

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ДЕМПФЕРОВ В ЗАДАЧАХ РОТОРНОЙ ДИНАМИКИ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

© 2017

- М. Н. Кутаков** инженер-программист;  
Инженерно-консультационный центр по роторной динамике турбомашин  
ООО «Альфа-Транзит», г. Химки;  
[maxim.kutakov@alfatran.com](mailto:maxim.kutakov@alfatran.com)
- С. А. Дегтярев** руководитель направления разработки средств моделирования;  
Инженерно-консультационный центр по роторной динамике турбомашин  
ООО «Альфа-Транзит», г. Химки;  
[degs@alfatran.com](mailto:degs@alfatran.com)
- М. К. Леонтьев** доктор технических наук, профессор кафедры «Конструкция и проектирование двигателей»;  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);  
[lemk@alfatran.com](mailto:lemk@alfatran.com)

Рассмотрены вопросы выбора моделей гидродинамических демпферов и методов их расчёта в инженерных задачах роторной динамики газотурбинных двигателей. Целью работы является теоретическое установление критериев применения математических моделей гидродинамического демпфера в зависимости от его характеристик и условий работы. Обозначены уровни моделирования демпфера по количеству пространственных измерений: трёхмерное, двухмерное и одномерное. Представлены принципы постановки граничных условий для учёта торцевых уплотнений. Показаны критерии оценки необходимости учёта таких факторов как турбулентность, инерция жидкости, кавитация.

*Трибология; гидродинамический демпфер; математическая модель; роторная динамика.*

---

*Цитирование:* Кутаков М.Н., Дегтярев С.А., Леонтьев М.К. Математические модели гидродинамических демпферов в задачах роторной динамики газотурбинных двигателей // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 1. С. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128

### Введение

Гидродинамические демпферы (ГДД) в опорах роторов авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) получили широкое распространение. Их применение позволяет снизить уровень вибраций в конструкциях двигателей, нагрузки в подшипниковых узлах, напряжения в деталях и узлах. Существует большое количество работ в области теоретического и экспериментального исследования как гидродинамики демпферов, так и в области их проектирования для роторных систем. Основные принципы проектирования и математического моделирования ГДД можно найти, например, в работах [1 – 4].

Однако гидродинамический демпфер по-прежнему остаётся одним из сложных элементов роторной системы с точки зрения его проектирования, моделирования и анализа работы. И наиболее сложными, по мнению авторов, являются вопросы, связанные с моделированием работы ГДД в составе модели роторной системы ГТД. Сейчас практически все программы моделирования динамики роторных систем позволяют производить расчёты роторов с демпферными опорами с большей или меньшей степенью приближения модели к физическому объекту. Однако правильное применение инструментов моделирования остаётся инженерной задачей.

В основе модели ГДД как элемента роторной (механической) системы лежит математическая модель течения жидкости в демпферном зазоре. При этом, с одной сторо-

ны, модель демпфера должна быть максимально приближенной к физическому объекту, с другой, требовать минимального количества вычислений для получения требуемых для моделирования роторной системы интегральных характеристик ГДД.

### Гидродинамическая модель демпфера

Простой гидродинамический демпфер (рис. 1) образуется поверхностью цилиндрической втулки (вибратора), фиксируемой на наружном кольце или корпусе подшипника качения, и поверхностью корпуса демпфера. Вибратор не вращается, но может совершать вместе с валом ротора прецессионное движение.

