

## МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗОНЕ УГЛОВОГО КОНЦЕНТРАТОРА

© 2006 А.Н. Шацкий, Я.Ю. Григорьев, О.В. Патлина

Институт Машиноведения и Metallургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

В статье на примере задач об одноосном растяжении цилиндрических и плоских образцов с угловыми вырезами рассматривается подход к определению пластических деформаций в окрестности вершины углового выреза.

На примере задач об одноосном растяжении цилиндрических и плоских образцов с угловыми вырезами рассматривается подход к определению пластических деформаций в окрестности вершины углового выреза. При расчете тело образца предполагается составным: материал в целом упруго-пластический, но в малой области в окрестности особой точки – вершины выреза материал считается жесткопластическим, что позволяет реализовать численно-аналитический подход к определению полей деформаций.

При пластическом течении в окрестности угловой точки деформации и напряжения распределены крайне неоднородно. Для поля напряжений и деформаций угловая точка является особой, то есть предельные значения тензоров по различным направлениям не совпадают.

Определение поля деформаций численными методами приводит к значительным математическим трудностям, так как операция определения тензора деформаций включает в себя операцию дифференцирования перемещений по пространственным переменным.

Рассмотрим окрестность вершины углового выреза, где материал является идеальным жесткопластическим. Эту область будем представлять как суперэлемент (рис. 1). Жесткопластическая область состоит из прямоугольных треугольников  $ABC$ ,  $AB'C'$  и  $EAE'$ , в которых реализуется однородное напряженное состояние, и двух веерообразных линий скольжения  $BAE$  и  $B'AE'$ . Границы выреза  $AC$  и  $AC'$  предполагаются прямолинейными и свободными от напряжений, поэтому в  $ABC$  и  $AB'C'$  первое главное напряжение  $\sigma_1$  равно  $2k$  и направлено вдоль свободных поверхностей.

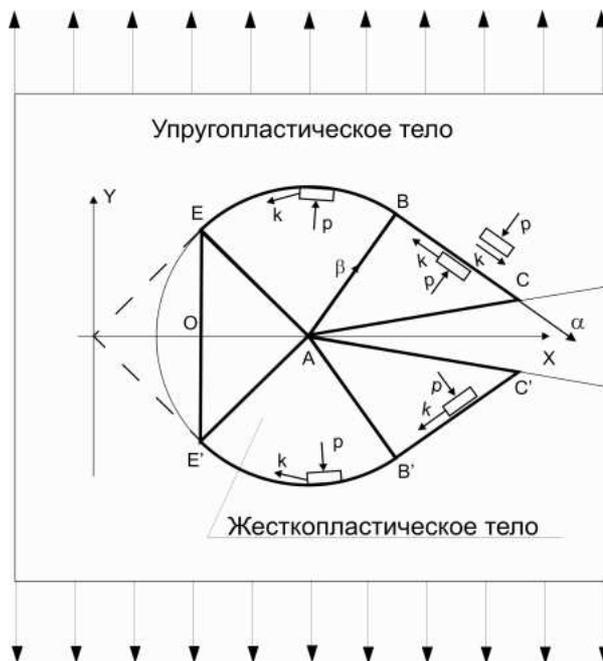


Рис.1. Окрестность вершины углового выреза

Граничные условия на  $CBEE'BC'$  определяются согласно [1]. Обозначим за  $\theta$  угол наклона касательной к  $\alpha$ -линии скольжения, отсчитываемый в кратчайшем направлении от оси  $x$ . Гидростатическое давление  $p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  определяются в виде:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} p - k \sin(2\theta) & k \cos(2\theta) & 0 \\ k \cos(2\theta) & p + k \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = k + 2k \left( \theta + \frac{2\pi}{9} \right)$$

$$\text{на } BC: \theta = -\frac{2\pi}{9},$$

$$\text{на } BE: -\frac{2\pi}{9} < \theta < \frac{\pi}{4}$$
(1)

на  $EO$ :  $\theta = \frac{\pi}{4}, p = k(\pi + 1),$   
 $\sigma_{xx} = k\pi, \sigma_{yy} = k(\pi + 2)$

Пластическое течение предполагается симметричным относительно оси  $Ox$ , поэтому напряжения на противоположной границе совпадают с (1).

Жесткопластический анализ позволяет рассчитать предельные поля тензоров деформаций в окрестности точки  $A$ .

В качестве меры деформации выберем тензор Альманси  $E_{ij}$ :  $E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0).$

Определение деформаций связано с интегрированием системы уравнений, связывающих тензор деформаций  $E_{ij}$  и тензор скоростей деформаций  $\epsilon_{ij}$ :

$$\frac{DE_{ij}}{Dt} = \frac{dE_{ij}}{dt} + E_{ik}V_{k,j} + E_{jk}V_{k,i} = \epsilon_{ij}, \quad (2)$$

где  $\epsilon_{ij} = \frac{V_{i,j} + V_{j,i}}{2}$ ,  $V_i$  - скорость перемещений,  $x_i^0, x_i$  - лагранжевы и эйлеровы координаты,  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ .

