

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ РАЗВЕРТЫВАЕМОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ С АТМОСФЕРНЫМ ЗОНДОМ

© 2016 Дон Чжэ<sup>1</sup>, Ю. М. Заболотнов<sup>1</sup>, Ван Чанцин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

<sup>2</sup>Северо-западный политехнический университет, г. Сиань, КНР

Анализируется устойчивость движения космической тросовой системы с атмосферным зондом. Рассматривается устойчивость положений равновесия тросовой системы вблизи местной вертикали (статическая устойчивость) и при её развёртывании (динамическая устойчивость). Тросовая система состоит из базового космического аппарата, с которого производится выпуск троса, и атмосферного зонда. Методом Лагранжа получена математическая модель движения тросовой системы в подвижной орбитальной системе координат с учётом аэродинамических сил, действующих на космический аппарат и зонд. Получены условия устойчивости движения тросовой системы относительно местной вертикали. Аналитический анализ подтверждается численными примерами.

*Космическая тросовая система, атмосферный зонд, статическая устойчивость, динамическая устойчивость, условия устойчивости, метод фазовой плоскости, численный анализ.*

### Введение

Рассматривается движение космической тросовой системы (КТС), состоящей из базового космического аппарата (КА), троса и атмосферного зонда. Атмосферный зонд представляет собой сферу с увеличенным баллистическим коэффициентом  $\sigma = C_x S / m$ , где  $C_x$  – коэффициент лобового сопротивления;  $S$  и  $m$  – соответственно характерная площадь и масса. Развёртывание КТС производится вниз в конечное положение, близкое к местной вертикали (с учётом влияния аэродинамических сил). Анализируются условия устойчивости вертикальных положений равновесия КТС (статическая устойчивость) и условия устойчивости движения при развёртывании системы (динамическая устойчивость). Анализ статической устойчивости производится с помощью теоремы Лагранжа-Дирихле и иллюстрируется построением фазовых портретов системы. Характерной особенностью анализа динамической устойчивости движе-

ния относительно местной вертикали при развёртывании КТС является наличие момента от сил Кориолиса. Действие этого момента в сочетании с аэродинамическими моментами может привести к потере динамической устойчивости движения, когда угол между направлением троса и местной вертикалью станет больше  $\pi / 2$ .

Для получения условий устойчивости и для проведения численного анализа производится построение математической модели движения КТС в орбитальной подвижной системе координат. Такая запись уравнений движения КТС является наиболее удобной для анализа статической и динамической устойчивости движения КТС, так как модель содержит переменные  $\theta$ ,  $d\theta / dt$ , где  $\theta$  – угол отклонения троса от вертикали, относительно которых производится анализ устойчивости движения. Основные допущения модели: 1) аэродинамические силы, действующие на трос, не учитываются; 2) движение происходит в центральном

ньютоновском гравитационном поле Земли; 3) вращение атмосферы не учитывается; 4) концевые тела – материальные точки; 5) движение КТС рассматривается в плоскости орбиты центра масс системы; 6) за время развёртывания КТС параметры орбиты центра масс не изменяются. Особенностью полученной математической модели движения КТС является наличие обобщённых аэродинамических сил, учитывающих силы лобового сопротивления, действующие на КА и зонд.

При развёртывании КТС с атмосферным зондом в положение, близкое к вертикальному положению, используется динамический закон выпуска троса, обеспечивающий демпфирование поперечных колебаний троса. Аналогичные законы использовались во многих работах, например [1 – 3], а также в реальном тросовом космическом эксперименте YES2 [4]. Особенностью рассматриваемого в данной работе закона является то, что он не накладывает ограничения на отношение масс концевых тел и массу троса.

Влияние сил аэродинамического сопротивления на движение КТС различных типов и структур рассматривалось во многих работах. Например, в работах [5-8] анализируется влияние атмосферы на движение и функционирование электродинамических КТС. Естественно, существенное влияние аэродинамические силы оказывают на движение по орбите надувных конструкций и сложных лёгких мультитросовых систем [9; 10]. Влияние аэродинамических сил на движение КТС на низкой орбите рассматривалось в [11]. Управление движением КТС на низких орбитах с целью компенсации влияния атмосферы рассматривалось в [12]. Анализ точек либраций и положений равновесия КТС с учётом аэродинамических сил проводился в работах [6; 13; 14]. Анализ работ, в которых учитывается влияние аэродинамических сил на движение КТС, показывает, что в настоящее время динамика развёртываемой КТС с концевым телом, обладающим большим баллистическим коэффициентом, недостаточно изу-

чена и требует более подробного исследования.

