

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ УПРУГИХ СИСТЕМАХ НА ПРИМЕРЕ РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

© 2006 М.И. Курушин, А.М. Курушин

Самарский государственный аэрокосмический университет

Если по принципу Даламбера динамику упругих систем можно рассматривать как статику с учетом сил инерции, то можно и наоборот, статику рассматривать как динамику, но при нулевом значении сил инерции. Что мы и предлагаем в данном исследовании на примере статически неопределимых резьбовых соединений. Такой обобщенный подход помогает находить усилия и напряжения в очень сложных упругих системах, в том числе и при динамическом их нагружении.

Рассмотрим двухмассовую статически неопределимую упругую систему в условиях динамического нагружения обеих масс (рис. 1). На обе массы одновременно независимо действуют усилия $F_1(t)$ и $F_2(t)$. Дифференциальные уравнения движения масс в упругой системе

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F_1(t) - (c_1 + c_2) \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2,$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = F_2(t) - (c_2 + c_3) \cdot y_2 + c_2 \cdot y_1.$$

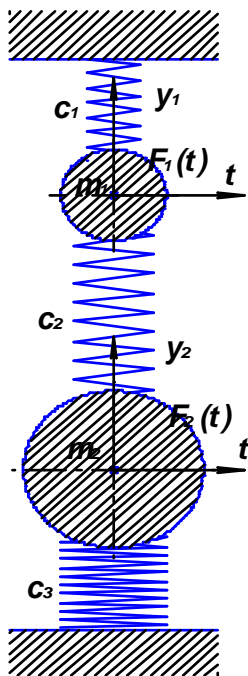


Рис. 1. Двухмассовая статически неопределимая упругая модель

$$F_{10} - (c_1 + c_2) \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 = 0,$$

$$F_{20} - (c_2 + c_3) \cdot y_2 + c_2 \cdot y_1 = 0$$

и решать систему линейных уравнений с двумя неизвестными перемещениями масс. В результате решения находим

$$y_1 = \frac{F_{10} \cdot (c_2 + c_3) + F_{20} \cdot c_2}{c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3},$$

$$y_2 = \frac{F_{10} \cdot (c_2 + c_3) + F_{20} \cdot c_2}{c_1 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_3 + c_2 \cdot c_3} \cdot \frac{c_1 + c_2}{c_2} - \frac{F_{10}}{c_2}.$$

Соответственно усилия в элементах упругой системы: между первой массой и корпусом $F_1 = c_1 \cdot y_1$, между первой и второй массами $F_{12} = c_2 \cdot (y_1 - y_2)$, между второй массой и корпусом $F_3 = c_3 \cdot y_2$.

Аналогично удобно применять этот принцип (обратный принципу Даламбера) и в задачах по определению усилий в сложных упругих моделях с резьбовыми соединениями. На рис. 2 показан конструкторский эскиз резьбового соединения цилиндра под давлением, а на рис. 3 показана упругая модель этого соединения. Разрушение резьбы происходило в сечении С-С рис. 2. На упругой модели это место соответствует жесткости C_4 . Составим дифференциальные уравнения движения выделенных в упругой модели масс

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F(t) - c_1 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_2 + c_2 \cdot y_2,$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = c_2 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_2 - c_3 \cdot y_2 + c_2 \cdot y_3,$$

$$m_3 \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2} = c_2 \cdot y_2 - c_2 \cdot y_3 - c_4 \cdot y_3.$$

Согласно принятому принципу, приравнявая силы инерции движения масс ну-

лю, получим статические уравнения равновесия масс

$$F - c_2 \cdot y - (c_2 + c_2) \cdot y_2 + c_2 \cdot y_3 = 0.$$

$$c_2 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_2 - c_3 \cdot y_2 + c_2 \cdot y_3 = 0.$$

