит в переводе организационной системы из начального состояния x_0 в состояние в конечный момент времени $x(T)$ таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию центра за весь временной период $t = 1, T$. Для этого центр выбирает оптимальную плановую траекторию параметра $x(t)$. С целью выполнения (реализации) этой плановой траектории $x(t)$ центр использует систему стимулирования, при построении которой учитывает горизонт планирования T и дальновидность агента. Целевая функция центра зависит от действий, выбираемых агентом (реакции агента). Под действиями агента понимается выбор фактического параметра $y(t)$. В свою очередь целевая функция агента зависит от системы стимулирования и плановой траектории $x(t)$.

Статическим механизмам управления в организационных системах посвящено большое работ [1-10], в меньшем количестве работ [11-17] рассматриваются динамические механизмы управления.

1. Общая постановка задачи стимулирования динамической организационной системы

Центр реализует программное управление, сообщает агенту плановую траекторию параметра $x(t)$ и функцию стимулирования $a(t)$ за ее выполнение на T временных периодов. Агент, зная плановую траекторию и функцию стимулирования центра, выбирает действие - фактическую траекторию параметра $y(t)$. Считается, что центр и агент обладают дальновидностью и учитывают T периодов функционирования.

Целевая функция центра представляет собой суммарную разность между доходом центра и затратами на стимулирование агента за периоды времени $t = \overline{0,T}$:

$$\Phi(t) = \sum_{t=1}^{T} [H(y(t),t) - s(x(t),y(t),a(t),t)], \tag{1}$$

где $H(y(t),t)$ - доход центра;

$s(x(t),y(t),a(t),t)$ - функция стимулирования центра; $x(t)$ – плановая траектория, выбранная центром; $y(t)$ – фактическая реализация траектории агентом; $a(t)$ - материальное вознаграждение агента, выплачиваемое центром за уменьшение параметра.

Конкретный вид функции дохода центра определяется решаемой задачей. Ниже приводится несколько примеров функции дохода центра.

1. Задача об уменьшении себестоимости продукции:

$$H(y(t),t) = q(t)[p(t) - y(t)],$$

где $q(t)$ – объем выпускаемой продукции, $p(t)$ – цена продукции, $y(t)$ – фактическая себестоимость продукции.

2. Задача об уменьшении трудоемкости продукции:

$$H(y(t),t) = q(t)p(t).$$

3. Задача об увеличении качества продукции (уменьшении дефектов и несоответствий продукции требованиям):

$$H(y(t),t) = q(t)p(t) - gy(t)q^2(t),$$

где $y(t)$ – комплексный параметр, характеризующий количество дефектов и несоответствий продукции; g - коэффициент, переводящий затраты центра в денежное выражение; $gy(t)q^2(t)$ - затраты центра на устранение дефектов и несоответствий продукции.

Функция стимулирования в каждый момент времени t имеет следующий вид:

$$s(y(t),x(t),t) = Z + [x(t) - y(t)]a(t)$$

или

$$s(y(t),x(t),t) = Z + \frac{x(t)}{y(t)}a(t), \qquad (2)$$

где Z – постоянная часть функции стимулирования.

Таким образом, центр стимулирует агента выбирать такие действия, которые приводят к уменьшению параметра $y(t)$. Система стимулирования является пропорциональной: материальное вознаграждение пропорционально усилиям агента по уменьшению фактического параметра $y(t)$ по сравнению с плановым $x(t)$.

Динамика изменения планируемого параметра описывается дискретным уравнением:

$$x(t) = x(t-1) - u(t)x(t-1), \quad x(0) = x_0, \ t = \overline{1,T}, \qquad (3)$$

где $u(t)$ – управляющая функция центра, характеризующая интенсивность уменьшения параметра.

В начальный момент времени известно начальное значение состояние системы

$$x(0) = x_0. \qquad (4)$$

На управление центра наложены ограничения:

$$0 < u(t) < k_u, \qquad (5)$$

$k_u(t)$ - максимально возможное уменьшение параметра агентом во временной период t. Экономический смысл ограничения (5) состоит в том, что агент не может уменьшить параметр $y(t)$ на сколь угодно большую величину в периоде t.