Настоящая работа посвящена анализу процесса развёртывания КТС с атмосферным зондом с целью обеспечения устойчивости движения. Невыполнение условий устойчивости приводит к неконтролируемому увеличению угла отклонения троса от местной вертикали, проведённой из центра масс механической системы.

### Математическая модель движения

При выводе уравнений движения КТС используются следующие системы координат (рис. 1, 2): 1) геоцентрическая система координат  $OXYZ$ ; 2) геоцентрическая орбитальная подвижная система координат  $Ox_oY_oZ_o$ ; 3) орбитальная подвижная система координат  $Cx_o y_o z_o$ ; 4) тросовая система координат  $Cx_t y_t z_t$ . Плоскость  $OXY$  геоцентрической системы координат  $OXYZ$  совпадает с плоскостью орбиты, ось  $OX$  направлена по линии узлов, ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости орбиты и направлена по вектору кинетического момента центра масс системы,  $OY$  дополняет систему координат до правой. Ось  $Ox_o$  системы координат  $Ox_oY_oZ_o$  направлена по линии  $OC$ , где  $C$  – центр масс системы. Система координат  $Ox_oY_oZ_o$  вращается относительно системы координат  $OXYZ$  с угловой скоростью  $\dot{u} = du / dt$ , где  $u$  – аргумент широты. Оси орбитальных подвижных систем координат  $Ox_oY_oZ_o$  и  $Cx_o y_o z_o$  параллельны. Положение тросовой системы координат  $Cx_t y_t z_t$  относительно системы координат  $Cx_o y_o z_o$  определяется углами  $\theta$  и  $\beta$  (рис. 2).