$$c_2 \cdot y_2 - (c_2 + c_4) \cdot y_3 = 0.$$

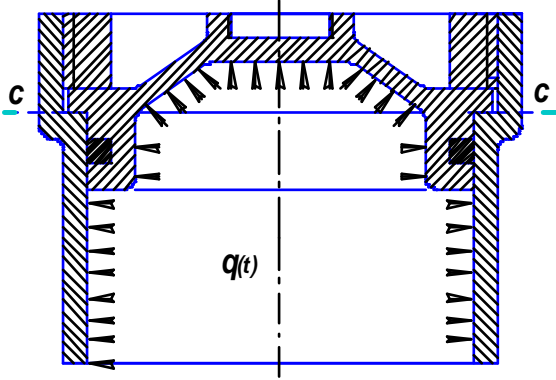


Рис.2. Эскиз резьбового соединения цилиндра под давлением

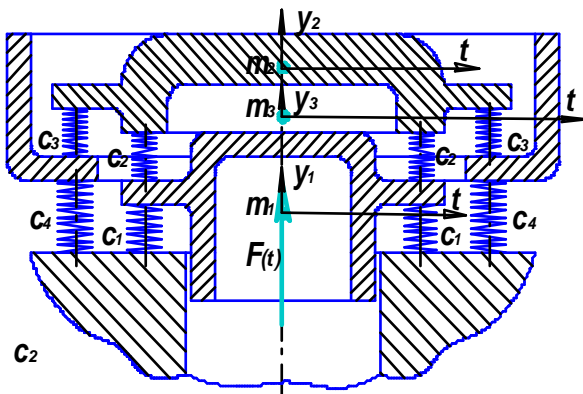


Рис.3. Упругая модель резьбового соединения цилиндра под давлением

Решая уравнения равновесия относительно смещения масс элементов упругой модели под действием статической нагрузки F , находим значения этих смещений

$$y_1 = \frac{F}{c_1 + c_2 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_3 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_4}}},$$

$$y_2 = \frac{F}{c_1 + c_2 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_3 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_4}}},$$

$$y_3 = \frac{F}{c_1 + c_2 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_3 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_4}}},$$

$$F_4 = c_4 \cdot y_3 = \frac{F}{c_1 + c_2 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_3 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_4}}} \cdot \frac{c_2}{c_2 + c_3 - \frac{c_2^2}{c_2 + c_4}} \cdot \frac{c_2}{c_2 + c_4} \cdot c_4.$$

В резьбе $F_3 = c_3 \cdot (y_2 - y_3)$, в стыке 2

$$F_2 = c_2 \cdot (y_1 - y_2), \text{ в стыке 1 } F_1 = c_1 \cdot y_1.$$

Если принять значения жесткостей $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$, получим

$$F_1 = \frac{3}{4} \cdot F; F_2 = \frac{1}{4} \cdot F; F_3 = \frac{1}{4} \cdot F; F_4 = \frac{1}{4} \cdot F.$$

Естественно, при действии переменного по времени давления в цилиндре, необходимо непосредственно решать исходную систему дифференциальных уравнений движения элементов упругой системы, определяя одновременно ее собственные частоты.

На рис. 4 показано туго затянутое одностороннее резьбовое соединение под действием усилия $F(t)$, а на рис. 5 - его упругая модель в довольно сложном (подробном) изображении. Усилие приложено к массе m_1 . Масса m_5 неподвижна и является опорой конструкции при внешнем воздействии на нее.

Согласно принятой концепции динамического подхода к решению статически неопределимых задач составляем систему дифференциальных уравнений движения элементов упругой системы

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F(t) - c_3 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_1 + c_3 \cdot y_2,$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = c_3 \cdot y_1 + c_4 \cdot y_3 - c_3 \cdot y_2 - c_4 \cdot y_2,$$

$$m_3 \cdot \frac{d^2 y_3}{dt^2} = c_4 \cdot y_2 + c_5 \cdot y_4 - c_4 \cdot y_3 - c_5 \cdot y_3,$$

$$m_4 \cdot \frac{d^2 y_4}{dt^2} = c_5 \cdot y_3 - c_1 \cdot y_4 - c_5 \cdot y_4.$$

