

УДК 004.932.2

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЦЕПЕЙ МАРКОВА С НЕСКОЛЬКИМИ СОСТОЯНИЯМИ

© 2013 Е. П. Петров, Н. Л. Харина, Е. Д. Ржаникова

Вятский государственный университет, г. Киров

В статье предложены алгоритмы нелинейной фильтрации ЦПИ на основе цепей Маркова с несколькими состояниями, позволяющие сократить время передачи изображения. Проведены исследования алгоритмов фильтрации ЦПИ при наличии белого гауссовского шума, результаты которых подтверждают теоретические предпосылки о возможности повышения качества приёма ЦПИ без увеличения энергетических ресурсов на передающей стороне канала связи.

Математическая модель, цифровое полутоновое изображение, цепь Маркова с несколькими состояниями, матрица вероятностей переходов, нелинейная фильтрация изображений, белый гауссовский шум.

Введение

В настоящее время наблюдается рост требований к объёму и качеству передаваемой информации. В связи с этим постоянно ищутся носители информации, которые обладают большой ёмкостью. Среди таких носителей наиболее предпочтительными являются полутоновые изображения, которые при их цифровом представлении двоичными g -разрядными числами могут передаваться по дискретным каналам связи, обладающим высокой помехоустойчивостью. Переход к мало-разрядному (8-16 разрядов) представлению цифровых полутоновых изображений (ЦПИ) резко расширил возможности их цифровой обработки и сфер приложения.

Цифровое представление полутоновых изображений как наиболее ёмкого носителя различного рода информации потребовало совершенствования известных и разработки новых методов их обработки.

Разработка и исследование алгоритмов обработки изображений базируются на математических моделях (ММ), адекватных реальным изображениям. К настоящему времени разработано большое число различных ММ двумерных изображений, на базе которых создан целый ряд алгоритмов обработки [1,2]. Наибольший

интерес представляют ММ цифровых полутоновых изображений на основе представления их дискретными марковскими случайными процессами с несколькими состояниями. Построение таких ММ и исследование их адекватности реальным случайным процессам подробно рассмотрено в работах [3-5]. Цифровое полутоновое изображение, представленное g -разрядными двоичными числами, рассматривается как совокупность g разрядных двоичных изображений (РДИ). Каждое РДИ, в свою очередь, аппроксимируется двумерной цепью Маркова с двумя состояниями, алгоритм моделирования которой изложен в работах [3,5]. Для построения ММ цветных изображений возможно использование цветовой модели RGB, каждый компонент которой является ЦПИ. Поэтому для передачи цветных изображений требуются большая полоса частот и больший объём вычислительных ресурсов. Уменьшения полосы можно достичь либо «сжатием» ЦПИ, либо переходом от аппроксимации ЦПИ цепью Маркова с $N = 2$ состояниями к аппроксимации ЦПИ цепью Маркова с $N > 2$ состояниями. В этом случае при аппроксимации ЦПИ необходима ММ цепи Маркова с числом состояний $N > 2$. В [6] разработана и исследована ММ ЦПИ на основе цепи Маркова с $N \geq 2$ состояниями.

Передача ЦПИ с $N > 2$ состояниями может осуществляться, например, многофазными импульсными сигналами, что позволит сократить время передачи ЦПИ в g/N раз, но при снижении помехоустойчивости примерно во столько же раз, которое можно уменьшить, если использовать статистическую избыточность, содержащуюся в «несжатых» ЦПИ.

Для реализации статистической избыточности ЦПИ, представленных цепями Маркова с $N \geq 2$ состояниями, разработан алгоритм нелинейной фильтрации импульсных коррелированных сигналов, дискретный параметр которых принимает N состояний, при наличии белого гауссовского шума (БГШ) $n(t)$ с нулевым средним и единичной дисперсией S_n^2 .