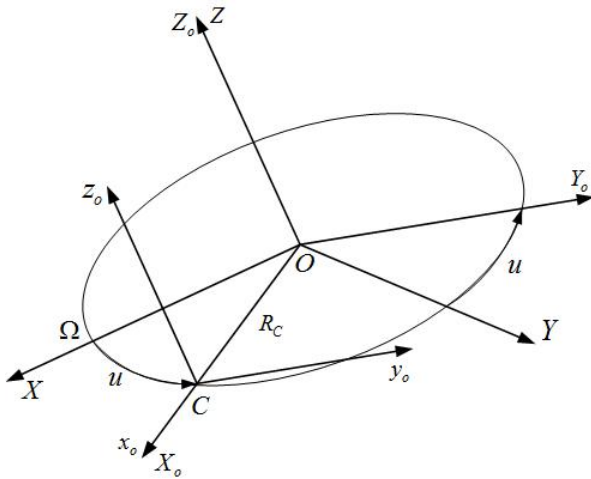


Рис. 1. Системы координат

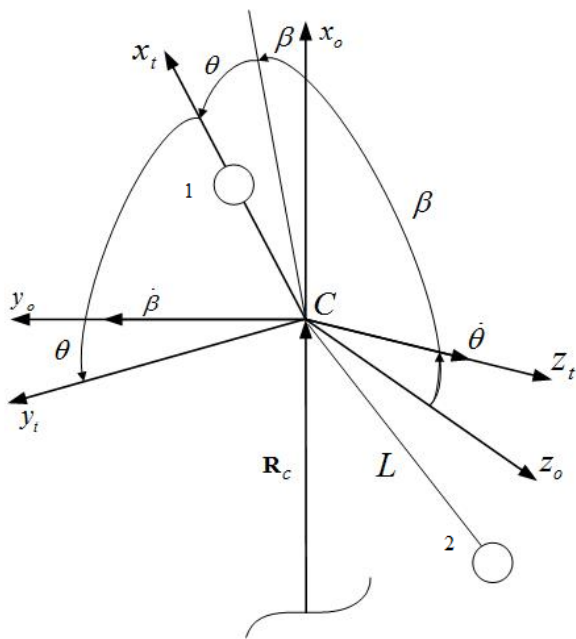


Рис. 2. Взаимное положение систем координат  $Cx_0y_0z_0$  и  $Cx_1y_1z_1$

При выводе уравнений движения в этом случае используются уравнения Ла-

Координаты концевых тел вычисляются из выражений

$$\begin{aligned} x_1 &= \left( R_c + L \frac{m_2 + L\rho/2}{M} \cos \beta \cos \theta \right) \cos u - L \frac{m_2 + L\rho/2}{M} \sin \theta \sin u, \\ y_1 &= \left( R_c + L \frac{m_2 + L\rho/2}{M} \cos \beta \cos \theta \right) \sin u + L \frac{m_2 + L\rho/2}{M} \sin \theta \cos u, \\ z_1 &= L \frac{m_2 + L\rho/2}{M} \cos \theta \sin \beta, \end{aligned} \quad (4)$$

гранжа с обобщёнными координатами  $q_1 = L, q_2 = \theta, q_3 = \beta$  (рис. 2):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad (1)$$

где  $T_c$  и  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергии системы;  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  ( $i=1,2,3$ ) – обобщённые координаты и скорости;  $Q_i$  – обобщённые непотенциальные силы.

Кинетическая энергия системы в (1) в данном случае представляет сумму трёх кинетических энергий:

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \\ &+ \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + T_r, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – массы КА и зонда;  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  – координаты концевых тел в неподвижной системе координат  $OXYZ$ ;  $T_r$  – кинетическая энергия троса.

Кинетическая энергия троса вычисляется следующим образом:

$$T_r = L\rho V_t^2 / 2 + T_r, \quad (3)$$

где  $V_t$  – скорость центра масс троса;  $\rho$  – линейная плотность троса;  $T_r = J_t \omega_t^2 / 2$ ,  $J_t = \rho L^3 / 12$ ,  $\omega_t$  – модуль угловой скорости троса.

$$\begin{aligned} x_2 &= \left( R_c - L \frac{m_1^0 - L\rho/2}{M} \cos \beta \cos \theta \right) \cos u + L \frac{m_1^0 - L\rho/2}{M} \sin \theta \sin u, \\ y_2 &= \left( R_c - L \frac{m_1^0 - L\rho/2}{M} \cos \beta \cos \theta \right) \sin u - L \frac{m_1^0 - L\rho/2}{M} \sin \theta \cos u, \\ z_2 &= -L \frac{m_1^0 - L\rho/2}{M} \cos \theta \sin \beta, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $m_1^0$  – начальная масса КА;  $R_c$  – радиус-вектор центра масс КТС;  $M = m_1^0 + m_2$ . В дальнейшем рассматривается движение КТС в плоскости орбиты центра масс системы, поэтому  $\beta = 0$ .

Для получения обобщённых сил, обусловленных гравитационным полем Земли, воспользуемся выражениями для потенциальной энергии каждого тела, входящего в систему:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= -\frac{K(m_1^0 - L\rho)}{r_1}, \\ \Pi_2 &= -\frac{Km_2}{r_2}, \\ \Pi_i &= \int_L d\Pi_i, \end{aligned}$$

где  $K$  – гравитационный параметр Земли;  $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ;  $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ ;  $d\Pi_i = -\frac{K\rho dx}{r_i}$ .

Подставляя выражения (2)-(5) в (1), вычисляя интегралы по длине троса и проводя дифференцирование, получим

$$M_e \ddot{L} = Lv_e \left[ (\dot{\theta} + \dot{u})^2 - \dot{u}^2 (1 - 3 \cos^2 \theta) \right] - T + Q_L, \quad (6)$$

$$J_e \ddot{\theta} = -2v_e L \dot{L} (\dot{\theta} + \dot{u}) - \frac{3}{2} J_e \dot{u}^2 \sin 2\theta + Q_\theta, \quad (7)$$

где  $M_e = (m_1^0 - L\rho)(m_2 + L\rho) / M$  – приведённая масса;

$J_e = L^2 (m_1^0 m_2 - 2L\rho m_2 / 3 + L\rho m_1^0 / 3 - L^2 \rho^2 / 4) / M$  – момент инерции всей системы относительно её центра масс;

$v_e = (m_1^0 - L\rho)(m_2 + L\rho/2) / M$ ,  $T$  – сила натяжения троса;  $Q_L$  и  $Q_\theta$  – обобщённые аэродинамические силы.