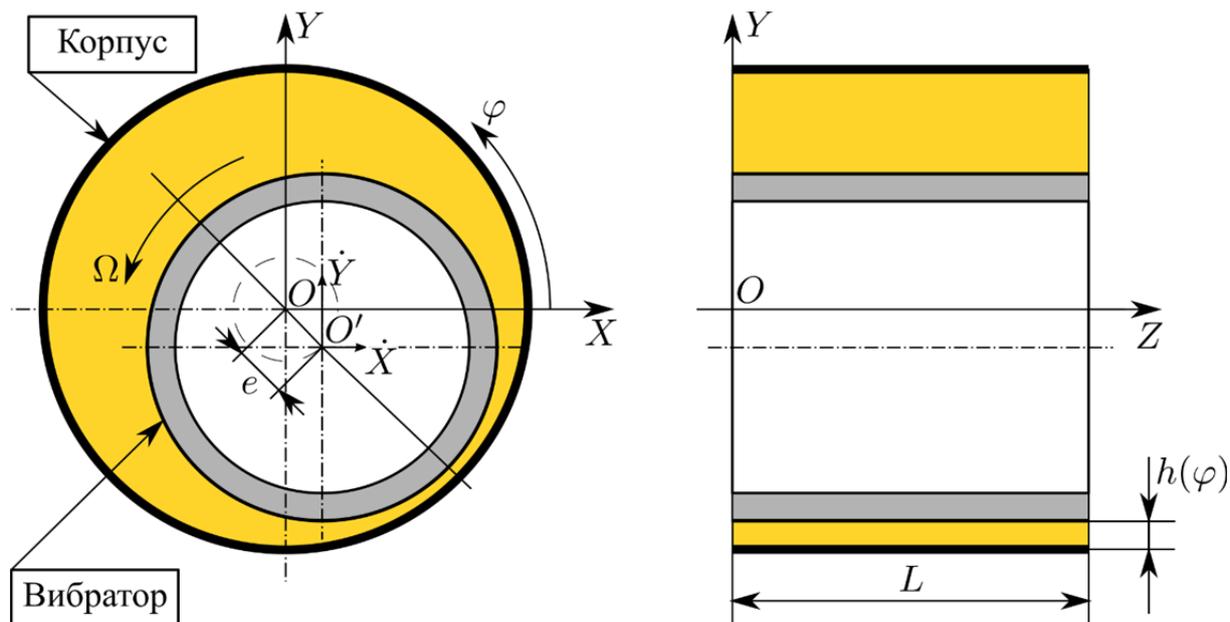


Рис. 1. Схема гидродинамического демпфера

В общем случае движение несжимаемой жидкости при ламинарном режиме течения может быть описано системой из уравнения движения (Навье-Стокса) и уравнения неразрывности (сохранения массы), которые в векторном виде можно записать [5]

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{v}) = 0; \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{div}(2\mu D) + \rho \bar{f}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\bar{v}$  – вектор скоростей;  $\rho$  – массовая плотность;  $p$  – статическое давление;  $\bar{f}$  – вектор массовых сил;  $D$  – тензор скоростей деформации элементарного жидкого объема.

Система (1) включает уравнения в частных производных, которые вместе с граничными и начальными условиями могут быть решены численно с использованием специальных методов, например, метода конечных элементов или метода конечных объемов [6]. Существует множество программных пакетов для решения задач гидродинамики общего назначения как коммерческих (ANSYS CFX, Fluent и т.д.), так и свободных (OpenFOAM, CodeSaturn и т.д.), которые могут быть применены для решения данной задачи. Например, авторы работы [7] произвели моделирование течения жидкости в гидродинамическом демпфере с помощью CFD пакета общего назначения ANSYS

CFX. При этом для достижения приемлемой точности моделирования размерность задачи составила более миллиона степеней свободы, которая для современных ЭВМ не критическая, но требующая значительного времени для выполнения вычислений. В результате была получена трёхмерная картина течения жидкости в зазоре демпфера. Использование CFD пакетов общего назначения позволяет учитывать большую часть особенностей движения жидкости: турбулентность потока, кавитацию, температурную неравномерность, теплообмен со стенками при минимальном наборе допущений. CFD расчёт является наиболее полным и потенциально точным способом моделирования течения в демпфере, доступным инженеру, но обладает существенным недостатком – большим объёмом требуемых вычислений.

Для упрощения задачи можно воспользоваться основным свойством гидродинамических демпферов – зазор в демпфере много меньше остальных размеров – длины окружности и ширины подшипника:

$$\varepsilon = \frac{c}{R} = O(10^{-3}), \quad (2)$$

где  $c$  – номинальный радиальный зазор в демпфере;  $R$  – радиус вибратора.

Рейнольдс ещё в 1886 году [8], основываясь на свойстве (2), справедливом также для подшипников скольжения, и ряде допущений (жидкость несжимаема; вязкость жидкости постоянна во всем объёме; инерция жидкости не учитывается; эффекты турбулентности не учитываются), получил уравнение, описывающее течение жидкости в зазоре подшипника скольжения, которое можно записать в полярной системе координат в виде:

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2} \omega \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус цапфы вала (в случае демпфера – радиус вибратора);  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости;  $h$  – радиальный зазор между цапфой вала и корпусом;  $\omega$  – угловая скорость вращения цапфы вала;  $\varphi, z$  – угловая и осевая координата.

Вывод уравнения Рейнольдса из системы (1) достаточно полно описан, например, в [5]. В отличие от подшипников скольжения в демпферах цапфа вала заблокирована от вращения. Следовательно, угловая скорость равна нулю и тогда:

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (4)$$

Вибратор и корпус представляют собой два параллельных цилиндра, при этом перекосы осей не учитываются.

Функция распределения зазора:

$$h(\varphi) = c - X \cos(\varphi) - Y \sin(\varphi), \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{X} \cos(\varphi) - \dot{Y} \sin(\varphi), \quad (6)$$

где  $X, Y$  – координаты центра вибратора,  $\dot{X}, \dot{Y}$  – скорости центра вибратора.

Уравнение (4) примет вид

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\dot{X} \cos(\varphi) - \dot{Y} \sin(\varphi). \quad (7)$$

Уравнение (7) является уравнением в частных производных эллиптического типа относительно давления  $p$ . Для его решения необходима постановка граничных условий. При определении граничных условий следует обратиться к физической сущности объекта моделирования. Построим развёртку простого цилиндрического демпфера (рис. 2), которая представляет собой расчётную область  $\Phi$ .