Алгоритм одномерной нелинейной фильтрации цепи Маркова с несколькими состояниями

Будем считать, что последовательность состояний $M_{i(k+1)}$ является однородной цепью Маркова с вектором вероятностей начальных состояний

$$P = \|p_1, p_2, \dots, p_N\|^T \tag{1}$$

и матрицей вероятностей переходов (МВП) из состояния $M_{i(k)}$ в k -том такте в состояние $M_{j(k+1)}$ ($i, j \in N$) в $(k+1)$ -м такте

$$P = \|p_{ij}\|_{N \times N}, \tag{2}$$

элементы которой удовлетворяют условиям нормировки

$$\sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \tag{3}$$

и согласованности

$$p_i = \sum_{j=1}^N p_j p_{ji}^*; i = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Используя теорию фильтрации условных марковских процессов [7], получим уравнение для апостериорной вероятности состояний дискретного параметра m_k импульсного сигнала $s(m_k, t_k)$, являющегося цепью Маркова с $N > 2$ состояниями:

$$p_{j(k+1)} = c \cdot \exp\{f_{k+1}(M_j)\} \sum_{i=1}^N p_{ik} p(M_j | M_i) = c \cdot \exp\{f_{k+1}(M_j)\} \sum_{i=1}^N p_{i(k)} p_{ij} \quad (j \in N), \tag{5}$$

где c – коэффициент нормировки, $\exp\{f_{k+1}(M_j)\}$ – функция правдоподобия j -го состояния дискретного параметра импульсного сигнала.

Уравнение (5) является основой для построения структур устройств фильтрации дискретного параметра импульсного коррелированного сигнала, последовательность дискретных значений которого является стационарной цепью Маркова с N состояниями.

Для удобства различения состояний дискретного параметра переведем уравнение (5) в аддитивную форму. Для этого разделим все уравнения в (5) на последнее уравнение

$$\frac{p_{j(k+1)}}{p_{N(k+1)}} = \frac{c \cdot \exp\{f_{k+1}(M_j)\} \sum_{i=1}^N p_{i(k)} p_{ij}}{c \cdot \exp\{f_{k+1}(M_N)\} \sum_{i=1}^N p_{i(k)} p_{iN}} \tag{6}$$

и, прологарифмировав обе части уравнения (6), получим уравнения нелинейной фильтрации дискретного параметра импульсных коррелированных сигналов, последовательность состояний которых является стационарной цепью Маркова с N состояниями:

$$\begin{aligned} u_{1(k+1)} &= [f_{k+1}(M_1) - f_{k+1}(M_N)] + u_{1(k)} + z_1(\cdot) \\ &\dots\dots\dots \\ u_{j(k+1)} &= [f_{k+1}(M_j) - f_{k+1}(M_N)] + u_{j(k)} + z_j(\cdot) \\ &\dots\dots\dots \\ u_{(N-1)(k+1)} &= [f_{k+1}(M_{(N-1)}) - f_{k+1}(M_N)] + u_{(N-1)(k)} + z_{(N-1)}(\cdot) \end{aligned} \tag{7}$$

где $u_{j(k+1)} = \ln \left[\frac{p_{j(k+1)}}{p_{N(k+1)}} \right], j = 1 \dots (N-1),$

$z_j(\cdot)$ – нелинейная функция вида:

$$z_j(\cdot) = \ln \left[\frac{\sum_{i=1, i \neq j}^{N-1} \{ \exp(u_{i(k)} - u_{j(k)}) p_{ij} \}}{\sum_{i=1}^{N-1} \{ \exp(u_{i(k)}) p_{iN} \} + p_{NN}} + \frac{p_{Nj} \exp(-u_{j(k)}) + p_{jj}}{\sum_{i=1}^{N-1} \{ \exp(u_{i(k)}) p_{iN} \} + p_{NN}} \right] \quad (8)$$

Система уравнений (7) определяет те оптимальные операции, которые должно совершить радиоприёмное устройство (РПУ) над принятым сигналом с целью наилучшего выделения дискретного параметра, последовательность значений которого аппроксимируется простой однородной цепью Маркова с N состояниями.

