

УДК 537.86

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ТЕОРИЯ АНТЕНН НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2013 В. А. Неганов, Д. П. Табаков

Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ), г. Самара

Изложены основы самосогласованной теории антенн. В качестве основного инструмента самосогласованного анализа предложены интегральные представления электромагнитного поля, переходящие на излучающей поверхности при постановке граничных условий в систему интегральных уравнений относительно неизвестных распределений поверхностных токов. Представлены результаты самосогласованного электродинамического анализа для некоторых типов антенн.

Самосогласованность, интегральные уравнения Фредгольма, сингулярные интегральные уравнения, некорректные задачи, интегральные представления электромагнитного поля.

Введение

подавляющее большинство инженерных расчётов излучающих структур, не предполагающих использования систем автоматизированного проектирования, как правило, выполняется в несамосогласованной постановке, под которой чаще всего можно понимать решение только внешней электродинамической задачи при заданных из каких-либо физических соображений распределениях тока. Основные недостатки подобного подхода: некорректность расчёта ближних полей, отсутствие предельного перехода от поля в ближней зоне антенны к токам на её элементах и невыполнение граничных условий на элементах излучающей структуры.

Более того, относительно точные распределения токов известны только для ограниченного числа излучающих структур. Поэтому в указанных случаях может быть неверно определено не только ближнее, но и дальнее поле антенны.

Под самосогласованностью понимается совместное последовательное решение внешней и внутренней электродинамической задачи с привлечением математического аппарата интегральных уравнений [1].

1. Корректные и некорректные задачи

Под некорректными задачами теории антенн следует понимать задачи, в которых нарушаются основные принципы электродинамики. Некорректность поставленных задач обусловлена несколькими факторами. Один из них – некорректность физических моделей задач [1], заключающаяся прежде всего в использовании тонкопроволочного приближения, что приводит к невозможности записи общепринятой связи между продольной поверхностной плотностью тока на антенне и напряжённостью магнитного поля. Пример – физические модели тонкого электрического вибратора и диполя Герца.

Второй фактор – некорректная математическая модель структуры. Неправомочные математические выкладки применительно даже к самосогласованной физической модели структуры также могут привести к отсутствию предельного перехода интегральных представлений электромагнитных полей (ЭМП) к поверхностным плотностям электрического тока $\vec{h}^e = [\vec{H}, \vec{n}_0]$ и магнитного тока $\vec{h}^m = [\vec{n}_0, \vec{E}]$ на базовой поверхности S (\vec{n}_0 – внешняя нормаль к поверхности S).

Наконец, некорректность может быть обусловлена использованием несогласованных математических моделей интегральных представлений электромагнитного поля вблизи базовой поверхности S , на которой сформулированы сингулярные интегральные уравнения (СИУ) для корректного определения на ней поверхностных плотностей электрического и магнитного токов.

Типичным примером некорректной задачи является решение интегральных уравнений (ИУ) Халлена и Поклингтона. Интегральное уравнение Халлена часто применяется для расчёта распределения излучающего тока и входного сопротивления вибраторных антенн. Записанное относительно полного тока $I(z)$ на симметричном вибраторе, оно имеет вид [2]

$$\int_{-l}^l I(z')G(z, z')dz' = C \cos kz - i \frac{2pU}{W_c} \sin k|z|, \quad (1)$$

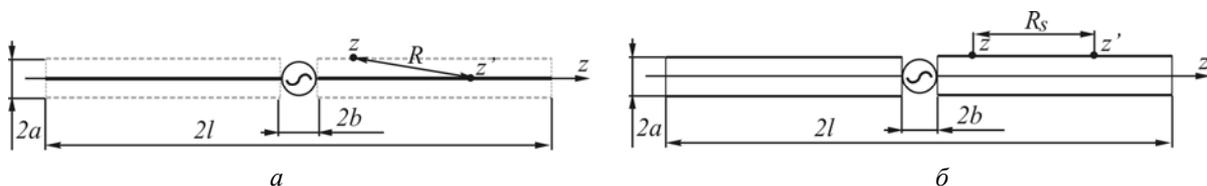


Рис. 1. Физические модели симметричного электрического вибратора: а – тонкопроволочная, б – трубчатая

Более того, у бесконечно тонкой нити тока поверхности как таковой не существует, а зазор, в который помещён генератор сторонней переменной ЭДС с соответствующим ему напряжением U , имеет бесконечно малую ширину, т.е. $2b \rightarrow 0$. В некоторых случаях подобные допущения приводят к неустойчивости и физической неадекватности решения [1]. Несмотря на это, у ИУ Халлена (1) есть несомненное достоинство – простое выражение для ядра уравнения.