У центра есть два вида управления: выбор функции $u(t)$, которая определяет плановую траекторию $x(t)$, и функции стимулирования $\alpha(t)$. Центр информирован о целевой функции агента и, следовательно, может предсказать поведение агента на T периодов. Целевая функция центра, а следовательно, и выбор центром управляющих функций $u(t)$ и $a(t)$ зависит от реакции агента $y(t)$.

Целевая функция агента представляет собой суммарную разность между функцией стимулирования и функцией затрат агента за все периоды времени $t = \overline{1,T}$:

$$f(t) = \sum_{t=1}^{T} s(x(t),y(t),a(t),t) - c(y(t),y(t-1),t), \qquad (6)$$

где $c(y(t),y(t-1),t)$ - затраты агента.

Функция затрат агента имеет следующий вид:

$$c(y(t), y(t-1), t) = \frac{b[y(t-1) - y(t)]}{y(t)}, \qquad (7)$$

где b - коэффициент, переводящий усилия агента в денежное выражение.

Экономический смысл выражения (7) состоит в следующем: с уменьшением параметра *y(t)* агенту требуется большее количество усилий для уменьшения параметра на одну и ту же величину. Затраты агента в период t зависят от величины параметра в предыдущий период t-1. Агент обладает дальновидностью и понимает, что снижение контролируемого параметра в текущем периоде приведет к росту его затрат в будущих периодах.

Таким образом, целевая функция агента, а следовательно, и реакция агента *y(t)* зависят от плановой траектории центра *x(t)*, величины материального вознаграждения $a(t)$ и затрат агента в каждый период t.

Динамика изменения фактического параметра *y(t)* описывается дискретным уравнением

$$y(t) = y(t-1) - v(t)y(t-1), \;\; t = 1,T \;, \qquad (8)$$

где *v(t)* – управляющая функция агента, которая характеризует интенсивность уменьшения параметра во временной период t.

В начальный момент времени известно начальное значение фактического параметра

$$y(0) = x_0 \;. \qquad (9)$$

На управление агента наложены следующие ограничения:

$$0 \le v(t) \le k_v(t), \qquad (10)$$

$k_v(t)$ - максимально возможное уменьшение параметра агентом во временной период t.

Экономический смысл ограничения (10) состоит в том, что агент не может уменьшить параметр *y(t)* на сколь угодно большую величину в периоде t. Управляющей функции *v(t)* соответствует фактическая траектория параметра *y(0), y(1), …, y(T)*.

Порядок функционирования динамической системы следующий:

1. Центр выбирает управляющую функцию *u(t)* и сообщает агенту соответствующую плановую траекторию *x(t)* и функцию материального поощрения $a(t)$ на T временных периодов.

2. Агент, зная плановую траекторию *x(t)* и функцию стимулирования $a(t)$, выбирает управляющую функцию *v(t)*, которой соответствует фактическая траектория *y(t)*.

3. Определяются значения целевых функций центра и агента в каждом временном периоде t =1, T.

Сформулируем динамическую задачу стимулирования:

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T}\{H[y(v^*(t),t),t] - s[x(u(t),t),y(v^*(t),t),a(t),t)]\} \rightarrow max, \\ x(t) = x(t-1) - u(t)x(t-1), t = 1,T \;\; x(0) = x_0, \\ \sum\limits_{t=1}^{T}\{s[x(u(t),t),y(v^*(t),t),a(t),t] - c[y(v^*(t),t),y(t-1),t]\} \ge \\ \ge \sum\limits_{t=1}^{T}\{s[x(u(t),t),y(v(t),t),a(t),t] - c[y(v(t),t),y(t-1),t]\}, \; \forall\, v(t) \ge 0, \\ y(t) = y(t-1) - v^*(t)y(t-1), \;\; t = 1,T, \;\; y(0) = x_0. \end{cases}$$

(11)-(14)

Так как центр использует заданную пропорциональную систему стимулирования, то задача сводится к определению управляющих функций *u(t)* и $a(t)$, которые переводят организационную систему из начального состояния в начальный момент времени в конечный момент времени таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию центра (11). Целевая функция центра зависит от управляющей функции агента *v*(t)*, которая выбирается агентом так, чтобы перевести организационную систему из начального состояния в конечное, максимизируя собственную целевую функцию (13).