В качестве критерия различения состояний дискретного параметра m_{k+1} импульсных сигналов примем критерий максимума логарифма отношения апостериорных вероятностей $u_{j(k+1)}$, в соответствии с которым, если

$$u_{j(k+1)} > u_{i(k+1)}, \quad i, j = \overline{1, N-1}, i \neq j, \quad (9)$$

то принимается решение о наличии сигнала со значением дискретного параметра $m_{j(k+1)} = M_j$ ($i \in N$), а если все значения $u_{j(k+1)} \leq 0$, $i = \overline{1, N-1}$, то принимается решение о наличии сигнала с параметром $m_{j(k+1)} = M_N$.

Пусть цепь Маркова принимает четыре равновероятных состояния ($N = 4$) с априорно известным вектором вероятностей начальных состояний

$$P = \| p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \| ^T = \left\| \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \right\|^T \quad (10)$$

и МВП

$$\Pi = \| p_{ij} \|_{4 \times 4}. \quad (11)$$

В этом случае система уравнений (7), (8) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} u_{1k} &= [f_k(M_1) - f_k(M_4)] + u_{1(k-1)} + z_1(\cdot) \\ u_{2k} &= [f_k(M_2) - f_k(M_4)] + u_{2(k-1)} + z_2(\cdot) \\ u_{3k} &= [f_k(M_3) - f_k(M_4)] + u_{3(k-1)} + z_3(\cdot) \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$z_j(\cdot) = \ln \left[\frac{\sum_{i=1, i \neq j}^3 \{ \exp(u_{i(k)} - u_{j(k)}) p_{ij} \}}{\sum_{i=1}^3 \{ \exp(u_{i(k)}) p_{i4} \} + p_{44}} + \frac{p_{4j} \exp\{-u_{j(k-1)}\} + p_{jj}}{\sum_{i=1}^3 \{ \exp(u_{i(k)}) p_{i4} \} + p_{44}} \right], \quad (13)$$

$$j = \overline{1, 3}.$$

Структура радиоприёмного устройства (РПУ), осуществляющего операции (12), (13) в соответствии с выбранным критерием (9), представлена на рис. 1.

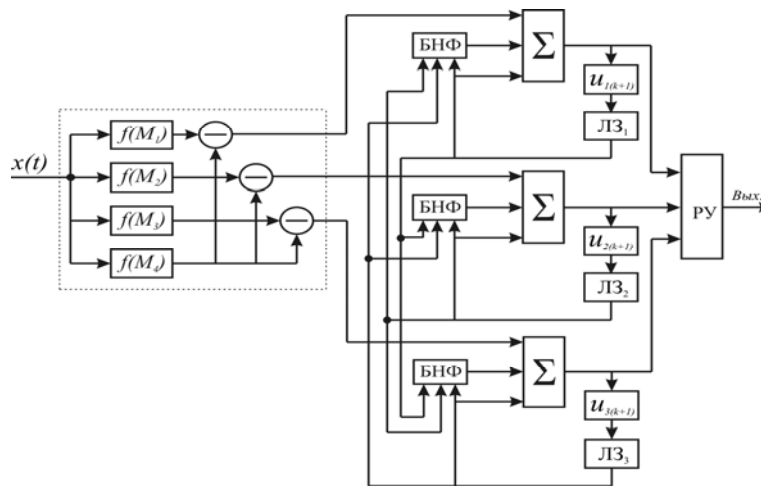


Рис.1

Устройство содержит четыре блока формирования логарифмов функций правдоподобия $f(M_i), i \in N$ и нелинейный фильтр (НФ), состоящий из идеальных сумматоров (Σ), линий задержки на один такт $ЛЗ_1$ $ЛЗ_2$ и $ЛЗ_3$, блоков нелинейных функций (БНФ), осуществляющих нелинейные преобразования z_1, z_2 и z_3 в цепях обратных связей и решающего устройства (РУ).

На рис. 2 приведены исходное (рис. 2, а), зашумлённое (рис. 2, б) и отфильтрованное данным алгоритмом (рис. 2, в) полутоновые изображения с четырьмя состояниями при отношении сигнал/шум на входе нелинейного фильтра – 9 дБ. Исходное изображение получено из 8-разрядного ЦПИ объединением двух старших разрядов.