Система статических уравнений равновесия выделенных элементов

$$F(t) - c_3 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_1 + c_3 \cdot y_2 = 0.$$

$$c_3 \cdot y_1 + c_4 \cdot y_3 - c_3 \cdot y_2 - c_4 \cdot y_2 = 0.$$

$$c_4 \cdot y_2 + c_5 \cdot y_4 - c_4 \cdot y_3 - c_5 \cdot y_3 = 0$$

$$c_5 \cdot y_3 - c_1 \cdot y_4 - c_5 \cdot y_4 = 0.$$

Решая эту систему относительно статических перемещений масс под действием

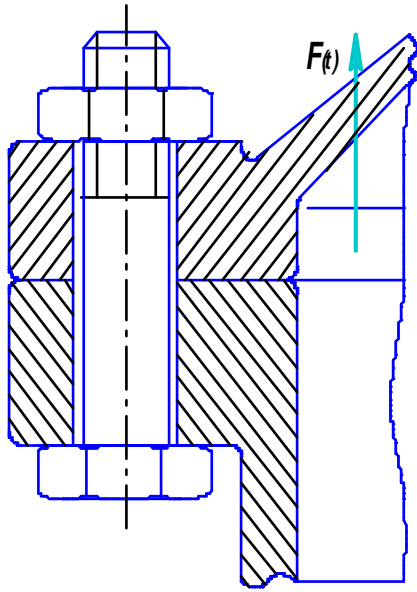


Рис. 4. Туго затянутое одиночное резьбовое соединение

статически приложенного усилия F , например, методом исключений, начиная с последнего уравнения, находим смещения элементов упругой модели

$$y_1 = F \cdot \frac{1}{c_2 + c_3 - \frac{c_2 \cdot c_3}{c_3 + c_4 - \frac{c_4^2}{c_4 + \frac{c_1 \cdot c_5}{c_1 + c_6}}}}$$

$$y_2 = y_1 \cdot \frac{c_3}{c_3 + c_4 - \frac{c_4^2}{c_4 + \frac{c_1 \cdot c_5}{c_1 + c_6}}}$$

$$y_3 = y_2 \cdot \frac{c_4}{c_4 + \frac{c_1 \cdot c_5}{c_1 + c_6}}$$

$$y_4 = y_3 \cdot \frac{c_5}{c_1 + c_6}$$

Усилия в элементах между массами упругой системы резьбового соединения:

в контакте головки болта с корпусом $F_1 = c_4 \cdot y_4$, в контакте крышки корпуса с корпусом $F_2 = c_2 \cdot y_1$, в контакте бобышки крышки корпуса с самой крышкой $F_3 = c_3 \cdot (y_2 - y_1)$, в контакте гайки с бобыш-

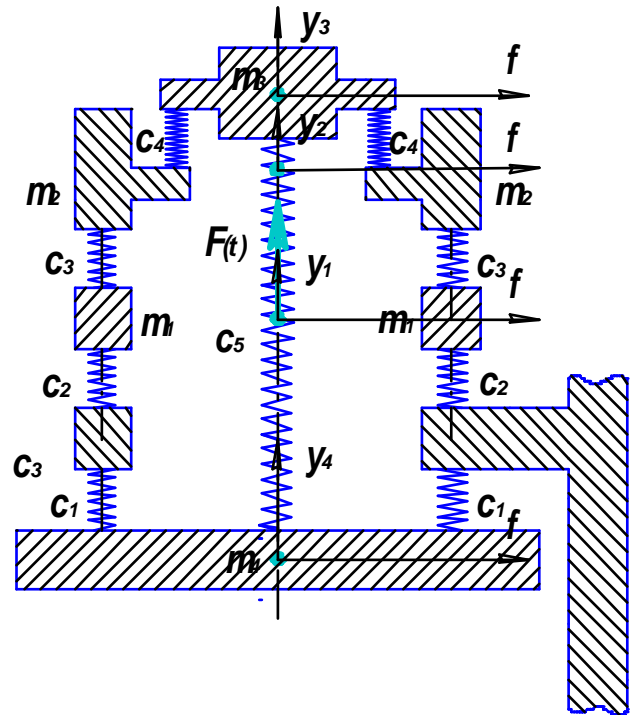


Рис. 5. Упругая модель резьбового соединения по рис. 4 в подробном разбиении на элементы

кой крышки корпуса $F_4 = c_4 \cdot (y_3 - y_2)$, в стержне болта $F_5 = c_5 \cdot (y_3 - y_4)$.