Программа развёртывания в вертикальное положение имеет вид

$$T = v_e \dot{u}^2 \left[ a(L - L_k) + bV_L / \dot{u} + 3L_k \right], \quad (8)$$

где  $L$  и  $V_L$  – длина и скорость выпуска троса;  $a$ ,  $b$  – параметры закона управления;  $L_k$  – конечная длина троса. Программа (8) записана для неизменной круговой орбиты, поэтому  $\dot{u} = \text{const}$ .

Программа (8) обобщает аналогичные программы, приведённые в [1-3], так как она записана для произвольного соотношения масс концевых тел и учитывает массу троса.

Если  $Q_L = Q_\theta = 0$ , то система (6)-(7) имеет асимптотически устойчивое положение равновесия:  $L = L_k$ ,  $V_L = \theta = \dot{\theta} = 0$  при  $a > 3$ ,  $b > 0$ . Доказательство этого утверждения может быть проведено по схеме, приведённой в [3], посредством анализа собственных значений соответствующей линеаризованной системы. Если  $Q_\theta \neq 0$ , то возможны два случая. При достаточно малых аэродинамических возмущениях  $Q_\theta \neq 0$  положение равновесия имеет смещение относительно местной вертикали. При этом качественно поведение системы не изменяется и свойство асимптотической устойчивости положения равновесия сохраняется. При увеличении по модулю обобщённой силы  $Q_\theta$  существует некоторое предельное её значение, когда устойчивой становится одно из горизонтальных положений КТС:

$\theta = \pm\pi/2$ . Подробнее эти случаи будут рассмотрены ниже при анализе вопросов, связанных со статической устойчивостью системы.

### Определение аэродинамических обобщённых сил

Аэродинамические силы, действующие на концевые тела, вычисляются из выражений

$$\vec{R}_k = -C_{xk} \rho_{ak} S_k V_k \vec{V}_k / 2, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

где  $\vec{V}_k$  – вектор скорости  $k$ -й точки относительно атмосферы;  $C_{xk}$  – коэффициенты сил аэродинамического сопротивления;  $S_k$  – характерные площади;  $\rho_{ak}$  – плотности атмосферы.

Скорости можно разложить на три составляющие (рис. 3):

$$\vec{V}_{rk} = \vec{V}_{ok} + \vec{V}_{\theta k} + \vec{V}_{Lk}, \quad (10)$$

где  $\vec{V}_{ok}$  – скорости точек за счёт вращения орбитальной системы координат  $OX_oY_oZ_o$  (переносные скорости);  $\vec{V}_{\theta k}, \vec{V}_{Lk}$  – скорости точек относительно системы координат  $OX_oY_oZ_o$  (относительные скорости);  $V_{\theta k} = \Delta L_k \dot{\theta}$ ,  $V_{Lk} = \Delta \dot{L}_k$ ,  $\Delta L_1 = Lm_2 / M$ ,  $\Delta L_2 = Lm_1 / M$ .

Соответственно суммарные аэродинамические силы, действующие на зонд и КА, можно разложить на составляющие:

$$\vec{R}_k = \vec{R}_{ok} + \vec{R}_{\theta k} + \vec{R}_{Lk}, \quad (11)$$

где  $\vec{R}_k, \vec{R}_{ok}, \vec{R}_{\theta k}, \vec{R}_{Lk}$  – аэродинамические силы, соответствующие скоростям  $\vec{V}_k, \vec{V}_{ok}, \vec{V}_{\theta k}, \vec{V}_{Lk}$ .

Обобщённые аэродинамические силы определяются из выражений  $Q_L = \delta A_L / \delta L$ ,  $Q_\theta = \delta A_\theta / \delta \theta$ , где  $\delta A_L$  и  $\delta A_\theta$  – работы на возможных перемещениях  $\delta L, \delta \theta$ .