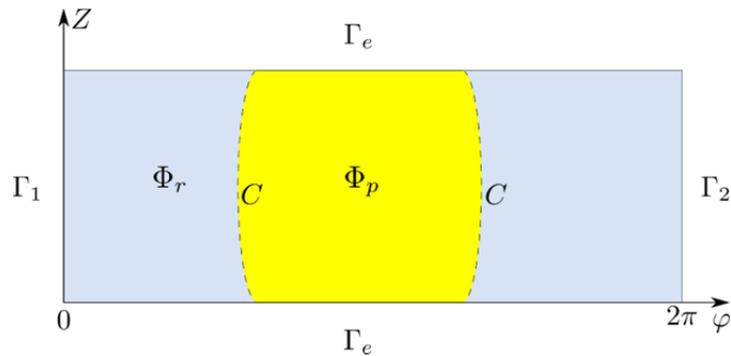


Рис. 2. Развёртка расчётной области

Так как расчётная область является замкнутой, то необходимо задать периодическое граничное условие на границах  $\Gamma_1, \Gamma_2$ :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_1} + \left. \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} \right|_{\Gamma_2} = 0; \\ p_{\Gamma_1} = p_{\Gamma_2}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\bar{n}$  – нормаль к границе.

Для определения граничных условий на торцах  $\Gamma_e$  необходимо определить тип торцевых уплотнений. На рис. 3 изображены некоторые варианты торцевых уплотнений.

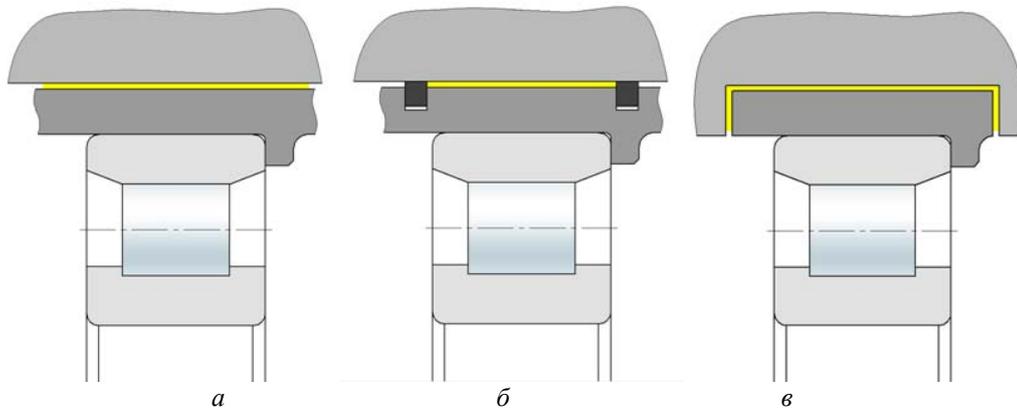


Рис. 3. Типы торцевых уплотнений демпферов:  
а – открытые торцы; б – поршневые кольца; в – щелевые уплотнения

Для демпфера с открытыми торцами, изображённого на рис. 3, а, граничным условием является давление окружающей среды, чаще всего нормальное атмосферное, то есть нулевое избыточное. Таким образом граничное условие можно записать:

$$p(\varphi)|_{\Gamma_e} = p_a = 0, \quad (9)$$

где  $p_a$  – давление окружающей среды.

Для уплотнённого демпфера, изображённого на рис. 3, б, в идеальном случае (при отсутствии утечек через торцевые уплотнения) граничное условие устанавливается в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_e} = 0. \quad (10)$$

В случае демпфера с щелевыми уплотнениями (рис. 3, в) граничное условие имеет вид:

$$\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial n}|_{\Gamma_e} = q, \quad (11)$$

где  $q = f(p)$  – объёмный расход масла через уплотнение, определяемый перепадом давления и гидравлическим сопротивлением в уплотнении.

Для учёта торцевых утечек через уплотнения демпфера типа б можно применить граничное условие (11). Условий (8) – (11) достаточно для решения уравнения (7).

В реальной работе в демпферах наблюдается явление газовой и паровой кавитации. Экспериментальное исследование кавитации в демпферах представлено в работе [9]. Газовая кавитация представляет собой выделение из жидкости растворённых в ней газов при давлении в жидкости ниже равновесного давления растворённого газа. Паровая кавитация представляет собой вскипание жидкости при давлении ниже давления насыщенного пара для используемой жидкости. Чаще возникает газовая кавитация, поскольку давление насыщенного пара для нефтяных масел находится ниже равновесного давления растворённого газа и, кроме того, при давлении в плёнке ниже давления окружающего газа происходит прорыв газа внутрь зоны с пониженным давлением. Для учёта кавитации в расчёте необходимо дополнить граничные условия выражениями, которые будут определять границу зоны кавитации  $C$ :

$$\begin{aligned} C &= \partial\Phi_r \cap \partial\Phi_p; \\ \Phi_r &\overset{\Delta}{=} \{x \in \Phi \mid p(x) = 0\}; \\ \Phi_p &\overset{\Delta}{=} \{x \in \Phi \mid p(x) > 0\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Обзор подходов к моделированию зоны кавитации представлен в работах [10;11]. Наиболее простым для применения является условие Гюмбеля. Предполагается, что разрыв масляной плёнки происходит в зоне отрицательного давления. Решение уравнения (7) производится в расчётной области  $\Phi$ , давление с отрицательным значением принимается равным нулю:

$$p(x) < 0 \rightarrow p(x) = 0. \quad (13)$$

Однако условия Гюмбеля не обеспечивают сохранение объёмного расхода жидкости. Условия Свифта-Штибера, в некоторых источниках именуемые граничными условиями Рейнольдса, обеспечивают сохранение объёмного расхода на границе зоны кавитации:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_c = 0, \quad p(x)|_c = 0. \quad (14)$$