Если принять для примера

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 1,$$

то получим: деформации упругих элементов системы

$$y_1 = \frac{4}{5} \cdot F; y_2 = \frac{3}{5} \cdot F; y_3 = \frac{2}{5} \cdot F; y_4 = \frac{1}{5} \cdot F.$$

Соответственно усилия в контактах элементов упругой системы резьбового соединения

$$F_1 = \frac{1}{5} \cdot F; F_2 = \frac{4}{5} \cdot F; F_3 = -\frac{1}{5} \cdot F; F_4 = -\frac{1}{5} \cdot F; F_5 = \frac{1}{5} \cdot F.$$

Если принять $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = 1$, а $c_3 = 2$, то получим: деформации упругих элементов системы

$$y_1 = \frac{7}{9} \cdot F; y_2 = \frac{6}{9} \cdot F; y_3 = \frac{4}{5} \cdot F; y_4 = \frac{2}{9} \cdot F.$$

Усилия в контактах элементов упругой системы резьбового соединения

$$F_1 = \frac{2}{9} \cdot F; F_2 = \frac{7}{9} \cdot F; F_3 = -\frac{2}{9} \cdot F; F_4 = -\frac{2}{9} \cdot F; F_5 = \frac{2}{9} \cdot F.$$

При менее простом разбиении этого же резьбового соединения на упругие элементы,

как показано на рис. 6, задачу решаем аналогичным же образом.

Дифференциальные уравнения движения элементов упругой системы

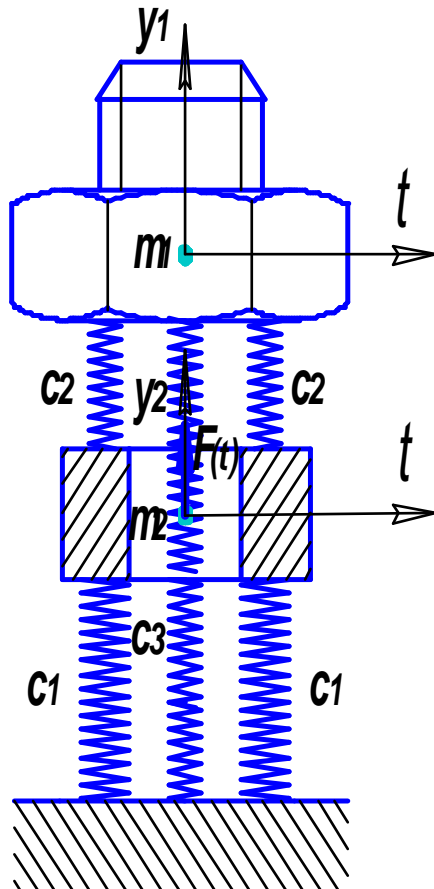


Рис. 6. Упругая модель резьбового соединения по рис. 4 в более простом разбиении

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -c_3 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_1 + c_3 \cdot y_2,$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 y_2}{dt^2} = F(t) + c_2 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_2 - c_1 \cdot y_2.$$

Условия статического равновесия

$$-c_3 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_1 + c_3 \cdot y_2 = 0.$$

$$F + c_2 \cdot y_1 - c_2 \cdot y_2 - c_1 \cdot y_2 = 0$$

Решая их, находим перемещения масс упругой системы под действием статически приложенного усилия F ко второй массе.

Смещения первой массы (гайки с прилежащим у частком стержня болта)

$$y_1 = F \cdot \frac{c_2}{c_1 \cdot (c_2 + c_3) + c_2 \cdot c_3};$$

фланца корпуса и фланца его крышки

$$y_2 = F \cdot \frac{c_2 + c_3}{c_1 \cdot (c_2 + c_3) + c_2 \cdot c_3}.$$

Усилия в стыках масс:

$$\text{болт} - F_3 = c_3 \cdot y_1 = F \cdot \frac{c_2 \cdot c_3}{c_1 \cdot (c_2 + c_3) + c_2 \cdot c_3};$$

фланец крышки

$$F_2 = c_2 \cdot (y_1 - y_2) = F \cdot \frac{c_2 \cdot c_3}{c_1 \cdot (c_2 + c_3) + c_2 \cdot c_3};$$

фланец корпуса

$$F_1 = c_1 \cdot y_2 = F \cdot \frac{c_2 + c_3}{c_1 \cdot (c_2 + c_3) + c_2 \cdot c_3}.$$

Таким образом, усилия на гайку со стороны стержня болта и фланца крышки корпуса равны и противоположны, т.е.