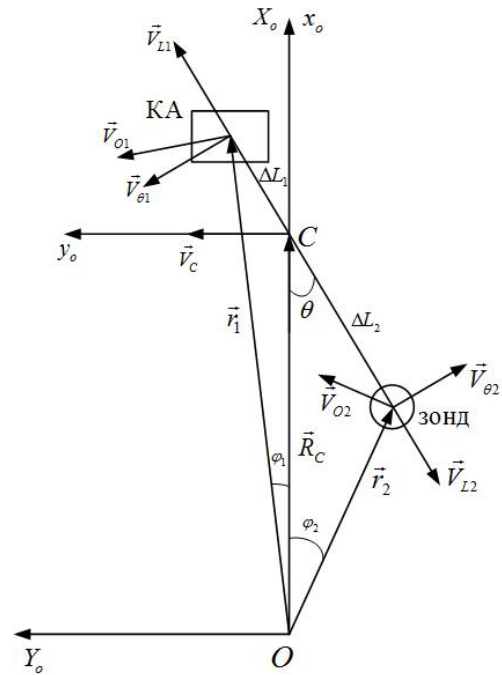


Рис. 3. Положения КА и зонда относительно орбитальных систем координат

Поэтому

$$Q_{\theta 1} = -C_1 S_1 \rho_{a1} V_1 \Delta L_1 (V_{o1} \cos(\theta - \phi_1) + V_{\theta 1}) / 2, \quad (12)$$

$$Q_{L1} = -C_1 S_1 \rho_{a1} V_1 m_2 (V_{o1} \sin(\theta - \phi_1) + V_{L1}) / 2M, \quad (13)$$

$$Q_{\theta 2} = C_2 S_2 \rho_{a2} V_2 \Delta L_2 (V_{o2} \cos(\theta + \phi_2) - V_{\theta 2}) / 2, \quad (14)$$

$$Q_{L2} = C_2 S_2 \rho_{a2} V_2 m_1 (V_{o2} \sin(\theta + \phi_2) - V_{L2}) / 2M. \quad (15)$$

Углы  $\phi_{1,2}$  определяются в соответствии с рис. 3.

Обобщённые силы, входящие в систему (6)-(7), определяются суммированием соответствующих выражений из (12)-(15):  $Q_\theta = Q_{\theta 1} + Q_{\theta 2}$ ,  $Q_L = Q_{L1} + Q_{L2}$ .

### Условия статической устойчивости

Рассмотрим уравнение колебаний КТС в плоскости орбиты при  $L = \text{const}$ :

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2} \Omega^2 \sin 2\theta + Q_\theta / J_e. \quad (16)$$

В дальнейшем будем называть этот случай статическим в том смысле, что выпуск троса не производится, а значит и длина троса не изменяется. Статический случай несёт важную информацию о свойствах системы, в частности, по окончании развёртывания системы в вертикальное положение имеем статическое положение троса относительно местной вертикали.

Для приближённого анализа уравнения (16) введём некоторые допущения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 \approx \varphi_2 \approx 0, \\ V_{L1}, V_{\theta 1} \ll V_{o1}, \\ V_{L2}, V_{\theta 2} \ll V_{o2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Если конечная длина троса  $L_k$  составляет несколько десятков километров, то для околоземных круговых орбит (высотой 250 км и более) углы  $\varphi_1, \varphi_2$  не превышают несколько градусов, а относительные скорости  $V_{Lk}, V_{\theta k}$  составляют меньше 0,1% от скоростей орбитального движения  $V_{ok}$ . Кроме того, для приближённого анализа можно положить:  $V_{o1} \approx V_{o2} \approx V_c$ , где  $V_c = \Omega R_c$  – круговая орбитальная скорость центра масс,  $\Omega = \dot{i}$ .

Таблица 1. Особые точки системы (18)

$\nu$	$\nu < -3$	$\nu \in (-3, 3)$	$\nu > 3$
Устойчивые точки ( $\theta$ )	$\pi / 2$	$-\arcsin(\nu / 3), \pi + \arcsin(\nu / 3)$	$3\pi / 2$
Неустойчивые точки ( $\theta$ )	$3\pi / 2$	$\pi / 2, 3\pi / 2$	$\pi / 2$

Таким образом, если параметр  $\nu \in (-3, 3)$  и  $\nu \neq 0$ , то устойчивые положения равновесия смещаются относительно вертикали (обобщённая сила  $Q_\theta$  имеет достаточно малые по модулю значения). Причём величина и знак этого смещения зависят от значения параметра  $\nu$ , то есть от баллистических коэффициентов конечных тел, высоты орбиты и конечной длины троса. Если  $|\nu| > 3$ , то устойчивыми являются только горизонтальные положе-

