УДК 519.28

ПЛАНИРОВАНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ АВИАЦИОННЫХ ГТД

© 2006 А.С. Гишваров, А.В. Зырянов, Е. А. Могильницкий, Г.К.Агеев

Уфимский государственный авиационный технический университет

Метод планирования многофакторных экспериментов при исследовании динамических процессов авиационных ГТД

При разработке изделий авиационной техники и решении задач по повышению их надежности и ресурса проводится большой объем как теоретических, так и экспериментальных исследований. При этом особую сложность представляет многофакторное исследование динамических процессов. Причиной этому является наличие фактора времени в исследуемых процессах и характеристиках изделий. Например, при оценке надежности (безотказности, долговечности, качества функционирования и др.) изделий испытания проводят с целью определения скорости изменения некоторой характеристики (параметра) изделия, которая, как правило, является функцией условий (режимов) применения испытуемого изделия и т.д.

В довольно обширной литературе по планированию эксперимента мало внимания уделено планированию фактора времени [1].

Обычно, схема испытаний такова: измеряют начальное значение параметра, устанавливают определенный режим работы устройства на некоторый промежуток времени, затем вновь измеряют значение параметра и задают режим работы устройства и т.д. Общая длительность таких испытаний, как правило, ограничена. По полученным результатам оценивают скорость изменения параметра и ищут зависимость скорости от условий применения, позволяющую в дальнейшем оценивать скорость при любых условиях из некоторого множества. При планировании таких испытаний необходимо выбрать количество интервалов испытаний, их длительности и режимы на каждом интервале.

На практике возможны несколько стратегий проведения таких испытаний и методов оценки скорости изменения параметра [2]:

1. Измеряют значение параметра в начале и в конце интервала времени T, в течение которого объект непрерывно функционирует при неизменном режиме. Оценку скорости изменения параметра $\hat{v}$ определяют по формуле:

$$\hat{v} = \frac{\tilde{y}(t_0 + T) - \tilde{y}(t_0)}{T}, \qquad (1)$$

где T – длительность испытаний; $\tilde{y}(t_0)$ и $\tilde{y}(t_0 + T)$ - результаты измерения параметра в начале и конце интервала испытаний.

2. В ходе испытаний, длящихся непрерывно в течение времени T, осуществляют периодическое (через интервалы Δt) измерение параметра изделия $\tilde{y}(0), \tilde{y}(1)$, …, $\tilde{y}(2k-1)$ (общее число измерений составляет $2k$). Оценку $\hat{v}$ скорости изменения параметра определяют методом взвешенных наименьших квадратов из условия:

$$\min_{y(0),v} (\tilde{Y} - Y)^T W^{-1} (\tilde{Y} - Y), \qquad (2)$$

где $\tilde{Y}$ - вектор столбец результатов измерения параметра с элементами $\tilde{y}(0)$, $\tilde{y}(1)$, …, $\tilde{y}(2k-1)$; Y- вектор столбец результатов расчета значения параметра по модели $y(i) = y(0) + vi\Delta t$, i = 0, 1, …, $2k$-1; W - ковариационная матрица случайной составляющей результатов наблюдений.

3. Общее время испытаний T разбивают на k равных периодов Δt, которые разносят во времени; измеряют значение параметра в начале и в конце каждого периода. Результаты оценки скорости, полученные по каждому периоду, усредняют по формуле:

$$\hat{v} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\tilde{y}(t_{i\kappa}) - \tilde{y}(t_{i\text{н}})}{\Delta t}, \qquad (3)$$

где $\tilde{y}(t_{i\kappa})$ и $\tilde{y}(t_{i\text{н}})$ - результаты измерения параметра в конце и начале i-того периода.

При использовании стратегий 2 и 3 общее число измерений параметра одинаково и равно $2k$, а длины периодов Δt (при одинаковой длительности испытаний T) различны. В общем случае, при числе измерений равном $2k$, количество периодов при использовании стратегии 3 может быть меньше k. В этих случаях для каждого периода оценку скорости предпочтительно проводить из условия (2), далее определяя средневзвешенную скорость и усредняя полученные оценки с весами, обратно пропорциональными дисперсиям оценок.