а



б



в

Рис. 2

Выигрыш фильтрации для данного изображения при различных отношениях сигнал/шум приведён в табл. 1.

Таблица 1

Отношение сигнал/шум	Выигрыш фильтрации
- 3 дБ	1,05 дБ
- 6 дБ	1,75 дБ
- 9 дБ	2,38 дБ

На рис. 3 приведены графики зависимости выигрыша фильтрации искусственных полутоновых изображений, синтезированных с помощью ММ двумерной цепи Маркова, от диагональных коэффициентов p_{ii} матрицы (2) при разных значениях отношения сигнал/шум на входе нелинейного фильтра.

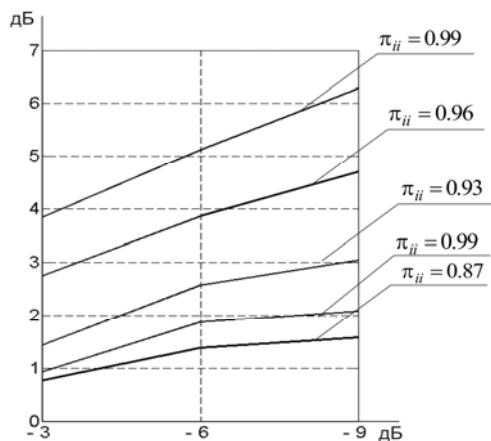


Рис. 3

Алгоритм двумерной нелинейной фильтрации цепи Маркова с несколькими состояниями

Рассмотрим двумерную цепь Маркова с равновероятными ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4$) состояниями M_1, M_2, M_3, M_4 и МВП из состояния M_i к состояниям M_j, M_k, M_l по горизонтали и вертикали, соответственно

$${}^1\Pi = \left\| {}^1p_{ij} \right\|_{4 \times 4}, \quad {}^2\Pi = \left\| {}^2p_{ij} \right\|_{4 \times 4}. \quad (14)$$

Используя теорию фильтрации условных марковских процессов [7] и систему уравнений нелинейной фильтрации одномерной цепи Маркова (12) – (13), за-

пишем систему рекуррентных уравнений нелинейной фильтрации двумерной цепи Маркова в виде:

$$u_j(n_4) = [f(M_j(n_4)) - f(M_4(n_4))] + u_j(n_1) + z_j(u(n_1), {}^1p_{ij}) + u_j(n_2) + z_j(u(n_2), {}^2p_{ij}) - u_j(n_3) - z_j(u(n_3), {}^3p_{ij}) \quad (15)$$

$$(j = \overline{1,3}),$$

где

$$u_j(n_4) = \ln \left[\frac{p_j(n_4)}{p_4(n_4)} \right] \quad (j = \overline{1,3}); \quad p_j(n_4) (j = \overline{1,4}) -$$

апостериорная вероятность состояний элементов ЦПИ, $p_j(n_4) (j = \overline{1,4})$ – разность логарифмов функции правдоподобия состояний элементов ЦПИ; $z_j(\cdot)$ – нелинейная функция вида:

$$z_j(u(n_l), {}^l p_{ij}) = \ln \left[\frac{\sum_{i=1}^3 \{ \exp(u_i(n_l) - u_j(n_l)) {}^l p_{ij} \}}{\sum_{i=1}^3 \{ \exp(u_i(n_l)) {}^l p_{i4} \} + p_{44}} + \frac{\exp(-u_j(n_l)) {}^l p_{4j} + p_{jj}}{\sum_{i=1}^3 \{ \exp(u_i(n_l)) {}^l p_{i4} \} + p_{44}} \right], \quad (16)$$

$$(j = \overline{1,3}, l = \overline{1,3}).$$

Вся априорная информация о статистической зависимости элементов ЦПИ сосредоточена в слагаемых вида (16), где ${}^l p_{ij} (i, j = \overline{1,4}, l = \overline{1,3})$ – элементы матриц вероятностей перехода элементов ЦПИ по горизонтали ${}^1\Pi$, вертикали ${}^2\Pi$ и диагонали ${}^3\Pi$, соответственно.