$F_2 = -F_3$, а отношение усилий во фланце крышки и фланце корпуса

$$\frac{F_1}{F_2} = - \frac{c_2 + c_3}{c_2 \cdot c_3}$$

И наконец, рассмотрим самый тривиальный случай, который приводится во всех учебниках и справочниках по расчету резьбовых соединений типа изображенного на рис. 4, когда стягиваемые болтом детали рассматриваются как единое целое. Упрощенную упругую модель при нашем подходе к решению задачи можно изобразить как на рис. 7. Дифференциальное уравнения масс гайки с частью стержня болта

$$m_1 \cdot \frac{d^2 y_1}{dt^2} = F(t) - c_6 \cdot y - c_d \cdot y.$$

Уравнение равновесия при отсутствии сил инерции $F - c_6 \cdot y - c_d \cdot y = 0$. Отсюда находим величину перемещения массы в статике

$$y = \frac{F}{c_6 + c_d}.$$

Усилие в стержне болта

$$F_6 = c_6 \cdot y = F \cdot \frac{c_6}{c_6 + c_d}.$$

Усилие в детали

$$F_d = c_d \cdot y = F \cdot \frac{c_d}{c_6 + c_d}.$$

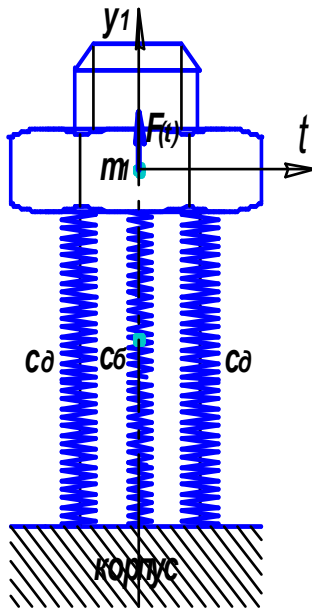


Рис. 7. Упругая модель туго затянутого резьбового соединения при действии на стержень болта внешнего усилия F в самом простом случае моделирования как обычно принято в учебной литературе

Если же усилие на болт гармонически изменяется по закону

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

то перемещение массы в установившемся режиме с учетом затухания колебаний будет совершаться по закону гармонических колебаний

$$y(t) = \frac{y_{ст}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

где собственная частота колебаний упругой

$$\text{системы } p = \sqrt{\frac{c_b + c_d}{m_1}}.$$

и усилия в стержне болта необходимо определять по

$$F_b(t) = c_b \cdot \frac{y_{ст}}{1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{F_0 \cdot c_b}{(c_b + c_d) \cdot \left(1 - \left(\frac{\omega}{p}\right)^2\right)} \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

В этом случае возможны уже резонансы и динамическое изменение усилий в упругой системе по сравнению с решением, полученным при статическом нагружении, может совершенно не соответствовать действительности.

В заключение необходимо отметить, что при определении усилий в туго затянутых резьбовых соединениях, как в статически неопределимых системах, всегда приходится определять жесткости или податливости элементов упругих систем, в которые входят эти резьбовые соединения. Поэтому удобнее и правильнее при определении усилий на элементы резьбовых соединений определять не в статике, а в динамике, решая системы дифференциальных уравнений движения элементов упругих систем, в которые они входят. При современных возможностях вычислительных методов и средств это не представляет трудностей. Требуется только в совершенстве знать рассчитываемое изделие, обладать умением составлять динамические модели, составлять дифференциальные уравнения движения таких систем и решать их.

THE DYNAMIC APPROACH TO THE PROBLEM SOLVING IN STATICALLY INDEFINABLE ELASTIC-SYSTEMS ON THE EXAMPLE OF THREADED CONNECTIONS

© 2006 M.I. Kurushin, A.M. Kurushin

Samara State Aerospace University

If on a d'Alembert principle dynamics of elastic-systems can be viewed as a statics taking into consideration of inertial forces it is possible on the contrary, a statics to view as dynamics but at a zero value of inertial forces. We offer it in this examination on an example of statically indefinable threaded connections. Such generalized approach helps to find efforts and stresses in very complex elastic-systems including at their dynamic loading.