2. Численный метод решения динамической задачи стимулирования

Традиционный подход к решению статической задачи стимулирования [7] заключается в следующем. Определяется действие агента как функция материального вознаграждения центра. Затем эта функция подставляется в целевую функцию центра, и решается задача согласованного планирования, в результате решения которой определяются параметр функции стимулирования центра. Однако этот подход для решения задач динамического стимулирования неприменим.

Предлагается подход к решению задачи стимулирования, основанный на последовательном решении задач оптимального управления. При известных фиксированных управляющих функциях $u(t)$ и $a(t)$ задача агента (13)-(14) является задачей оптимального управления. Для решения задачи оптимального управления могут быть применены дискретный принцип максимума Понтрягина [16] или метод динамического программирования Р. Беллмана [17]. Центр выбирает начальное управление $u(t)$ и $a(t)$ и соответствующую начальную плановую траекторию $x(t)$. Зная целевую функцию агента, центр при выбранном управлении решает задачу оптимального управления для агента (13)-(14). Из решения задачи центр определяет реакцию агента на свое выбранное управление. Подставляя полученное управление агента $v(t)$ и соответствующую ему фактическую траекторию $y(t)$ в (11)-(12), центр решает свою задачу оптимального управления, в ходе решения которой определяет новые управляющие функции и соответствующую плановую траекторию $x(t)$. Затем центр снова решает задачу оптимального управления для агента с новыми управлениями центра. Итерационный процесс продолжается пока не будет получена требуемая точность решения.

Схема решения задачи может быть сформулирована следующим образом:

1. Выбираются начальные управления $u^1(t)$ и $a^1(t)$, исходя из опыта и здравого смысла.

2. Рассчитывается плановая траектория $x^1(t)$ по формуле (11).

3. При известных $u^1(t)$ и $a^1(t)$ находится решение задачи оптимального управления для агента (13)-(14). Определяется оптимальное управление агента $v^1(t)$ и соответствующая фактическая траектория $y^1(t)$.

4. Для найденной реакции агента $v^1(t)$ и соответствующей ей фактической траектории $y^1(t)$ находится решение задачи оптимального управления для центра (11)-(12). Определяется новое оптимальное управление центра $u^2(t)$ и $a^2(t)$. Рассчитывается новая плановая траектория $x^2(t)$ по формуле (11).

5. Производится сравнение разности $\sum_{i=1}^{T}\left[x^1(t)-x^2(t)\right]$ с заранее заданной погрешностью e. Если разность больше погрешности, то в качестве управлений центра принимаются новые управления $u^1(t) = u^2(t)$ и $a^1(t) = a^2(t)$ и осуществляется переход к пункту 2, в противном случае итерационный процесс заканчивается.

Предложенный метод решения может быть применен для широкого круга практических задач внутрикорпоративного и межкорпоративного стимулирования.

Список литературы

1. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

2. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1974.

3. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. – М.: Наука, 1971.

4. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976.

5. Бурков В. Н. Основы математической теории активных систем. - М.: Наука,1977.

6. Бурков В. Н., Кондратьев В. В. Механизмы функционирования организационных систем. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

7. Бурков В. Н., Новиков В. А. Как управлять проектами. - М.: СИНТЕГ-ГЕО, 1997.

8. Бурков В. Н. Новиков Д. А. Как управлять организациями. - М.: Синтег, 2004.

9. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. – М.: Радио и связь, 1982.

10. Кононенко А. Ф. О многошаговых конфликтах с обменом информации // Вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. № 4. - С. 922-931.

11. Соколовский Л. Е. Модели оптимального функционирования предприятия. – М.: Наука, 1980.

12. Васборд Э. М., Жуковский В. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. - М.: Советское радио, 1980.

13. Тынянский Н. Т., Жуковский В. И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (бескоалиционный вариант) // Математический анализ, 1977, т. 15. - С. 21-32.

14. Новиков Д. А., Смирнов И. М., Шохина Т. Е. Механизмы управления динамическими активными системами. - М.: ИИПУ РАН, 2002.

15. Косачев Ю. В. Экономико-математические модели эффективности финансово-промышленных структур. – М.: Логос, 2004.

16. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. - М.: Наука, 1973.

17. Белман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

DISCRETE MODELS OF DYNAMIC SYSTEM STIMULATION

© 2006 O. V. Pavlov

Samara State Aerospace University

The paper deals with the task of stimulation in a dynamic system with connected functioning periods. Mathematical statement of the task is presented. A numerical method is proposed for solving the task of optimal management.