Для данной физической модели можно получить в известном смысле более общее, но также физически некорректное ИУ Поклингтона [2]:

где $G(z, z') = e^{-ikR(z, z')} / R(z, z')$ – ядро ИУ; $R(z, z') = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}$ – расстояние между точкой источника $q\{r' = 0, z'\}$, расположенной на оси вибратора, и точкой наблюдения $p\{r = a, z\}$, находящейся на идеально проводящей цилиндрической поверхности; W_c – характеристическое сопротивление среды; a – радиус цилиндра; C – неизвестная постоянная; $k = 2p / l$ – волновое число.

Физические модели симметричного электрического вибратора, соответствующие ИУ Халлена, приведены на рис. 1: а – тонкопроволочная модель; б – трубчатая модель. На рис. 1, а показан фактически искусственно введённый разрыв (пространственное разнесение) между током проводимости на нити ($r = 0$) и полем на идеально проводящей цилиндрической поверхности ($r = a$).

$$\int_{-l}^l I(z') \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \right) G(z, z') dz' = \frac{4p}{iW_c} E^{ct}(z), \quad (2)$$

где $E^{ct}(z)$ – напряжённость электрического поля, создаваемая генератором сторонней ЭДС и равная нулю всюду, за исключением области зазора:

$$E_i^{ct}(z) = \frac{1}{2b} \begin{cases} 1, & z \in [-b; b], \\ 0, & z \notin [-b; b], \end{cases}$$

Рассмотрим теперь трубчатую модель вибратора (рис. 1, б). В этом случае поверхность протекания тока совмещается с поверхностью наблюдения, что соответ-

стует переходу от ИУ Поклингтона и Халлена к сингулярным интегральным уравнениям. Для электрического вибратора можно получить СИУ с логарифмиче-

$$\int_{-l}^l I(z')R(z, z')dz' + \int_{-l}^l I(z') \ln |z - z'| dz' + \int_{-l}^l \frac{I(z')}{(z - z')^2} dz' = s E^{ct}(z), \quad (3)$$

где $R(z, z')$ – регулярное ядро СИУ; s – константа.

Для трубчатой модели также можно получить СИУ с особенностью типа Коши, записанное относительно производной тока $J(z) = \partial I(z) / \partial z$ [2]:

$$\int_{-l}^l J(z')R(z, z')dz' + \int_{-l}^l \frac{J(z')}{z - z'} dz' = s E^{ct}(z), \quad (4)$$

где $R(z, z')$ – регулярное ядро СИУ, s – константа.

Сингулярное интегральное уравнение (4) было получено для трубчатой модели вибратора (рис. 1, б).

ской и гиперсингулярной особенностями, записанное относительно полного тока $I(z')$, ($z \in [-l; l]$):

Трубчатая модель физически корректна, и проблем с устойчивостью при решении полученного СИУ не возникает. Его недостаток – относительная сложность выражения ядра.

На рис. 2 приведены сравнительные результаты расчётов интегральных уравнений для полуволнового вибратора: а – ИУ Халлена с конечным зазором; б – СИУ; сплошные кривые – $\text{Re} I(z)$, штриховые кривые – $\text{Im} I(z)$; $l = 1\text{ м}$, $a = l / 75$, $2b = 0.01l$. Расчёты произведены методом сшивания в дискретных точках [3], число сегментов $N = 101$.

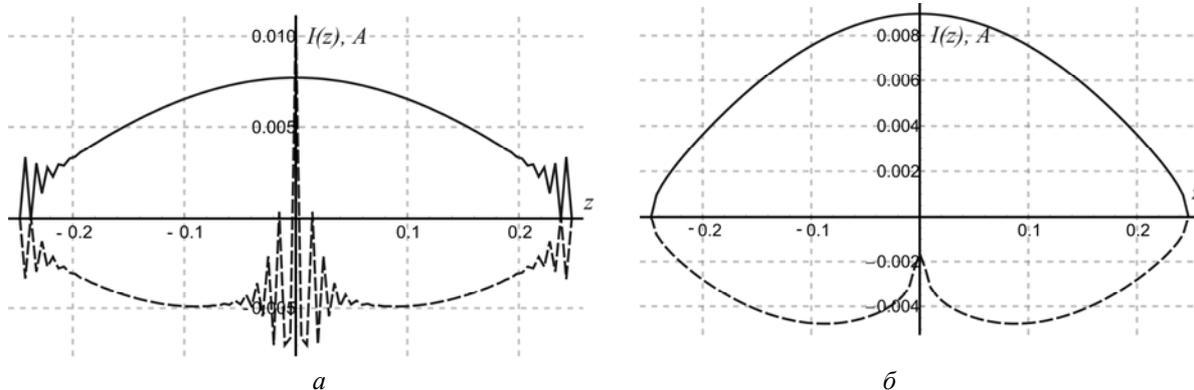


Рис. 2. Результаты расчёта токов для тонкопроволочной (а) и трубчатой (б) моделей вибратора

Таким образом, на примере сравнительно простых излучателей были продемонстрированы результаты решения электродинамической задачи в корректной и некорректной постановках. Следует отметить, что при определённом выборе параметров моделирования результаты расчётов в рамках тонкопроволочной модели являются корректными и устойчивыми [4].