Данная система уравнений при предельном переходе в поле линий скольжения жесткопластического суперэлемента, при плоской деформации сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{df}{d\alpha} \cdot f + g \cdot \cos(2(\theta - \psi)) = 0,$$

$$\frac{dg}{d\alpha} f + \left( e - \frac{1}{2} \right) \cos(2(\theta - \psi)) = 0,$$

$$2g \frac{d\theta}{d\alpha} f - \left( e - \frac{1}{2} \right) \sin(2(\theta - \psi)) - g = 0, \quad (3)$$

$$f = \frac{(u - (a' \cos \alpha + b' \sin \alpha))}{\left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right)},$$

где  $e = \frac{(E_{11} + E_{22})}{2}$ ,  $g = \frac{\sqrt{(E_{11} - E_{22})^2 + 4E_{12}^2}}{2}$ ,

$\theta, \psi$  - углы наклона первого (алгебраически наибольшего) главного направления тензоров  $E_{ij}, \epsilon_{ij}$ ;  $\alpha$  - угол наклона  $\alpha$ -линии к оси  $x_1$ ;  $u, v$  - проекции скоростей перемещений на  $\alpha, \beta$  - направления;

$m = a'i + b'j$  - вектор скорости возможных изменений положения вершины углового выреза. Поле скоростей внутри жесткопластической области определяется соотношениями Гейрингер [1]:

$$du - v d\theta = 0 \quad (\alpha - \text{линия})$$

$$dv + u d\theta = 0 \quad (\beta - \text{линия}).$$

### Задача о растяжении полосы с угловым вырезом.

Решение задачи состоит из четырех этапов.

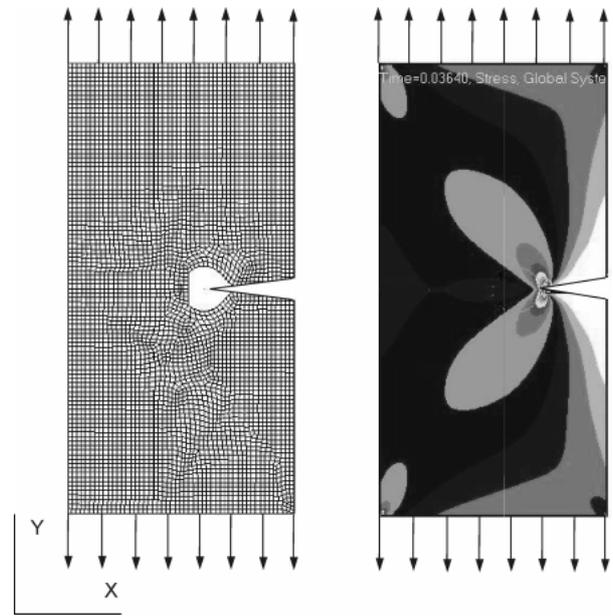


Рис.2. Заданные растягивающие перемещения

На первом применяется численный комплекс MSC.Marc 2005.

Полоса с V-образным вырезом находится в условиях плоской деформации. На верхней и нижней гранях полосы заданы растягивающие перемещения  $U$  вдоль оси  $Y$ , соответственно вверх и вниз (рис. 2). Материал полосы предполагается упрочняющимся упругопластическим. Пластическое состояние определяется по критерию Мизеса.

Определим параметры полосы.

Длина  $l=300$  мм, ширина  $b=150$  мм, угол выреза  $2\delta=10^\circ$ , глубина выреза  $h=30$  мм. Материал полосы: упрочняющийся упругопластический алюминий ( $E=10000$  Н/мм<sup>2</sup>,  $\nu=0.33$ , упругопластические свойства задавались дискретным заданием точек на

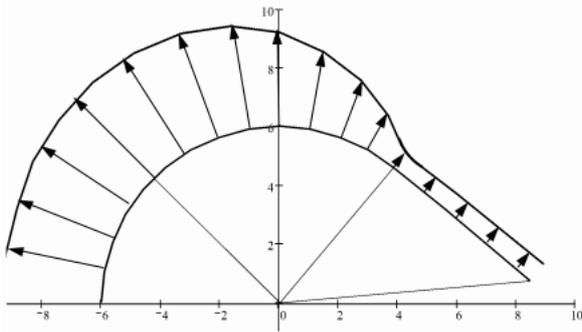


Рис.3. Распределение нормальных скоростей

кривой  $\sigma - \varepsilon$ , предел текучести  $\sigma_T = 18.225$  Н/мм<sup>2</sup>, постоянная текучести  $k = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ ). Прикладываемые нагрузки: перемещения по оси  $OY$   $U = 6$  мм.

При прямом применении пакета MSC.Marc 2005 к решению задачи при вышеуказанных условиях возникает проблема сходимости вычислительных процессов.

Для преодоления этой трудности в окрестности вершины выреза вводится рассмотренный суперэлемент.

