

УДК 621.373.12

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОТОБРАЖЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

© 2013 В. В. Зайцев, Д. Б. Нураев, А. Н. Юдин

Самарский государственный университет

Предложено новое дискретное отображение классической автоколебательной системы – осциллятора Ван дер Поля. Отображение получено на основе сочетания методов параметрического синтеза и инвариантности импульсных характеристик динамических систем. Приведены примеры генерации регулярных и хаотических автоколебаний.

Нелинейная динамика, дискретное время, автоколебательная система, динамический хаос.

1. Современная нелинейная динамика [1] рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и в дискретном времени (ДВ). Модели и методы нелинейной НВ-динамики широко и успешно применяются в радиофизике, биофизике, экологии, химических технологиях и многих других отраслях науки и техники. В области дискретного времени нелинейная динамика смыкается с цифровой обработкой сигналов [2], и объекты ДВ-динамики могут служить основой алгоритмов обработки. Для выполнения этих функций необходим широкий круг ДВ-систем, обеспечивающий возможность выбора заданной характеристики преобразования сигналов. Поиск таких систем следует рассматривать в качестве одной из задач нелинейной динамики дискретного времени.

Как правило, объекты НВ-динамики являются результатом формализации физических (химических, биологических и т.д.) моделей реально существующих систем, в то время как ДВ-системы в большинстве случаев возникают в результате дискретизации времени в НВ-системах. При этом конкретная форма процесса дискретизации существенным образом влияет на характеристики полученной (синтезированной) ДВ-системы. Заметим, что для обозначения ДВ-систем часто используется также термин «дискретные отображения».

Широко известен ряд способов построения дискретных отображений. В качественной теории динамических систем это сечения Пуанкаре [1]. Для гамильтоновых систем с помощью введения в гамильтониан нелинейных дельта-воздействий строятся универсальное и стандартное отображения [3]. Рассматривается также и самый прямой способ дискретизации времени – конечно-разностная аппроксимация производных в дифференциальном уравнении движения системы. Но он не даёт эффективных алгоритмов преобразований сигналов ДВ-системами [2].

В теории и практике синтеза линейных дискретных фильтров находит применение метод инвариантности импульсных характеристик (МИИХ) относительно дискретизации времени. Он привлекателен с физической точки зрения, т.к. сохраняет временные характеристики отклика линейной системы на внешнее воздействие. В работах [4, 5] метод распространён на автоколебательные системы томсоновского типа. В настоящей работе МИИХ дополнен элементами параметрического синтеза и получен новый вариант дискретного отображения осциллятора Ван дер Поля – базовой модели теории нелинейных колебаний.

2. В рамках МИИХ линейному диссипативному НВ-осциллятору с собственной частотой w_0 и добротностью Q

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0 \quad (1)$$

ставится в соответствие ДВ-осциллятор

$$x[n] - 2 \cos(2p \Omega_0) a_0 x[n-1] + a_0^2 x[n-2] = 0, \quad (2)$$

где Ω_0 – собственная частота w_0 , измеряемая в единицах частоты дискретизации, a_0 – параметр линейной диссипации:

$$a_0 = \exp\left(-p \frac{\Omega_0}{Q}\right). \quad (3)$$

Опираясь на физическую модель системы, уравнение движения осциллятора Ван дер Поля запишем в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} (1 - p(1 - x^2)) \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0. \quad (4)$$

Здесь p – коэффициент превышения ($p > 1$) порога генерации ($p = 1$).

Коэффициент при первой производной в уравнении (4) рассматриваем как нелинейный параметр диссипации. Тогда при дискретизации времени в нелинейной системе, по аналогии с переходом (1) → (2), предлагается совершить переход от дифференциального уравнения (4) к разностному уравнению

$$x[n] - 2 \cos(2p \Omega_0) a(x[n-1]) x[n-1] + a^2(x[n-2]) x[n-2] = 0, \quad (5)$$

где диссипативная функция с учётом (3) принимает вид

$$a(x) = \exp\left(-p \frac{\Omega_0}{Q} (1 - p(1 - x^2))\right). \quad (6)$$

Разностное уравнение движения (5) с учётом (6) даёт итерируемое дискретное отображение – алгоритм генерации ДВ-автоколебаний. Конечно, этот образ осциллятора Ван дер Поля в дискретном времени лишь один из множества возможных (см., в частности, [4, 5]).