2. Интегральные представления электромагнитного поля

Самосогласованный электродинамический анализ излучающей (переизлучающей) структуры предполагает:

- решение внутренней электродинамической задачи – определение токов на поверхности структуры при заданных граничных условиях;
- решение внешней электродинамической задачи – расчёт электромагнитного

поля (ЭМП) в необходимых точках пространства с помощью определенных ранее токов.

Решение этих задач можно объединить с помощью использования в основе электродинамического анализа интегрального (ИП) либо интегро-дифференциального (ИДП) представления электромагнитного поля. ИП ЭМП опре-

деляет связь ЭМП в заданной точке пространства с токами излучающей структуры и фактически полностью описывает её с точки зрения электродинамики. В случае задания граничных условий на поверхности структуры ИП переходит в интегральное уравнение (ИУ) либо в систему интегральных уравнений для определения неизвестных токов.

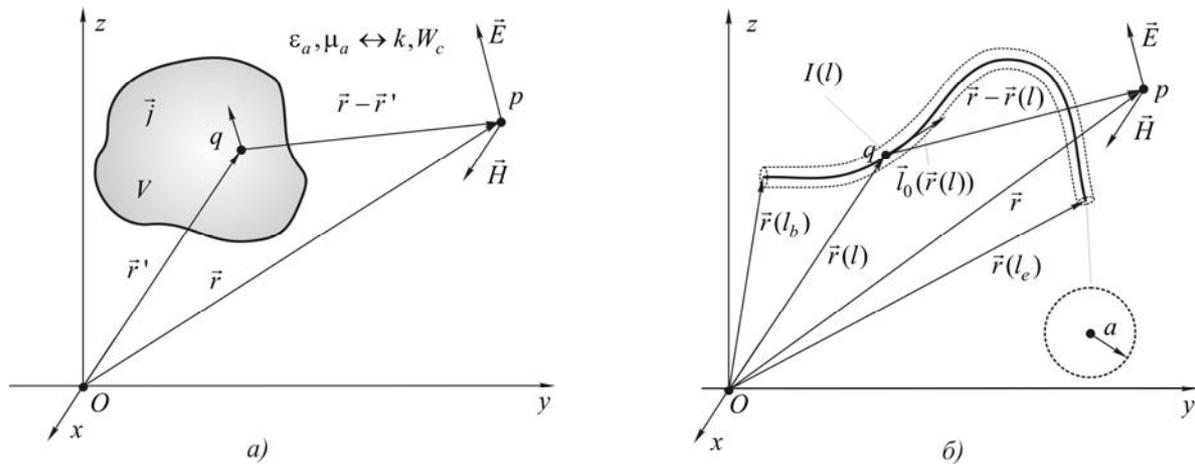


Рис.3. К интегральным представлениям электромагнитного поля (а), геометрия тонкопроволочной структуры (б)

Физическая модель задачи может быть как корректной, так и некорректной (построенной, например, с использованием тонкопроволочного приближения). Второй тип моделей более предпочтителен в случае отсутствия надобности определения поля вблизи поверхности антенны. Таким образом, ИП ЭМП является удобным и универсальным инструментом для построения математических моделей и полного электродинамического анализа излучающих структур. Наиболее часто встречающиеся в литературе ИП ЭМП записываются в виде [5]

$$\vec{E} = \frac{W_c}{ik} \left(k^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \right); \vec{H} = \nabla \times \vec{A}. \quad (5)$$

Здесь \vec{E} , \vec{H} – векторы напряженностей электрического и магнитного полей;

$W_c = \sqrt{m_a/e_a}$ – волновое сопротивление среды;

$$k = w \sqrt{e_a m_a} = 2\pi/l$$

– волновое число; e_a и m_a – соответственно абсолютная диэлектрическая и абсолютная магнитная проницаемости среды; w – круговая частота; l – длина волны;

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int_V \vec{j}(q) G(\vec{r}, \vec{r}') dV$$

– векторный электрический потенциал \vec{A} в точке наблюдения p , создаваемый объёмной плотностью тока \vec{j} ; $\vec{r}(p) = \vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый в точку наблюдения; q – точка источника; $\vec{r}(q) = \vec{r}'$ – радиус-вектор, проведённый в точку источника (рис.3 а). Интегрирование производится по точкам источника q , находящимся в объёме V .

$$\text{Выражение } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-ikR(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))}{4\pi R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}$$

называется функцией Грина свободного пространства,

$$R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (6)$$

– расстояние между точкой источника и точкой наблюдения.