### Алгоритм расчета

На первом этапе определяется размер жесткопластической области. За характеризующий размер жесткопластической области принимается радиус веера характеристик  $R$ . Размер области выбирается из соображений минимальности  $R$  при неперевышении предела текучести.  $R$  зависит от величины растягивающей нагрузки, а также от материала, из которого сделана полоса.

Для реализации в MSC.Marc 2005 жесткопластическая область исключается. Действие отброшенной области на полосу заменяется напряжениями, приложенными вдоль всей жесткопластической границы.

Граничные условия определяются соотношениями (1).

Результатом первого этапа является распределение нормальных скоростей (рис. 3), полученное на границе жесткопластической области.

В ходе исследования рассматривались различные материалы, нагрузки и радиусы жесткопластической области. Было установлено, что при больших нагрузках граничные

условия, приложенные к суперэлементу, не влияют на распределение напряжений и перемещений в окрестности жесткопластической области. Напряжения отличаются на десятые доли процента, а перемещения – на процент. Также было замечено, что во избежание больших погрешностей, радиус  $R$  жесткопластической области должен быть соизмерим с растягивающими перемещениями  $U$ .

На втором этапе по распределению скоростей на границе суперэлемента определяется поле скоростей внутри жесткопластической области.

При определении поля скоростей в области  $AEE'$  предполагается линейное распределение скоростей  $u, v$  соответственно, на линиях  $AE, AE'$  (рис. 4). В этом случае это распределение полностью определяется скоростями перемещений в точках  $E, E'$ . Из симметрии пластического течения относительно оси  $Ox$  при  $\theta = \frac{\pi}{4}$  следует, что в точке

$E$   $u_x = u_y$ . В этом случае предельные компоненты скорости движения частиц материала в точке  $A$  со стороны области  $AEE'$  определяется в виде  $u = v = \frac{u_y}{\sqrt{2}}$ . распределение скоростей  $v$  на линии  $\alpha$  определяет

величину  $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ . Найденные величины  $u$  и  $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$  определяют коэффициент  $f$  системы уравнений (3) при заданном векторе  $m = a'i + b'j$ .

На третьем этапе определяются возможные поля распределений тензора деформаций в окрестности точки  $A$ , путем интегрирования системы (3) при возможных скоростях  $m$ . Действительное движение точки  $A$  находится из условия:

$\inf_m \sup_{\delta A} E_1$ , где  $\sup_{\delta A} E_1$  - наибольшее значение первого алгебраически наибольшего главного значения тензора  $E_{ij}$  в окрестности точки  $A$ .

Возможна другая эквивалентная формулировка этого условия [3]:

$\inf_m \sup_{\delta A} W$ , где  $W$  - удельная диссипация энергии.

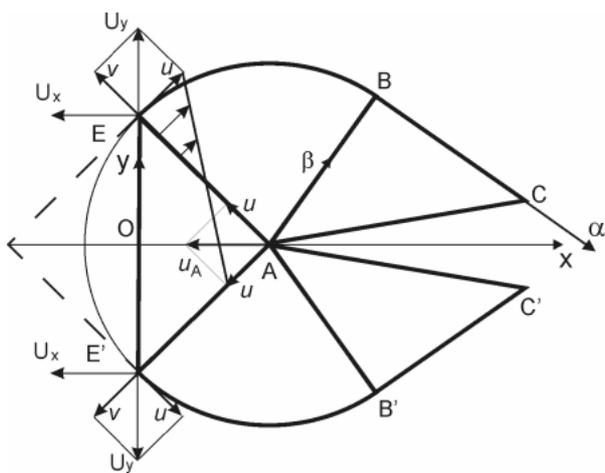


Рис.4. Линейное распределение скоростей

На четвертом этапе по найденному значению  $m$  определяется новое положение точки  $A$  на заданном шаге времени.

На этом этапе возможны два варианта пластического течения [4]:

1) при максимально возможных деформациях материала.

2) при допустимых деформациях материала, определяемых характеристикой  $E_*$ .

Данный подход реализует алгоритм, предложенный в работе [4].

#### Список литературы

1. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.529 с.

2. Хромов А.И. Деформации и разрушения жесткопластических тел. // Владивосток: Дальнаука, 1996.

3. Хромов А.И., Козлова О.В. разрушение жесткопластических тел. Константы разрушения// Владивосток: Дальнаука, 2005.

4. Хромов А.И., Буханько А.А., Степанов С.Л. Концентраторы деформаций// ДАН, 2006, № 1.

## CALCULATION METHOD OF LIMITING PLASTIC STRAINS IN THE ANGULAR CONCENTRATOR ZONE

© 2006 A.N. Shatskij, Y.U. Grigoriev, O.V. Patlina

The approach to determination of plastic strains near tip of angular notch is considered by the example of problems of the uniaxial stretching of cylindrical and flat samples with angular notches. At calculation we propose, that the sample body is compound: the material is elastic-plastic as a whole, but we propose that the material is rigid-plastic in small area near critical point (the tip of the notch). This assumption allows realizing the numerical-analytical approach to determination of strain fields.