Используя допущения (17) и записывая уравнение (16) в безразмерном виде, получим

$$\theta'' + \frac{3}{2} \sin 2\theta + \nu \cos \theta = 0, \quad (18)$$

где  $\theta'' = d^2\theta / d\tau^2$ ;  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время;  $\nu = \frac{1}{2} \frac{V_c^2}{L\Omega^2} (\rho_{a1}\sigma_1 - \rho_{a2}\sigma_2)$  – безразмерный параметр;  $\sigma_{1,2} = C_{x1,2} S_{1,2} / m_{1,2}$ .

Уравнение (18) имеет интеграл

$$\frac{(\theta')^2}{2} + \Pi(\theta, \nu) = E = \text{const}, \quad (19)$$

где функция  $\Pi(\theta, \nu) = -\frac{3}{4} \cos 2\theta + \nu \sin \theta$  является аналогом потенциальной энергии системы.

В соответствии с теоремой Лагранжа-Дирихле точка равновесия системы (18) устойчива, если потенциальная энергия в ней имеет строгий локальный минимум, и неустойчива, если имеет максимум. На основании этого можно составить табл. 1 для особых точек системы, которые находятся на оси абсцисс  $\theta' = 0$ .

ния КТС (табл.1). Следовательно, условие статической устойчивости КТС имеет вид

$$|\nu| < 3. \quad (20)$$

Это условие, если оно выполняется в каждый момент времени, можно рассматривать как необходимое условие устойчивости движения при развёртывании КТС.

На рис. 4, 5 показаны характерные фазовые портреты системы (18), когда параметр  $|\nu| > 3$  (рис. 4) и  $|\nu| < 3$  (рис. 5).

Надо заметить, что можно подобрать параметры системы так, чтобы в конечный момент времени параметр  $\nu$  был равен 0. Тогда асимптотически устойчивое конечное положение равновесия при развёрты-

вании КТС будет находиться на местной вертикали и будет совпадать с аналогичным положением равновесия системы, определённом без учёта влияния атмосферы.

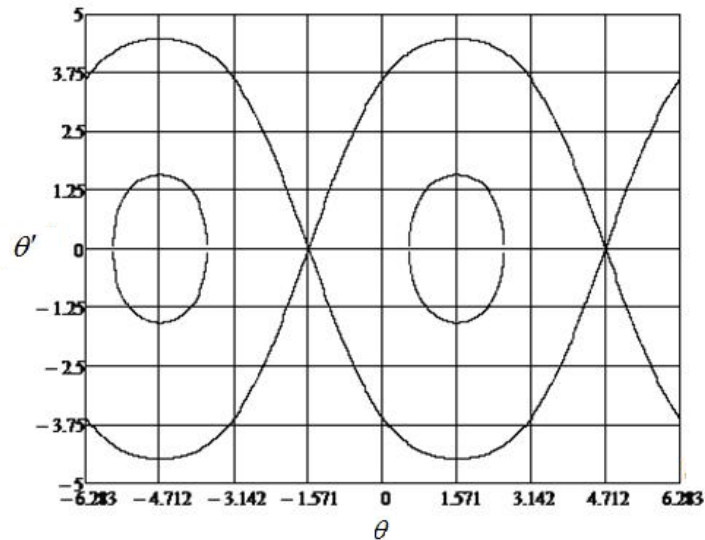


Рис. 4. Фазовый портрет системы ( $\nu = -5$ )