Недостатком ИП (5) можно считать наличие дифференциальных операторов, имеющих достаточно сложный вид в

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{W_c}{ik} \int_V (j(q)k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\nabla_q \cdot j(q))(\mathbf{r} - \mathbf{r}') B(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dV; \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_V ((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times j(q)) B(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV. \end{aligned} \quad (7)$$

Данное представление полностью эквивалентно представлению (5), но не содержит дифференциальных операторов, применяющихся к точке наблюдения.

различных системах координат, что существенно усложняет аналитические выводы при построении ИП ЭМП конкретных излучающих структур.

В [6] получено интегро-дифференциальное представление ЭМП, содержащее только оператор дивергенции, применяющийся к источникам поля:

Из выражений (7) легко получаются ИП ЭМП тонкопроволочной структуры (ТПС, [6]):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_L I(l') \mathbf{K}_a^F(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) dl', \quad F \equiv E, H. \quad (8)$$

Здесь $I(l')$ – распределение тока по образующей L ТПС;

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_a^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) &= \frac{W_c}{ik} \left(l_0(l') k^2 G_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) + \frac{\partial}{\partial l'} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}(l')) B_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l'))) \right); \\ \mathbf{K}_a^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) &= ((\mathbf{r} - \mathbf{r}(l')) \times l_0(l')) B_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) \end{aligned}$$

– ядра интегральных представлений;

$$F_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) = F(R_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l'))), \quad F \equiv G, B$$

– компоненты ядер;

$$R_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}(l')) = \sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(l')|^2 + a^2}$$

– регуляризованное расстояние между точкой источника и точкой наблюдения (в качестве параметра регуляризации выступает радиус a провода).

В случае подстановки граничного условия:

$$l_0(\mathbf{r}(l)) (\mathbf{E}^{(in)}(\mathbf{r}(l)) + \mathbf{E}(\mathbf{r}(l))) = 0 \quad (9)$$

в (8) при $F \equiv E$ получается известное интегральное уравнение для определения тока произвольной тонкопроволочной структуры, приведённое, например, в [7]. Вектор $\mathbf{E}^{(in)}$ создаётся сторонними ЭМП различного рода.

Рассмотрим ИП ЭМП некорректной модели электрического вибратора. В цилиндрической системе координат оно будет иметь лишь три компонента – E_r, E_z и H_j :

$$\begin{aligned} E_r(r, z) &= s \int_{-l}^l I(z') \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} G(r, z, z') dz', \quad E_z(r, z) = s \int_{-l}^l I(z') \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G(r, z, z') dz', \\ H_j(r, z) &= -\frac{k}{4\pi k} \int_{-l}^l I(z') \frac{\partial}{\partial r} G(r, z, z') dz', \quad G(r, z, z') = \frac{e^{-ik\sqrt{r^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{r^2 + (z-z')^2}}, \quad s = \frac{W_{\tilde{n}}}{4\pi ik}. \end{aligned} \quad (10)$$

Видно, что при $r = 0$ интегралы расходятся, т.е. на нити с током обратный переход от тока к полю $\{E_r, E_z, H_j\}$ невозможен, а при $r = a$ устранимые особенности отсутствуют. Таким образом, тонкопроволочное приближение – одна из причин разрыва по полю в ближней зоне антенны.

Для трубчатой модели в [4] записаны сингулярные ИП ЭМП:

$$E_i(r, z) = \int_{-l}^l J(z') [G_i(r, z - z') + S_i(r, z - z')] dz', i = r, z;$$

$$H_j(r, z) = \int_{-l}^l I(z') [G_j(r, z - z') + S_j(r, z - z')] dz',$$

(11)

где G – регулярные ядра; S – сингулярные ядра ($S(r \rightarrow a, z \rightarrow z') \rightarrow \infty$). Следует отметить, что для (11) при $r = a, z \in [-l; l]$ аналитически точно выполняются граничные условия:

$$H_j(a, z) = h_z^e(z); E_r(a, z) = -\frac{1}{iwe_a} \frac{\partial h_z^e(z)}{\partial z};$$

$$E_z(a, z) = -E_z^{ct}(a, z),$$

а СИП ЭМП для E_z переходит в СИУ (4), тогда как в (10) этого принципиально не наблюдается.