В качестве критерия различения состояний элементов ЦПИ примем критерий максимума логарифма отношения апостериорных вероятностей $u_j(n_4)$, в соответствии с которым, если $u_j(n_4) > u_i(n_4); i, j = \overline{1,3}; i \neq j,$ (17)

то принимается решение о состоянии элемента изображения $n_4 = M_j$, а если все значения $u_j(n_4) \leq 0$ ($j = \overline{1,3}$), то принимается решение о состоянии элемента изображения $n_4 = M_4$.

На рис. 4 приведены исходное (рис. 4, а), зашумлённое (рис. 4, б) и отфиль-

тованное данным алгоритмом (рис. 4, в) полутоновые изображения с четырьмя состояниями при отношении сигнал/шум на входе нелинейного фильтра – 9 дБ. Исходное изображение получено из 8-разрядного ЦПИ объединением двух старших разрядов.



а



б



в

Рис. 4

Выигрыш фильтрации для данного изображения при различных отношениях сигнал/шум приведен в табл. 2.

Таблица 2

Отношение сигнал/шум	Выигрыш фильтрации
- 3 дБ	2,02 дБ
- 6 дБ	3,32 дБ
- 9 дБ	4,67 дБ

Рассмотрим теперь вместо исходного изображения (рис. 4, а) разрядные двоичные изображения (РДИ), соответствующие двум старшим разрядам. Применим к ним по отдельности алгоритм двумерной фильтрации бинарных цепей Маркова [8]. Результаты фильтрации при различных отношениях сигнал/шум на входе нелинейного фильтра приведены в табл. 3.

Таблица 3

Отношение сигнал/шум	Выигрыш фильтрации	
	8 разряд	7 разряд
- 3 дБ	3,25 дБ	2,18 дБ
- 6 дБ	4,68 дБ	3,61 дБ
- 9 дБ	6,47 дБ	5,03 дБ

Из сравнения результатов табл. 2 и 3 видно, что выигрыш при фильтрации ЦПИ с четырьмя состояниями ниже среднего выигрыша фильтрации РДИ 8-го и 7-го разряда. Это может быть связано с тем, что в случае фазоманипулированных сигналов переход от двух состояний к четырем снижает помехоустойчивость на 3 дБ. Поскольку старшие разряды несут максимальное количество информации, на более младших разрядах разница в выигрыше может быть существенно меньше. Как видно из рис. 3, при уменьшении диагональных коэффициентов МВП выигрыш существенно снижается. Однако снижение выигрыша компенсируется сокращением времени обработки ЦПИ, поскольку фильтрации подвергаются только четыре изображения, а не восемь.

Из табл. 1 и 3 видно, что при двумерной нелинейной фильтрации цепи Маркова с четырьмя состояниями выиг-

рыш в отношении сигнал/шум возрастает в среднем в 2 раза по сравнению с одномерной нелинейной фильтрацией.

Выводы

1. Синтезированные на основе цепей Маркова с несколькими состояниями ($N \geq 2$) алгоритмы нелинейной фильтрации ЦПИ позволяют эффективно реализовать статистическую избыточность ЦПИ для повышения помехоустойчивости их приема. При приеме ЦПИ с $N = 4$ состояниями дискретного параметра импульсных сигналов и отношением сигнал/шум по мощности $r_3^2 = -9$ дБ выигрыш за счёт фильтрации составляет около 5 дБ.

2. Чем больше состояний принимает дискретный параметр импульсных сигналов, с помощью которых передаётся ЦПИ, тем сложнее алгоритм фильтрации и меньше время передачи ЦПИ. При практической реализации алгоритма необходимо искать компромисс.

3. С увеличением количества состояний дискретного параметра импульсных сигналов, с помощью которых передаётся ЦПИ, становится труднее скомпенсировать потери реализацией статистической избыточности ЦПИ.