Условия Свифта-Штибера не обеспечивают сохранение массового расхода и определяют зону кавитации лишь приблизительно. Существуют модели кавитации, обеспечивающие сохранение массового расхода, например, модель Якобсона–Флоберга–Ольсона, модель кавитации Элрода. Вместе с тем условия (14) получили широкое распространение в практике расчётов.

Уравнение (7) с граничными условиями (8) – (11), (13) или (14) может быть решено численным или численно-аналитическим методом, например, методом конечных разностей, конечных элементов, конечных объёмов. Размерность такой задачи будет составлять от нескольких сотен до нескольких тысяч степеней свободы, что значительно ниже, чем при использовании CFD моделирования. Применение уравнения Рейнольдса справедливо только для тонких плёнок. Этого достаточно для большинства задач расчёта демпферов, но требует отдельного учёта таких элементов, как маслораспределительная канавка, так как её глубина уже много больше зазора в демпфере. Кроме того, базовые допущения требуют понимания границ их применимости.

В гидравлическом слое может существовать гидродинамическое течение двух типов: ламинарное и турбулентное. Ламинарный режим течения обуславливается преобладанием вязких сил, которые гасят все случайные возмущения, возникающие в жидкости. Турбулентный режим наступает, когда силы инерции преобладают над силами вязкости и любое случайное возмущение усиливается потоком. Ламинарный или турбулентный режим течения характеризуется числом Рейнольдса, которое представляет собой отношение сил инерции к силам вязкости. В демпферах скорость течения в окружном направлении будет определяться сдвиговым течением вследствие движения вибратора. При этом скорость потока в окружном направлении, как правило, выше скорости потока при напорном течении в торцы. Таким образом, возникновение турбулентности можно характеризовать числом Рейнольдса для сдвигового течения [3]:

$$Re = \frac{\rho R \Omega e}{\mu}, \quad (15)$$

где  $\Omega$  – циклическая частота колебаний вибратора;  $e$  – эксцентриситет вибратора.

Можно считать, что ламинарный режим течения сохраняется при числе Рейнольдса ниже некоторого критического значения. Опытным путём установлено, что критическое значение числа Рейнольдса для демпфера  $Re_k \approx 1200$  [3;12]. Возникновение турбулентности может существенно влиять на картину течения и должно учитываться в расчёте.

Одним из способов учёта турбулентности является решение модифицированного уравнения Рейнольдса, в которое вводятся корректирующие коэффициенты турбулентности  $k_x, k_z$ :

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{k_x \mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{k_z \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -\dot{X} \cos(\varphi) - \dot{Y} \sin(\varphi). \quad (16)$$

Коэффициенты  $k_x, k_z$  вычисляются в соответствии с моделями турбулентности, разработанными для течения в тонких плёнках:

- на основе гипотезы о пути перемешивания Прандтля разработана модель турбулентности Константинеску;
- на основе уравнений Рейхардта-Клаузера — модель Нг-Пена-Элрода;
- на основе  $k$  модели турбулентности – модель Хо-Вора;
- $k - \varepsilon$  модель – Лаундер и Лесчзинер для расчёта подшипников скольжения;
- эмпирические законы — теория Хирса, Блэка-Уолтона.

Для анализа учёта инерции жидкости обратимся к уравнению Навье-Стокса (1), записанному в виде

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} \right) = -\text{grad}(p) + \text{div}(2\mu D) + \rho \bar{f}. \quad (17)$$

Слагаемые в скобках получили названия соответственно локальный  $\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$  и конвективный  $\rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$  члены инерции. Локальные силы инерции определяются ускорением массы жидкости в зазоре демпфера и при ускоренном движении вибратора могут быть существенными. Следовательно, локальные члены инерции следует учитывать в нестационарных задачах. Конвективные силы инерции определяются местным ускорением жидкости в потоке и оказывают меньшее, по сравнению с локальными силами инерции, влияние на работу демпфера [3]. Однако их учёт оправдан в стационарных задачах, где локальные силы инерции малы, но при достаточно высокой частоте вращения и в случае применения маловязких жидкостей [1].