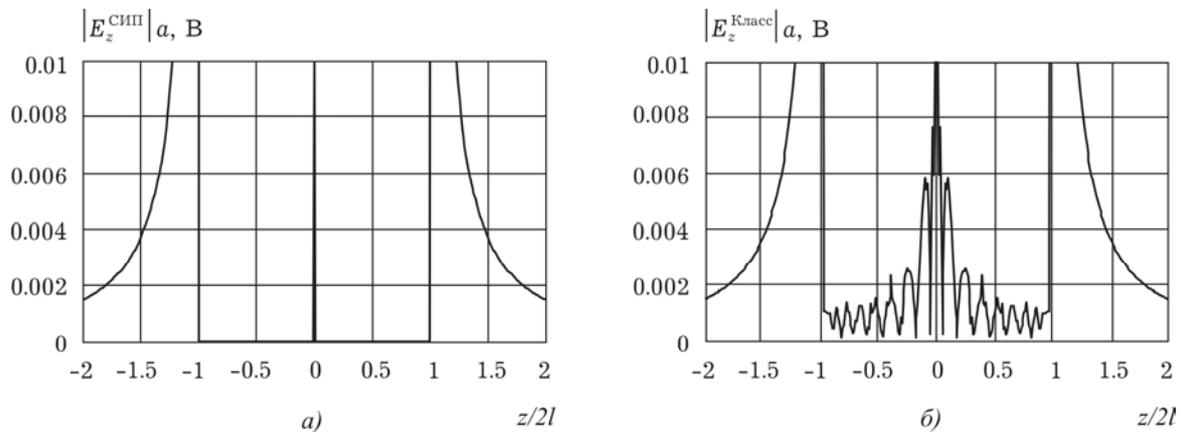


Рис. 4. Результаты расчёта ближнего поля в рамках трубчатой (а) и тонкопроволочной (б) моделей вибратора

На рис. 4 представлены численные результаты сравнительного расчёта компоненты E_z на поверхности трубчатого вибратора с помощью двух типов ядер – ядра с особенностью Коши, полученного для трубчатой модели вибратора методом СИП (а), и некорректного ядра, полученного в тонкопроволочном приближении (б); $2l = 0.5l$. В расчётах применялся ток, рассчитанный с помощью СИУ (4). Анализ рисунков показывает, что при использовании некорректного ядра граничное условие на поверхности вибратора не выполняется.

Следует отметить, что сингулярные ИП ЭМП трубчатого вибратора можно легко получить из ИП ЭМП (7), а ИП

ЭМП некорректной модели вибратора – из ИП ЭМП тонкопроволочной структуры (8).

3. Результаты самосогласованного расчёта некоторых излучающих структур

Интегральные представления электромагнитного поля открывают возможность самосогласованного анализа не только простейших излучателей, но и многих других типов достаточно сложных антенн. В данном разделе приведём результаты расчётов некоторых излучающих структур с помощью ИП ЭМП (8).

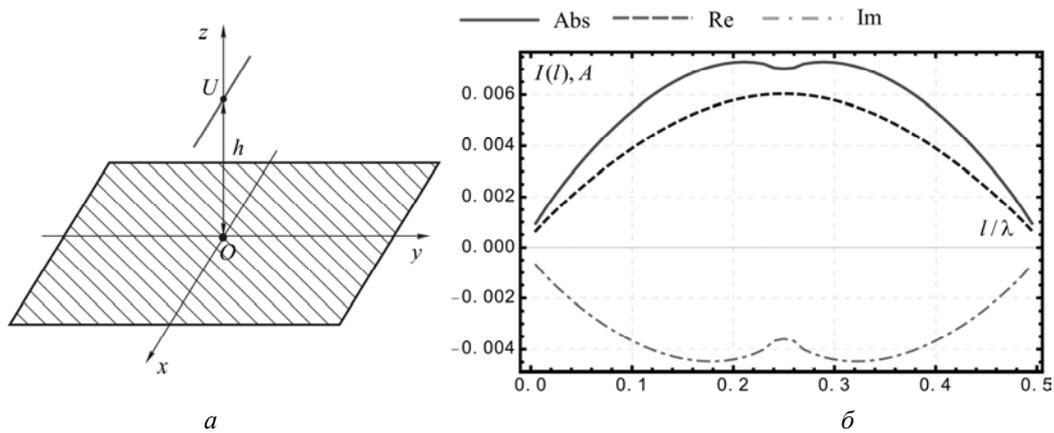


Рис. 5. Тонкий электрический вибратор над тонкопроволочным экраном конечных размеров $h \times h = 0.5l$: а – геометрия, б – распределение тока на вибраторе