Рассмотрим модель изменения параметра, которая при неизменном режиме (условии функционирования изделия) имеет вид:

$$y(t) = y(t_0) + v(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} e(\tau) d\tau, \qquad (4)$$

где $y(t)$ - среднее значение параметра в момент t; v - средняя скорость изменения параметра при заданном режиме; $e(\tau)$ - случайная составляющая скорости, обусловленная случайными изменениями во времени условий испытаний.

Полагаем, что причиной случайных колебаний условий испытаний являются внешние факторы, изменение которых происходит независимо от испытаний. Возможна и другая модель, при которой аргументом $e(\tau)$ является наработка изделия при испытаниях. При этом причиной случайных колебаний скорости являются внутренние факторы, изменение которых происходит только в процессе испытаний.

Положим, что $e(\tau)$ - стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и автокорреляционной функцией $R_e(\tau) = \sigma_e^2 r(\tau)$, такой, что $|r(\tau)| \to 0$ при $\tau \to \infty$. При случайной ошибке измерения $\varepsilon(t)$ в момент t результат измерения параметра в момент t определяется по формуле:

$$\tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon(t), \qquad (5)$$

где $y(t)$ – определяется по формуле (4).

Положим, что ошибки измерения в разные моменты времени независимы, имеют нулевое математическое ожидание и одну и ту же дисперсию σ_ε^2 и рассмотрим следующие три частных случая:

а) $\sigma_\varepsilon^2 >> \sigma_e^2$ (при этом пренебрегаем величиной σ_e^2);

б) $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и $r(\tau) \approx 1$ при $\tau \le T$, случайная составляющая скорости изменяется медленно;

в) $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и $r(\tau) \to \delta(\tau)$, где $\delta(\tau)$- дельта функция, случайная составляющая скорости изменяется быстро.

Выбор стратегии испытаний определяется конкретными значениями $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_e^2$ и видом функции $r(\tau)$: при $\sigma_\varepsilon^2 >> \sigma_e^2$ оказывается целесообразным принять k = 1, т.е. перейти к стратегии 1; стратегия 2 оказывается наилучшей, когда $\sigma_\varepsilon^2 >> \sigma_e^2$; стратегия 3 предпочтительнее при $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и $r(\tau) \approx 1$; при $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и $r(\tau) \to \delta(\tau)$ все три стратегии приводят к одинаковым результатам, в силу чего преимущество остается за стратегией 1, которая является наименее трудоемкой.

При $\sigma_\varepsilon^2 >> \sigma_e^2$ основной вклад в случайную составляющую результатов испытаний вносят ошибки измерений параметра. При этом при использовании D-критерия задача планирования эксперимента формулируется следующим образом:

$$\max_{\substack{N, x^{(j)}, k_j \\ j=1,2,\dots,N}} |M|;$$

$$\sum_{j=1}^{N} 2k_j = K; \quad N \ge m; \quad x^{(j)} \in \Omega_x;$$

$$M = \sum_{j=1}^{N} k_j (4k_j^2 - 1) f(x^{(j)}) f^T(x^{(j)}), \qquad (6)$$

где K - общее число измерений в ходе испытаний.

В случае, когда $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и процесс изменения случайной составляющей скорости достаточно медленный (автокорреляционная функция $r(\tau)$ близка к единице при $\tau \le T$), задача планирования эксперимента

Таблица 1. Оптимальный план и результаты эксперимента для динамической модели

№ опыта	x_0	x_1	τ	x_3	$\bar{y}$, мм
1	+1	–1	–1	–1	0,55
2	+1	–1	–1	0	0,36
3	+1	–1	–1	+1	0,17
4	+1	–1	0	–1	0,85
5	+1	–1	0	0	0,60
6	+1	–1	0	+1	0,35
7	+1	–1	+1	–1	1,18
8	+1	–1	+1	0	0,94
9	+1	–1	+1	+1	0,62
10	+1	0	–1	–1	0,62
11	+1	0	–1	0	0,58
12	+1	0	–1	+1	0,35
13	+1	0	0	–1	1,15
14	+1	0	0	0	0,86
15	+1	0	0	+1	0,58
16	+1	0	+1	–1	1,57
17	+1	0	+1	0	1,22
18	+1	0	+1	+1	0,88
19	+1	+1	–1	–1	0,61
20	+1	+1	–1	0	0,35
21	+1	+1	–1	+1	0,09
22	+1	+1	0	–1	0,81
23	+1	+1	0	0	0,67
24	+1	+1	0	+1	0,23
25	+1	+1	+1	–1	1,44
26	+1	+1	+1	0	1,06
27	+1	+1	+1	+1	0,64