В [5] для подшипников скольжения вводятся два параметра, которые служат для определения влияния учёта инерции жидкости на получаемый результат: приведённая частота  $\Omega_*$  и приведённое число Рейнольдса  $R_\varepsilon$ :

$$R_\varepsilon = \left( \frac{c}{R} \right) \text{Re}, \quad (18)$$

$$\Omega_* = \frac{c^2 \Omega \rho}{\mu}. \quad (19)$$

На основе анализа порядков величин в уравнении (1) для случая течения в тонких плёнках получено, что учёт инерции оказывает влияние на результат при  $\Omega_* > 1$  и  $R_\varepsilon > 1$ . При этом можно выделить три основных случая:

- 1)  $R_\varepsilon / \Omega_* \rightarrow 0, \Omega_* > 1$  – требуется учёт только локального члена инерции;
- 2)  $\Omega_* / R_\varepsilon \rightarrow 0, R_\varepsilon > 1$  – требуется учёт только конвективного члена инерции;
- 3)  $\Omega_* / R_\varepsilon \rightarrow O(1), R_\varepsilon > 1$  – требуется учёт обоих членов инерции.

В демпферах, вследствие отсутствия вращения цапфы,  $R_\varepsilon$  и  $\Omega_*$  являются по сути одним и тем же числом. В других источниках [1] этот параметр получил название параметр инерции, в [13] – число Рейнольдса для тонкой плёнки (англ. squeeze film Reynolds number).

При решении системы (1) инерционные силы учитываются автоматически. Задача сведения системы (1) к уравнению типа (4) при учёте конвективного члена инерции жидкости является сложной. Существуют различные способы учёта конвективных сил инерции, например, методом осреднения скоростей по толщине слоя [5], но в статье они не рассматриваются.

Локальный член инерции можно учесть в правой части уравнения Рейнольдса [13]:

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{\rho h^2}{12\mu} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Опираясь на анализ экспериментальных данных, авторы [1] отмечают, что учёт конвективных членов инерции жидкости необходимо производить при  $\Omega_* > 10$ .

В демпферах температурная неравномерность в масляном слое зависит главным образом от двух факторов: соотношение тепловыделения вследствие диссипации механической энергии в масляном слое с расходом масла через демпферный зазор и температурная неравномерность корпуса демпфера вследствие внешнего подогрева. В проточных демпферах и демпферах с щелевыми уплотнениями значительная часть генерируемого тепла уносится маслом, протекающим через демпфер. В уплотнённых демпферах расход масла невелик и температурная неравномерность в масляной пленке может иметь место. Учёт температурной неравномерности требует дополнительного решения уравнения сохранения энергии, которое, в свою очередь, значительно усложнит решение задачи. Вместе с тем, согласно оценкам [1], в проточных демпферах отсутствие учёта температурной неравномерности приводит к погрешностям около 5%, а для уплотнённых демпферов погрешность может достигать 60% при больших значениях эксцентриситетов. Температурная неравномерность корпусов и вибратора может быть определена из соответствующего теплового расчёта и также окажет влияние на течение в зазоре. Но в этом случае необходимо оценивать соотношение теплопередачи между корпусом и масляным слоем и количеством тепла, уносимого маслом, прокачиваемым через демпфер. В итоге при анализе демпферов с открытыми торцами температурной неравномерностью можно пренебречь, а для демпферов с уплотнениями может потребоваться дополнительный тепловой анализ. Для уплотнённых демпферов погрешности без учёта тепловой неравномерности в неблагоприятном случае не превысят 60%, что может оказаться приемлемым для некоторых типов задач. Учёт тепловых эффектов в демпферах представляет собой отдельную задачу и в статье не рассматривается. Однако при моделировании демпфера необходимо оценить среднюю температуру в масляном слое для правильного задания динамической вязкости жидкости.

Уравнение (4) не может быть решено аналитическим способом в общем виде, но существуют задачи, в которых время решения уравнения может иметь важное значение. Для получения аналитических выражений распределения давления в демпферном зазоре вводятся дополнительных допущения, которые можно считать справедливыми в определенных условиях.

В одном случае можно считать, что градиент давления в окружном направлении существенно превышает градиент давления в осевом и тогда величиной  $\partial p / \partial z$  можно пренебречь. Такое допущение называется моделью «длинного» демпфера и оно справедливо при соотношении  $L/D \geq 2$  [6], где  $L$  – длина вибратора,  $D$  – диаметр вибратора.

Для «длинного» демпфера уравнение Рейнольдса примет вид:

$$\frac{\partial}{R^2 \partial \varphi} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{\rho h^2}{12\mu} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}. \quad (21)$$

Другим допущением является малость градиента давления в окружном направлении в сравнении с осевым. Такая модель получила название модель «короткого» демпфера, которая применима при  $L/D \leq 0.5$  и относительном эксцентриситете  $\varepsilon \leq 0.75$  [14]. Уравнение Рейнольдса в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \frac{\rho h^2}{12\mu} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Уравнения (21) и (22) могут быть решены аналитически совместно с граничными условиями (8) – (11). Важно отметить, что границы параметра  $L/D$  соответствуют демпферам без торцевых уплотнений (рис. 3, а), либо эквивалентным. Подробнее этот аспект рассмотрен в [2]. Демпферы с торцевыми уплотнениями (рис. 3, б) в первом приближении можно считать «длинными» независимо от отношения  $L/D$ , так как при отсутствии торцевых утечек градиент давления в направлении оси  $z$  равен нулю. Наличие круговой маслораспределительной канавки приводит к появлению значительного градиента давления в осевом направлении, и такой демпфер можно считать «коротким». Для демпфера с щелевыми уплотнениями (рис. 3, в) выявить границы применимости аналитических уравнений достаточно сложно, так как расход масла через уплотнения и градиент давления в осевом направлении существенно зависят от величины зазора в щели и её длины. Для демпферов с щелевыми уплотнениями целесообразно решать уравнение Рейнольдса в двухмерной постановке.