На рис.5, а представлен полуволновый электрический вибратор, расположенный над экраном конечных размеров $h \times h$. Высота расположения вибратора над экраном предполагалась равной $0.5l$. В типовых расчётах обычно полагают, что экран идеально проводящий и бесконечно протяжённый, что существенно упрощает модель. Данная же модель позволяет оценить величину лепестка обратного излучения в зависимости от размеров экрана. На рис.5, б показаны результаты расчёта распределения тока на вибраторе с учётом влияния экрана. На рис.6 показаны нормированные амплитудные диаграммы направленности в меридианальной плоскости для экранов

различных размеров. Видно, что при $h \times h = 1.5l$ величина лепестка обратного излучения пренебрежимо мала. Задача определения размеров экрана также актуальна для спиральных антенн.

На рис.7, а представлена геометрия директорной антенны, состоящей из активного вибратора L_a , рефлектора L_r и трех директоров $L_{d1} \dots L_{d3}$. На рис.7, б представлены результаты расчёта распределений тока на элементах директорной антенны, а на рис.8 – нормированные амплитудные диаграммы направленности в диапазоне отношений $L_a / l = 0.45 \dots 0.51$.

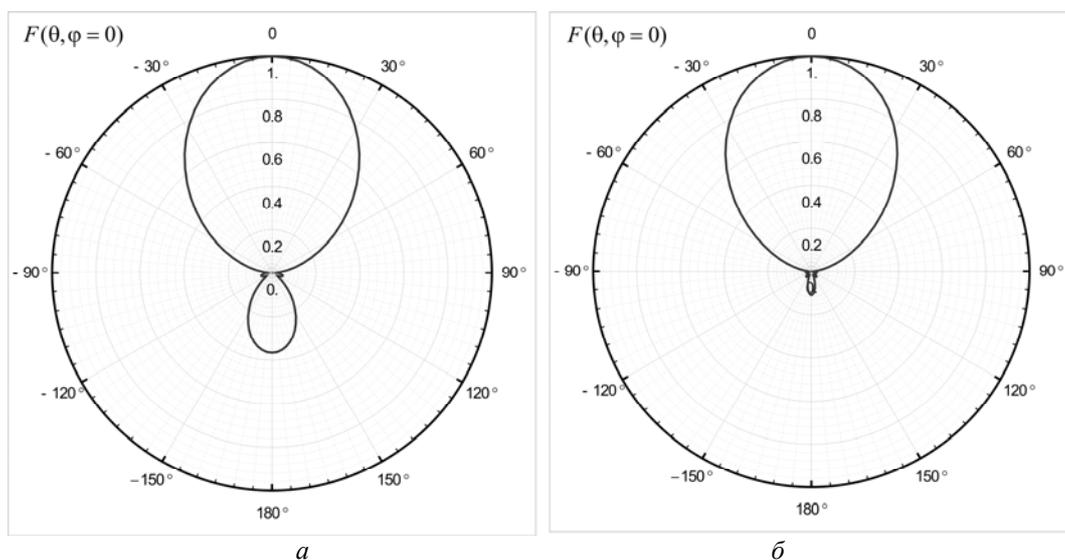


Рис. 6. Нормированные амплитудные ДН вибратора над рефлектором размера $h \times h$ в меридианальной плоскости: а – $h \times h = 0.5l$, б – $h \times h = 1.5l$