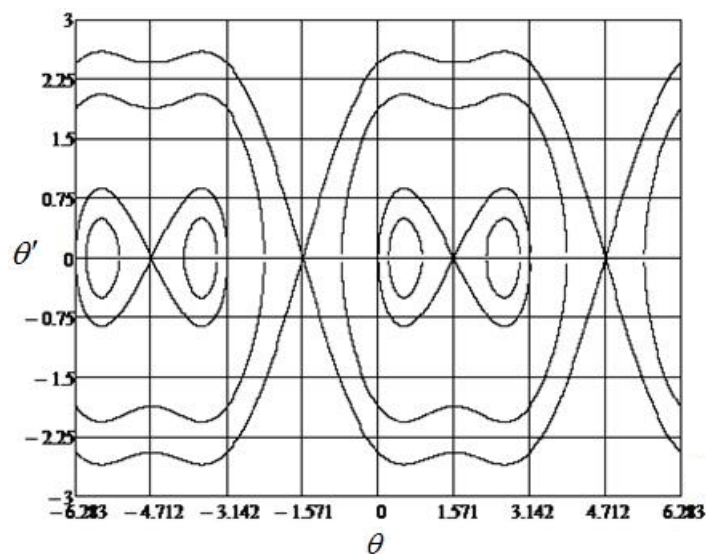


Рис. 5. Фазовый портрет системы ( $\nu = -1,5$ )

Таким образом, значения параметра  $\nu = \pm 3$  являются критическими. При дальнейшем увеличении по модулю параметра существует только одно статически устойчивое положение равновесия КТС, которое соответствует её горизонтальному положению ( $\theta = \pi/2$  или  $\theta = 3\pi/2$ ). В этом случае влияние аэродинамических

сил на поведение системы становится определяющим.

#### Условия динамической устойчивости

При развёртывании КТС уравнение (7), описывающее изменение угла  $\theta$ , в безразмерной форме принимает вид

$$\theta'' + \frac{3}{2} \sin 2\theta + F(\theta, \nu, \mu) = 0, \quad (21)$$

где  $F(\theta, \nu, \mu) = \nu \cos \theta + \mu$ ;

$$\mu = 2 \frac{L'}{L} (\theta' + 1).$$

Здесь безразмерный параметр  $\mu$  определяет действие возмущающего момента от силы Кориолиса и равен отношению момента Кориолиса к гравитационному моменту. В статическом случае этот момент отсутствует, так как  $L' = 0$ . Таким образом, динамическая устойчивость движения системы относительно положений равновесия, близких к вертикали, определяется действием возмущения  $F(\theta, \nu, \mu)$ , которое зависит от изменения параметров КТС при её развёртывании. Причём влияние этого возмущения возрастает при малых значениях длины троса  $L$ , так как параметры  $\nu, \mu$  имеют особенность при  $L \rightarrow 0$ . Это объясняется тем, что при  $L \rightarrow 0$  гравитационный момент стремится к нулю. Поэтому при анализе динамической устойчивости движения КТС особое внимание необходимо уделять начальному участку развёртывания КТС. Этот участок также очень важен с точки зрения безопасности проведения эксперимента по развёртыванию троса, так как при потере устойчивости движения системы возможно столкновение КА и зонда.

Анализ движения КТС на начальном участке, который следует сразу после отделения зонда от КА, показывает, что возможны два характерных случая. Эти два случая типичны и отличаются различными знаками параметра  $\nu$ , который соответствует знаку момента от аэродинамических сил относительно центра масс системы. С другой стороны, момент от сил Кориолиса при развёртывании системы  $L' > 0$  всегда действует в одном направлении, противоположном угловой скорости  $\Omega$  орбитального движения центра масс КТС. Поэтому наиболее опасным случаем с точки зрения потери динамиче-

ской устойчивости движения КТС при её развёртывании является случай, когда знаки параметров  $\nu, \mu$  совпадают, то есть моменты от аэродинамических сил и сил Кориолиса направлены в одну сторону.

На начальном участке развёртывания КТС высоты, на которых находятся КА и зонд, очень близки. Поэтому  $\rho_{a1} \approx \rho_{a2}$  и, следовательно, знак и величина параметра  $\nu$  определяется разностью баллистических коэффициентов  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ . В этом случае достаточное условие динамической устойчивости движения КТС можно записать в виде неравенства

$$\Delta\sigma_1 < \Delta\sigma < \Delta\sigma_2, \quad (22)$$

где  $\Delta\sigma_1 < 0$ ,  $\Delta\sigma_2 > 0$  – некоторые предельные значения разности  $\Delta\sigma$ , причём  $|\Delta\sigma_2| \ll |\Delta\sigma_1|$ . Существенная несимметричность интервала объясняется действием момента от сил Кориолиса, который при развёртывании системы всегда действует в одном направлении. Предельные значения параметра  $\Delta\sigma$  можно определить только численно, если известны характеристики КТС, скорость разделения КА и зонда и т.д.