Модели «короткого» и «длинного» демпфера, основанные на таких же подходах для подшипника скольжения, имеют ограничения по соотношению  $L/D$  и не предназначены для применения в диапазоне  $0.5 < L/D < 2$ . В этом случае необходим расчёт демпфера конечной длины. Для демпферов конечной длины всегда можно решить двухмерное уравнение Рейнольдса, в котором автоматически будут учтены эффекты как кругового течения, так и течения в торцы, что даст потенциально более точные результаты по сравнению с одномерными моделями. В [1] приводятся способы аналитического учёта инерции жидкости, кавитации и турбулентности для «короткого» и «длинного» демпфера.

Важным аспектом является вопрос учёта зоны кавитации в аналитическом решении уравнений (21) и (22). Применение условий Свифта-Штибера является нетривиальной задачей. Поэтому на практике для аналитических моделей ограничиваются условиями Гюмбеля (так называемая « $\pi$ -плёнка» – половинный охват вибратора смазкой) и условиями Зоммерфельда (так называемая « $2\pi$ -плёнка» – полный охват демпфера смазкой) при отсутствии зоны кавитации. При моделировании демпфера инженеру необходимо определить тип модели кавитации: « $\pi$ -плёнка» или « $2\pi$ -плёнка», другими словами – присутствует в демпфере достаточно значимая зона кавитации или нет. В закрытых демпферах с высоким давлением подачи масла возникновение зоны кавитации возможно при более высокой скорости движения вибратора и больших эксцентриситетах, чем в открытых демпферах при низком давлении подачи масла. Возникновение и размер области кавитации зависят от давления подачи масла, наличия торцевых уплотнений, скорости и эксцентриситета вибратора. Оценить возникновение кавитации можно по некоторым количественным характеристикам. Такие параметры позволяют

приблизительно оценить возможность возникновения кавитации в демпфере. В [1] на основе аппроксимации численных расчётов получены параметры кавитации для некоторых типов демпферов как функции от эксцентриситета и безразмерного параметра подачи масла и только для круговых орбит прецессии вибратора.

$$\begin{aligned} A_K &= 1 + \left( 3.76(1-\varepsilon)^{1.51} \exp[2.89(1-\varepsilon)] \right) \bar{P}_K, \\ B_K &= 1 - \left( 10.2(1-\varepsilon)^{2.24} \exp[1.88(1-\varepsilon)] \right) \bar{P}_K, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} A'_K &= 1 + \left( 1.1(1-\varepsilon)^{1.17} \exp[3.17(1-\varepsilon)] \right) \bar{P}_K, \\ B'_K &= 1 - \left( 5.84(1-\varepsilon)^{2.41} \exp[0.89(1-\varepsilon)] \right) \bar{P}_K, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A_D &= 1 + 4 \times 10^{-5} (1-\varepsilon)^{6.12} \exp[12.9(1-\varepsilon)] \bar{P}_N^{0.9} \quad \text{при } 0 < \varepsilon < 0.5; \\ A_D &= 1 + (2.76 - 2.45\varepsilon) \bar{P}_N^{0.75} \quad \text{при } 0.5 < \varepsilon < 0.9, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $A_K, B_K$  – параметры кавитации «короткого» непроточного демпфера;  $A'_K, B'_K$  – параметры кавитации «короткого» проточного демпфера;  $A_D$  – параметр кавитации «длинного» демпфера;  $\varepsilon = e/c$  – безразмерный коэффициент;  $\bar{P}_K = \bar{P}_N (R/L)^2$  – безразмерный параметр подачи масла;  $\bar{P}_N = \bar{P}_П - \bar{P}_Н$ ,  $\bar{P}_П$  – безразмерное давление подачи масла;  $\bar{P}_Н$  – безразмерное давление насыщенных паров. Безразмерное давление вычисляется по формуле:

$$\bar{P} = \frac{c^2 P}{12 \mu \Omega R^2}. \quad (26)$$

При  $A_K (A_D) \geq 2$  кавитации не происходит и можно пользоваться теорией полного охвата (« $2\pi$ -плёнка»), при  $A_K (A_D) \leq 1.1$  можно пользоваться теорией половинного охвата (« $\pi$ -плёнка»). При  $1.1 < A_K (A_D) < 2$  необходимо производить учёт кавитации аналитически по методике, изложенной в [1], либо производить численное решение двухмерного уравнения Рейнольдса с граничными условиями Свифта-Штибера, либо использовать более сложные модели для определения границ зоны кавитации.

Таким образом, можно выделить три уровня моделирования течения в демпферном зазоре:

1. Трёхмерное моделирование течения с учётом максимального количества факторов при помощи специальных или универсальных программных CFD пакетов. Достоинством такого подхода являются возможность получения подробной картины течения для выбранного режима работы демпфера. Недостатком такого подхода является большой объём вычислений.