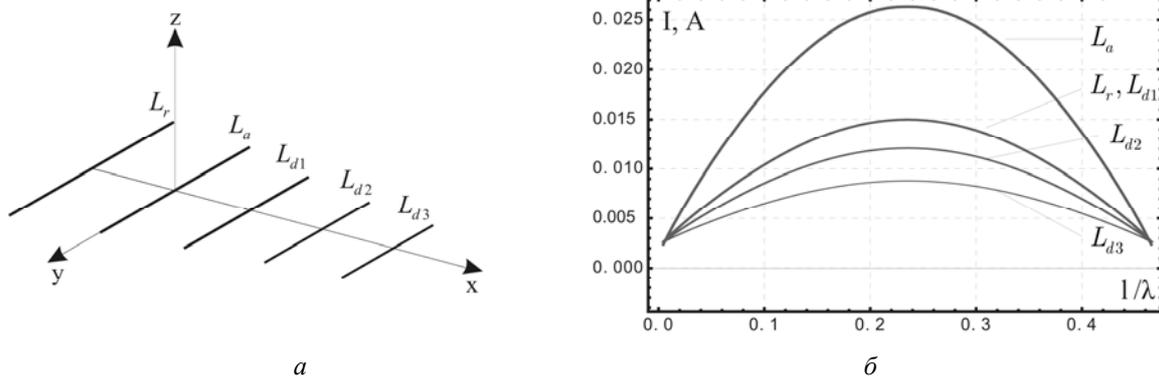


Рис. 7. Распределение токов на элементах директорной антенны, $L_a / l = 0.47$

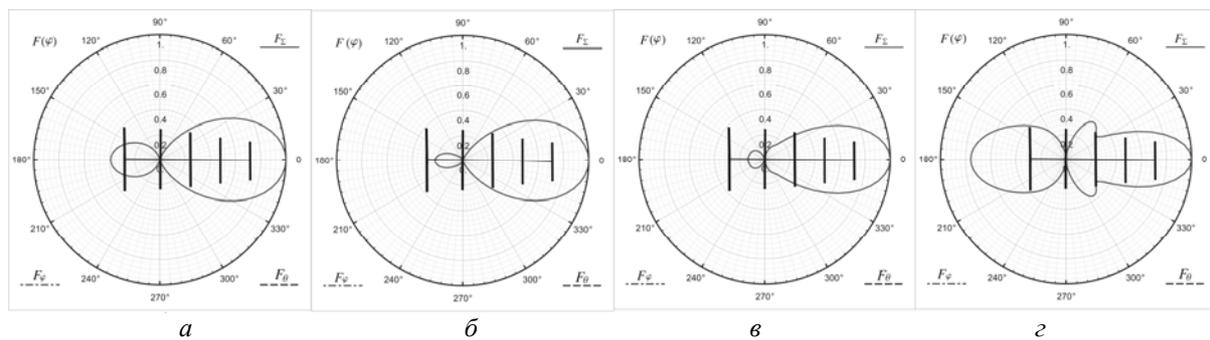


Рис. 8. Нормированные амплитудные диаграммы направленности директорной антенны: а - $L_a / l = 0.45$, б - $L_a / l = 0.47$ в - $L_a / l = 0.5$, г - $L_a / l = 0.51$

Как правило, инженерные расчёты предполагают определение ДН в дальней зоне и входного сопротивления антенны при фиксированных геометрических параметрах антенны. Самосогласованный подход открывает возможность построения строгих оптимизационных моделей, в которых можно варьировать длины элементов антенны, их число и расстояние между ними.

На рис.9 показана геометрия двузаходной конической спиральной антенны, расположенной над бесконечно протяжённым идеально проводящим экраном. Заходы спирали возбуждаются несимметричными вибраторами, один из концов которых соединяется с началом соответствующего захода, а второй конец – с экраном. Точки питания расположены вблизи поверхности экрана.

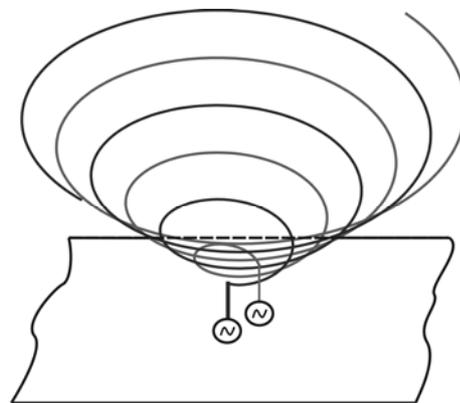


Рис. 9. Двузаходная коническая спиральная антенна над бесконечно протяжённым экраном

На рис.10 приведены распределение тока в одном из заходов спирали и нормированная амплитудная диаграмма направленности. Антенна работает в режиме противофазного возбуждения.