Библиографический список

1. Дерин, Х. Случайные процессы марковского типа с дискретными аргументами [Текст] / Х. Дерин, П. Келли // ТИИЭР. – 1989. – Т. 77. – № 10. – С.42.
2. Крашенинников, В.Р. Основы теории обработки изображений [Текст]: учеб. пособие. – Ульяновск, 2003.
3. Быков, В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике [Текст] / В.В. Быков. – М.: Сов. радио, 1971. – 383 с.
4. Петров, Е.П. Моделирование многомерных дискретнозначных марковских процессов [Текст] / Е.П. Петров, И.С. Трубин, Н.Л. Харина // Проблемы обработки информации: Вестн. ВНИЦ Верхне-Волжского отделения АТН РФ. – 2006. – Вып. 1(6). – С. 52-60.

5. Петров, Е.П. Математическая модель цифровых полутоновых изображений Земли из космоса [Текст] / Е.П. Петров, Е.В. Медведева, Н.Л. Харина // Материалы II Всероссийской НТК «Актуальные проблемы ракетно-космической техники». – Самара, 2011. – С. 179-185.

6. Петров, Е.П. Модель цепи Маркова с несколькими состояниями [Текст] / Е.П. Петров, Н.Л. Харина, Е.Д. Ржаникова // Физика и радиоэлектроника в медицине и экологии: докл. 10-й междунар. науч.-

техн. конф. – Владимир, 2012. – Т.1. –С. 211-215.

7. Амиантов, И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи [Текст] / М.: Сов. радио, 1971. - 416 с.

8. Петров, Е.П. Математические модели и алгоритмы фильтрации цифровых полутоновых изображений на основе сложных цепей Маркова [Текст] / Е.П. Петров, Н.Л. Харина, В.Ф. Харюшин // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – №3. – С.52-57.

NON-LINEAR IMAGE FILTRATION BASED ON MARKOVIAN NETWORKS WITH SEVERAL STATES

© 2013 Ye. P. Petrov, N. L. Kharina, Ye. D. Rzhanikova

Vyatka State University, Kirov

Digital half-tone images (DHI) represented by g-digit binary numbers often possess great statistical redundancy which can contribute to increasing DHI reception noise immunity. The paper presents algorithms of DHI non-linear filtration based on Markovian networks with several states that make it possible to reduce the time of image transmission. The filtration algorithms are investigated in the presence of white Gaussian noise. The results of the investigation confirm the theoretical assumptions of the possibility of improving DHI reception quality without the increase in energy resources on the transmitting side of the communication channel.

Mathematical model, Markov circuit, digital half-tone picture, casual Markov field, a matrix of probabilities of transition, non-linear image filtering, white Gaussian noise.

Информация об авторах

Петров Евгений Петрович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет, г. Киров. E-mail: EPetrov@mail.ru. Область научных интересов: исследование алгоритмов и устройств цифровой фильтрации дискретных коррелированных сигналов, цифровая обработка изображений.

Харина Наталья Леонидовна, кандидат технических наук, доцент кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет, г. Киров. E-mail: Natal_res@mail.ru. Область научных интересов: многомерные марковские поля в обработке изображений.

Ржаникова Елена Дмитриевна, аспирант кафедры радиоэлектронных средств, Вятский государственный университет, г. Киров. E-mail: lavrova_elena@bk.ru. Область научных интересов: многомерные марковские поля в обработке изображений.

Petrov Eugeny Petrovich, Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Department of Radioelectronic Devices, Vyatka State University. E-mail: EPetrov@mail.ru. Area of research: algorithms and devices of digital filtration of discrete correlated signals, digital image processing.

Harina Natalya Leonidovna, Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Department of Radioelectronic Devices, Vyatka State University. E-mail: Natal_res@mail.ru Area of research: multidimensional Markovian fields in digital image processing.

Rzhanikova Elena Dmitrievna, postgraduate student of the Department of Radioelectronic Devices, Vyatka State University. E-mail: lavrova_elena@bk.ru. Area of research: multidimensional Markovian fields in digital image processing.