2. Двухмерное моделирование с использованием уравнения Рейнольдса, модифицированного для учёта тех или иных дополнительных факторов или без них. Преимущества: значительно сниженный по сравнению с трёхмерным моделированием объём вычислений при достаточно справедливых допущениях. Недостатки: принятые до-

пушения ограничивают применимость модели только течением в тонких плёнках и, как следствие, приводят к появлению необходимости специального учёта камер, карманов подвода масла, маслораспределительных канавок. Достаточно сложен механизм учёта инерции жидкости.

3. Одномерное уравнение Рейнольдса. Достоинства: аналитическое решение для поля давления и минимальное количество вычислений. Недостатки: жёсткие границы применимости, меньшая по сравнению с предыдущими уровнями моделирования достоверность физической модели и все недостатки, присущие двумерному моделированию.

### Критерии применимости математических моделей

Как показано, усложнение математической модели течения жидкости в зазоре демпфера ведёт к росту размерности задачи и времени, необходимого для её решения. В силу определённых свойств течения в тонких плёнках подробный учёт тех или иных факторов при моделировании может оказаться неэффективным вследствие низкой степени их влияния на конечный результат. Границы применимости одномерных моделей и критерии учёта влияющих факторов сведены в табл. 1.

Таблица 1. Границы применимости математических моделей

Режим течения		
Ламинарный		Турбулентный
Re < 1200		Re > 1200
Метод расчёта		
«Короткий» демпфер	Демпфер конечной длины	«Длинный» демпфер
$L/D \leq 0.5$ $\varepsilon \leq 0.75$	$0.5 < L/D < 2$	$L/D \geq 2$
Учёт сил инерции		
Конвективный член		Локальный член
$\Omega_* > 10$		$\Omega_* > 1$ , нестационарная задача
Учёт кавитации		
« $\pi$ -плёнка»	Специальный учёт	« $2\pi$ -плёнка»
$A_K(A_D) \leq 1.1$	$1.1 < A_K(A_D) < 2$	$A_K(A_D) \geq 2$

Используя табл. 1, можно определить возможность применения аналитических моделей демпфера либо необходимость использования более точных численных решений. Указанные выше границы применения одномерных и двумерных моделей течения жидкости, учёта эффектов турбулентности и инерции жидкости определены из вводимых допущений моделирования либо получены опытным путём.

### Заключение

В статье рассмотрены математические модели гидродинамических демпферов различных типов, построенные как на базе одномерных, так и двумерных уравнений течения жидкости Рейнольдса. Показаны границы применимости этих моделей в задачах роторной динамики ГТД.

С точки зрения временных затрат применение моделей, построенных на аналитических решениях одномерных уравнений Рейнольдса, существенно более выгодно по сравнению с моделями, реализующими двумерные уравнения и требующими числен-

ных методов решения. Время расчёта даже простейших роторных систем может увеличиться на несколько порядков. В то же время в ряде случаев их приходится использовать, так как аналитические модели могут выходить за границы их применимости и привести к ошибочным результатам.

Обозначены критерии, которыми может воспользоваться инженер при выборе модели демпфера конкретной конструкции и построении общей модели роторной системы.

### **Библиографический список**

1. Белоусов А.И., Балякин В.Б., Новиков Д.К. Теория и проектирование гидродинамических демпферов опор роторов. Самара: Самарский научный центр РАН, 2002. 335 с.
2. Леонтьев М.К. Конструкция и расчёт демпферных опор роторов ГТД: учеб. пособие. М.: Московский авиационный институт, 1998. 43 с.
3. Сергеев С.И. Демпфирование механических колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 408 с.
4. Zeidan F.Y., San Andres L., Vance J.M. Design and application of squeeze film dampers in rotating machinery // Proceedings of the 25th Turbomachinery Symposium. 1996. P. 169-188.
5. Szeri A.Z. Fluid film lubrication. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 547 p.
6. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2-х томах. Т. 1. М.: Мир, 1991. 504 с.
7. Dousti S., Gerami A., Dousti M. A numerical CFD analysis on supply groove effects in high pressure, open end squeeze film dampers // International Journal of Engineering Innovation and Research. 2016. V. 5, Iss. 1. P. 80-89.
8. Reynolds O. On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil // Proceedings of the Royal Society of London. 1886. V. 40, Iss. 242-245. P. 191-203. DOI: 10.1098/rspl.1886.0021
9. Zeidan F.Y., Vance J.M. Cavitation Effects on the Pressure Distribution of a Squeeze Film Damper Bearing // Proceedings of the Texas A&M Workshop on Rotordynamic Instability Problem in High – Performance Turbomachinery. 1988. P. 111-132.
10. Dowson D., Taylor C.M. Cavitation in bearings // Annual Review of Fluid Mechanics. 1979. V. 11, Iss. 1. P. 35-65. DOI: 10.1146/annurev.fl.11.010179.000343
11. San Andres L. Notes 06. Liquid cavitation in fluid film bearings. <http://hdl.handle.net/1969.1/93246>
12. Nelson C.C. The effect of turbulence and fluid inertia on a squeeze film bearing damper // 16th Joint Propulsion Conference. 1980. DOI: 10.2514/6.1980-1262
13. San Andrés L. Modern Lubrication Theory. Notes 13. Squeeze Film Dampers (SFD). <http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93253>
14. San Andrés L. Modern Lubrication Theory. Notes 04. Static Load Performance of Plain Journal Bearings. <http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93244>