Нетрудно показать, что при высоких частотах дискретизации ($\Omega_0 \rightarrow 0$) разностное уравнение (5) переходит в дифференциальное уравнение (4), и тем самым ДВ-осциллятор сохраняет «верность» НВ-прототипу.

3. Приведём некоторые результаты, иллюстрирующие режимы генерации ДВ-осциллятора Ван дер Поля (5). Значение добротности в дальнейшем остаётся постоянной величиной $Q = 20$, а собственная частота резонатора Ω_0 и уровень возбуждения p варьируются.

На рис. 1 а показаны амплитудный спектр $A(\Omega)$ и предельный цикл автоколебаний ДВ-осциллятора с параметрами $\Omega_0 = 0,21$, $p = 3,8$. Этот режим генерации качественно полностью соответствует свободным автоколебаниям в НВ-системе. Специфика ДВ-системы проявляется лишь в том, что вследствие эффекта подмены частот [2] гармоники автоколебаний наблюдаются на частотах, не кратных основной частоте (на рис. 1 прослеживаются третья и пятая гармоники). Взаимодействие подменённых гармонических составляющих приводит, в конечном счёте, к хаотизации автоколебаний при значительных уровнях возбуждения. Рис. 1 б, на котором представлены усреднённый амплитудный спектр $\bar{A}(\Omega)$ и хаотический аттрактор автоколебаний, иллюстрирует режим генерации динамического хаоса в осцилляторе с параметрами $\Omega_0 = 0,31$ и $p = 12$. Дальнейший рост уровня возбуждения до значения $p = 38$ переводит ДВ-осциллятор (5) в режим генерации хаотических импульсов, показанных в правой части рис. 1 в.