по *D*-критерию формулируется следующим образом:

$$\max_{\substack{x^{(j)},k_j,j\\ j=1,2,\dots,l}} \left| \sum_{j=1}^{l} k_j\, f(x^{(j)})\, f^T(x^{(j)}) \right|;$$

$$\sum_{j=1}^{l} k_j = N; \quad x^{(j)} \in \Omega_x. \tag{7}$$

Таким образом, задача сводится в общем случае к поиску точного *D*-оптимального плана.

При $\sigma_e^2 >> \sigma_\varepsilon^2$ и быстром изменение $e(\tau)$ ($r(\tau)$ близка к δ-функции) задача планирования эксперимента по *D*-критерию формулируется следующим образом:

$$\max_{\substack{N,x^{(j)},T_j\\ j=1,2,\dots,N}} \left| \sum_{j=1}^{N} T_j\, f(x^{(j)})\, f^T(x^{(j)}) \right|;$$

$$\sum_{j=1}^{N} T_j = T; \quad x^{(j)} \in \Omega_x. \tag{8}$$

Выбор оптимального плана эксперимента проводится в следующей последовательности:

- задают вид модели (в случае отсутствия данных выбирают полином 1-го или 2-го порядка);
- определяют длительность испытаний τ_j, $j = \overline{1, N}$;
- определяют моменты измерения параметра П в каждом опыте эксперимента $\Delta\tau_{зам.\,j}$, $j = \overline{1, N}$;
- строят оптимальный план эксперимента.

Построение оптимального плана эксперимента зависит от выбранной стратегии. В первом случае, определяют минимальную и максимальную длительность каждого опыта эксперимента. Минимальную длительность задают из условия $\tau_{min} \geq t\ \tau_{зн}$, где t – критерий Стьюдента; $\tau_{зн}$ – время, за которое происходит изменение параметра, с достаточной точностью фиксируемое средствами контрольно-измерительной аппаратуры. Максимальную длительность задают из условия $\tau_{max} \leq \tau_{эк}$, где $\tau_{эк}$ –длительность эксперимента, обусловленная технико-экономическими соображениями.

Если измерения проводят до и после эксперимента (например, при оценке износа детали или физико-химических свойств материала), то выбирают рандомизированный линейный полный или дробный план эксперимента.

Если измерения проводят в эксперименте (например, при измерении тяги двигателя, удельного расхода топлива и др.), то выбирают один из следующих вариантов:

- измерения проводят в начале и конце интервала времени T, в течение которого условия эксперимента остаются неизменными;
- измерения проводят периодически через интервалы $\Delta\tau$ на протяжении всего периода времени T;
- общую длительность испытаний T разбивают на k равных интервалов длиной $\Delta\tau_{зам}$, которые разносят по времени, а измерения проводят в начале и конце каждого интервала. Результаты измерений в каждом интервале осредняют.

В качестве примера в таблице приведены оптимальный план, содержащий 27 опытов, и результаты эксперимента для динамической модели вида

$$y = f(x_1, x_2, \tau) =$$
$$= b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3\tau + b_{12}x_1x_2 + \ldots ..b_6\tau^2 \qquad (9)$$

$-1 \leq x_i \leq 1; \quad -1 \leq \tau \leq 1.$ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ.

Список литературы

1. *Гишваров А.С.* Теория ускоренных ресурсных испытаний технических систем. Уфа: Гилем, 2000. 338 с.

2. *Гишваров А.С., Зырянов А. В., Максимов М. А.* Многофакторная оптимизация экспериментов при разработке моделей динамики авиационных ГТД. / Труды международной научно-технической конференции «Проблемы и перспективы развития двигателестроения». – Самара, СГАУ, 2003. с. 449-456.

PLANNING OF MULTIFAKTORIAL EXPERIMENTS AT RESEARCH OF DYNAMIC PROCESSES AVIATION ENGINES

© 2006 A.S. Gishvarov, A.V. Zyrianov, E.A. Mogilnitskiy, G.K. Ageev

USATU

The method of multifactorial planning of experiment is considered at research of dynamic processes and characteristics aviation engines during operational development and serial operation.