## MATHEMATICAL MODELS OF SQUEEZE FILM DAMPERS IN ROTOR DYNAMICS OF GAS TURBINE ENGINES

© 2017

- M. N. Kutakov** Software engineer;  
Engineering & consulting centre for dynamic problems in rotating machinery  
Alfa-Tranzit., Co. Ltd., Khimky, Russian Federation;  
[maxim.kutakov@alfatran.com](mailto:maxim.kutakov@alfatran.com)
- S. A. Degtiarev** Development team leader;  
Engineering & consulting centre for dynamic problems in rotating machinery  
Alfa-Tranzit., Co. Ltd., Khimky, Russian Federation;  
[degs@alfatran.com](mailto:degs@alfatran.com)
- M. K. Leontiev** Doctor of Science (Engineering), Professor of Department “Construction and Design of Engines”;  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation;  
[lemk@alfatran.com](mailto:lemk@alfatran.com)

The paper focuses on the choice of mathematical models of squeeze film dampers and methods of their numerical implementations for gas turbine engine rotor dynamics problems. The present contribution is aimed at establishing criteria for the application of mathematical models of a squeeze film damper depending on the damper characteristics and operating conditions. The models are grouped by the dimension of the considered physical space, i.e. three-dimensional, two-dimensional and one-dimensional modeling patterns. The work presents principles of setting boundary conditions for mechanical seals to be adequately simulated. Criteria of assessing the necessity of taking into account such physical phenomena as turbulence, fluid inertia, and cavitation are presented. The proposed mathematical models are primarily developed for the computation of integral characteristics of squeeze film dampers, such as reaction forces and dynamic stiffness and damping coefficients required for solving rotor dynamics problems.

*Tribology; squeeze film damper; mathematical model; rotor dynamics.*

---

*Citation:* Kutakov M.N., Degtiarev S.A., Leontiev M.K. Mathematical models of squeeze film dampers in rotor dynamics of gas turbine engines. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2017. V. 16, no. 1. P. 115-128. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-1-115-128

### References

1. Belousov A.I., Balyakin V.B., Novikov D.K. *Teoriya i proektirovanie gidrodinamicheskikh dempferov opor rotorov* [Theory and design of hydrodynamic rotor support dampers]. Samara: Samarskiy Nauchnyy Tsentr RAN Publ., 2002. 335 p.
2. Leont'ev M.K. *Konstruktsiya i raschet dempfernykh opor rotorov GTD: uchebnoe posobie* [Design and calculation of gas turbine engine rotor damper supports: Textbook]. Moscow: Moscow Aviation Institute Publ., 1998. 43 p.
3. Sergeev S.I. *Dempfirovanie mekhanicheskikh kolebaniy* [Damping of mechanical vibrations]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959. 408 p.
4. Zeidan F.Y., San Andres L., Vance J.M. Design and application of squeeze film dampers in rotating machinery. *Proceedings of the 25th Turbomachinery Symposium*. 1996. P. 169-188.
5. Szeri A.Z. *Fluid film lubrication*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 547 p.
6. Fletcher C.A. *Computational techniques for fluid dynamics*. V. 1. Fundamental and general techniques. New York: Springer-Verlag, 1988. 418 p.
7. Dousti S., Gerami A., Dousti M. A numerical CFD analysis on supply groove effects in high pressure, open end squeeze film dampers. *International Journal of Engineering Innovation and Research*. 2016. V. 5, Iss. 1. P. 80-89.

8. Reynolds O. On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1886. V. 40, Iss. 242-245. P. 191-203.

DOI: 10.1098/rspl.1886.0021

9. Zeidan F.Y., Vance J.M. Cavitation Effects on the Pressure Distribution of a Squeeze Film Damper Bearing. *Proceedings of the Texas A&M Workshop on Rotordynamic Instability Problem in High – Performance Turbomachinery*. 1988. P. 111-132.

10. Dowson D., Taylor C.M. Cavitation in bearings. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1979. V. 11, Iss. 1. P. 35-65. DOI: 10.1146/annurev.fl.11.010179.000343

11. San Andrés L. Modern Lubrication Theory. Notes 06. Liquid cavitation in fluid film bearings. Available at: <http://hdl.handle.net/1969.1/93246>

12. Nelson C.C. The effect of turbulence and fluid inertia on a squeeze film bearing damper. *16th Joint Propulsion Conference*. 1980. DOI: 10.2514/6.1980-1262

13. San Andrés L. Modern Lubrication Theory. Notes 13. Squeeze Film Dampers (SFD). Available at: <http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93253>

14. San Andrés L. Modern Lubrication Theory. Notes 04. Static Load Performance of Plain Journal Bearings. Available at: <http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93244>