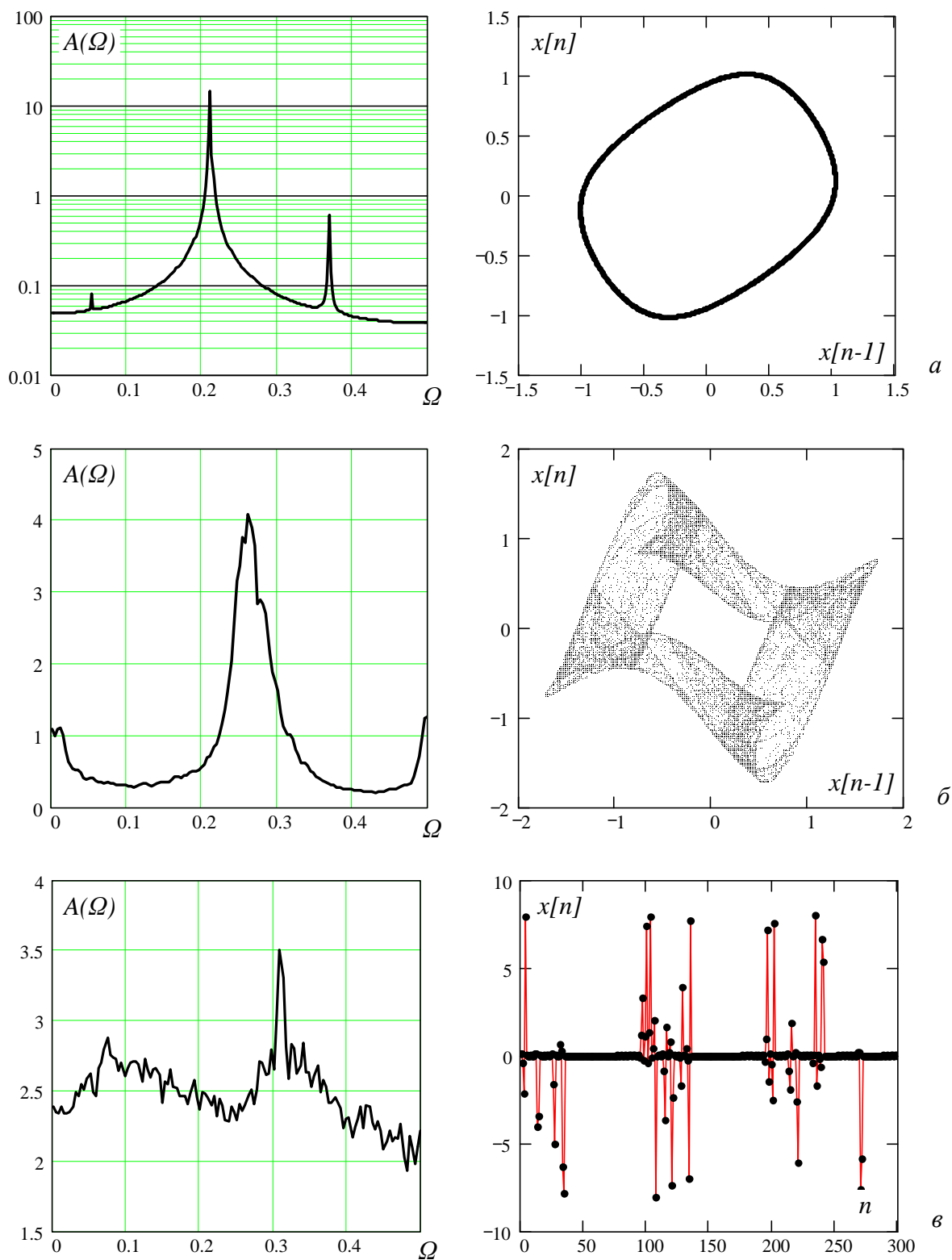


Рис. 1. Амплитудные спектры и фазовые портреты автоколебаний ДВ-осциллятора Ван дер Поля

4. Таким образом, представленный дискретный осциллятор Ван дер Поля демонстрирует набор разнообразных режимов автоколебаний: как регулярных, так и хаотических. Одно из возможных применений ДВ-осциллятора в режиме регулярных автоколебаний – синхронное и частотное детектирование [6]. Широкий спектр хаотических автоколебаний позволяет использовать их для маскировки информационных сигналов, например, так, как это предложено в статье [7].

Библиографический список

1. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики [Текст] / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 336 с.

2. Оппенгейм, А. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Оппенгейм, Р. Шафер – М.: Техносфера, 2006. – 858 с.

3. Заславский, Г.М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика [Текст] / Г.М. Заславский – М. – Ижевск: НИЦ РХД,

Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. – 472 с.

4. Зайцев, В.В. Динамика автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля [Текст] / В.В. Зайцев, С.В. Давыденко, О.В. Зайцев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2000. – Т.3. – №2. – С. 64-67.

5. ДВ-осцилляторы, порождаемые томсоновскими автоколебательными системами [Текст] / В.В. Зайцев [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2008. – Т. 11. – №4. – С. 98-103.

6. Зайцев, В.В. Метод усреднения и алгоритм генерации ДВ-автоколебаний [Текст] / В.В. Зайцев, А.В. Карлов (мл.), Ар. В. Карлов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2011. – Т. 14. – №4. – С. 77-80.

7. Зайцев, В.В. Способ защиты информации с использованием алгоритма генерации хаотических автоколебаний [Текст] / В.В. Зайцев, О.В. Зайцев // Вестник СамГУ. – 2006. – № 9(49). – С. 66–71.

PARAMETRICAL DESIGN OF DISCRETE MAPPING OF VAN DER POL OSCILLATOR

© 2013 V. V. Zaitsev, D. B. Nuraev, A. N. Yudin

Samara State University

New discrete mapping of a classical self-oscillating system - van der Pol oscillator- is proposed. Mapping is obtained on the basis of combining the methods of parametric synthesis and the invariance of pulse characteristics of dynamical systems. Examples of generating regular and chaotic self-oscillations are given.

Nonlinear dynamics, discrete time, self-oscillation system, dynamic chaos.

Информация об авторах

Зайцев Валерий Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор, профессор кафедры радиофизики, Самарский государственный университет. E-mail: zaitsev@samsu.ru. Область научных интересов: нелинейная динамика, статистическая радиофизика, численное моделирование.

Нураев Дмитрий Борисович, аспирант, Самарский государственный университет. Область научных интересов: нелинейная динамика.

Юдин Александр Николаевич, аспирант, Самарский государственный университет. Область научных интересов: нелинейная динамика.

Zaitsev Valery Vasilyevch, candidate of physics and mathematics, professor, professor of the department of radiophysics, Samara State University. E-mail: zaitsev@samsu.ru. Area of research: nonlinear dynamics, statistical radiophysics, numerical modeling.

Nuraev Dmitriy Borisovich, postgraduate student, Samara State University. Area of research: nonlinear dynamics.

Yudin Alexander Nicolaevich, postgraduate student, Samara State University. Area of research: nonlinear dynamics.