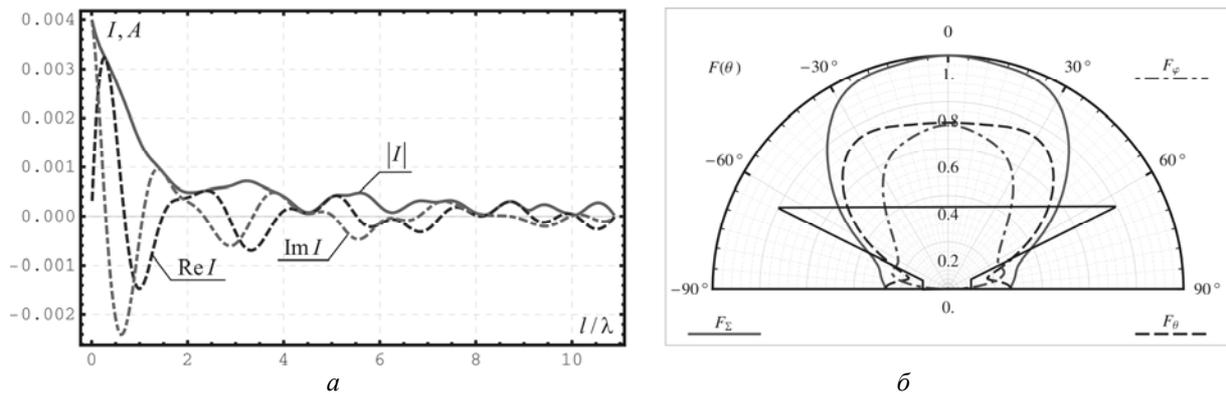


Рис. 10. Распределение тока (а) и нормированная амплитудная диаграмма направленности конической спиральной антенны (б), геометрия которой приведена на рис.9; $R/I = 0.8$, где R - радиус раскрытия конуса

Заключение

Таким образом, изложены основные идеи самосогласованной теории антенн, построение которой основано на интегральных представлениях электромагнитного поля и вытекающих из них интегральных уравнений, записанных относительно токов на излучающих поверхностях. Электродинамические задачи разделены на два класса – корректные и некорректные, причём некорректность может быть связана как с физической, так и с математической моделью задачи. Приведенные интегральные представления электромагнитного поля обладают значительной степенью универсальности и более просты в применении, чем метод векторных потенциалов.

Библиографический список

1. Неганов, В.А. Физическая регуляризация некорректных задач электродинамики [Текст] / В.А. Неганов. – М.: Сайнс-Пресс, 2008. – 450 с.
2. Неганов, В.А. Излучение и дифракция электромагнитных волн [Текст] / В.А. Неганов, Э.А. Павловская, Г.П. Яров

вой. – М.: Радио и связь, 2004.

3. Вычислительные методы в электродинамике [Текст] / под ред. Р. Митры; пер. с англ. под ред. д-ра физ.-мат. наук Э.Л. Бурштейна. – М.: Мир, 1977. – 487 с.
4. Стрижков, В.А. Математическое моделирование электродинамических процессов в сложных антенных системах [Текст] / В.А. Стрижков // Математическое моделирование. – 1989 – Т.1–8. – С.127-138.
5. Неганов, В.А. Современная теория и практические применения антенн [Текст] / В.А. Неганов, Д.П. Табаков, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова. – М.: Радиотехника, 2009. – 720 с.
6. Капитонов, В.А. Интегральное представление электромагнитного поля геометрически киральной структуры [Текст] / В.А. Капитонов, В.А. Неганов, И.Ю. Марсаков [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2012. – Т. 15. – №4. – С. 6-13.
7. Mei, K.K. On the integral Equations of Thin Wire Antennas [Text] / K.K. Mei // IEEE Trans. on Ant. and Prop. AP-13. – 1965. –pp.374-378.

SELF-CONSISTENT THEORY OF ANTENNAS BASED ON INTEGRAL EQUATIONS

© 2013 V. A. Neganov, D. P. Tabakov

Povolzhsky State University of Telecommunication
and Information Science, Samara

The paper outlines the foundations of a self-consistent theory of antennas. It is shown that the incorrectness of the physical model of the antenna leads to the incorrectness of its mathematical model. Integral representations of the electromagnetic field that become a system of integral equations in relation to the unknown surface current distributions on the emitting area under boundary conditions are proposed as the main instrument of self-consistent analysis. The results of self-consistent electrodynamic analysis for certain types of antennas are presented.

Self-consistency, Fredholm integral equations, singular integral equations, ill-posed problems, integral representations of the electromagnetic field.

Информация об авторах

Неганов Вячеслав Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, ФГОБУ ВПО «ПГУТИ». E-mail: neganov-samara@yandex.ru. Область научных интересов: электродинамика, фракталы и детерминированный хаос, колориметрия.

Табакон Дмитрий Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГОБУ ВПО «ПГУТИ». E-mail: illuminator84@yandex.ru. Область научных интересов: электродинамика СВЧ и оптического диапазона.

Neganov Vyacheslav Alexandrovich, doctor of physics and mathematics, professor, head of department, Povolzhsky State University of Telecommunication and Information Science. E-mail: neganov-samara@yandex.ru. Area of research: electrodynamics, fractals and determinate chaos, colourimetry.

Tabakov Dmitry Petrovich, candidate of physics and mathematics, associate professor, Povolzhsky State University of Telecommunication and Information Science. E-mail: illuminator84@yandex.ru. Area of research: electrodynamics of super- high frequency and optical spectrum.