В качестве примера определения предельных значений параметра  $\Delta\sigma$  рассмотрим КТС со следующими характеристиками: высота круговой орбиты  $H = 250$  км; коэффициенты сил аэродинамического сопротивления  $C_{x1,2} = 2,4$ ; относительная скорость отделения зонда  $2$  м/с; массы  $m_1 = m_2 = 100$  кг; баллистический коэффициент КА  $\sigma_1 = 0,075$  м<sup>2</sup>/кг; параметры закона управления (8)  $a = 4$ ,  $b = 5$ . Изменяя характерную площадь зонда, нетрудно определить предельные значения параметра  $\Delta\sigma$ , которые равны  $\Delta\sigma_1 = -30$  м<sup>2</sup>/кг,  $\Delta\sigma_2 = 0,021$  м<sup>2</sup>/кг.

На рис. 6 приведены примеры траекторий зонда относительно КА в орбитальной подвижной системе координат



$Sx_o y_o z_o$ . Случаю динамической неустойчивости движения КТС ( $\sigma_2 = 0,019 \text{ м}^2/\text{кг}$ ) соответствует сплошная кривая, случаю устойчивого движения – штриховая линия ( $\sigma_2 = 0,118 \text{ м}^2/\text{кг}$ ). При моделировании использовались параметры стандартной атмосферы ГОСТ 4401-81, ГОСТ 25645.101-83.

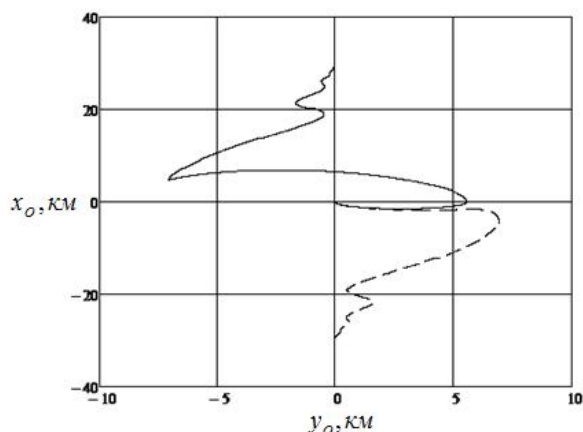


Рис. 6. Траектории зонда относительно КА в орбитальной подвижной системе координат  $Sx_o y_o z_o$

### Выводы

На основании проведённого анализа можно сделать следующие выводы:

1. Статическая устойчивость колебаний КТС относительно вертикали обеспечивается при выполнении условия (20), причём в общем случае при выборе пара-

метров системы необходимо стремиться к минимально возможному значению  $|\nu|$ .

2. Динамическая устойчивость движения КТС при её развёртывании обеспечивается при выполнении условия (22), причём имеет место существенное отличие абсолютных значений предельных величин параметра:  $|\Delta\sigma_2| \ll |\Delta\sigma_1|$ , где  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ ,  $\sigma_{1,2}$  – баллистические коэффициенты КА и зонда.

3. Начальный участок развёртывания КТС является наиболее опасным с точки зрения обеспечения динамической устойчивости движения системы с учётом влияния аэродинамических сил, так как на этом участке стабилизирующее влияние гравитационного момента минимально.

4. При выборе параметров КТС необходимо стремиться к тому, чтобы параметры  $\nu, \mu$  имели, по крайней мере, разные знаки, поскольку в противном случае направления действия моментов от сил инерции и аэродинамических сил совпадают и создаются наиболее благоприятные условия для потери динамической устойчивости движения системы.

Дон Чжэ благодарит правительство КНР в лице фонда CSC (China Scholarship Council) за материальную поддержку при обучении в аспирантуре Самарского государственного аэрокосмического университета.

### Библиографический список

1. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
2. Ишков С.А., Наумов С.А. Управление развёртыванием орбитальной тросовой системы // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2006. № 1(9). С. 77-85.
3. Заболотнов Ю.М. Управление развёртыванием орбитальной тросовой системы в вертикальное положение с малым грузом // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79, № 1. С. 37-47.
4. Kruijff M. Tethers in Space. The Netherlands: Delta-Utec Space Research, 2011. 432 p.

5. Zhou Y., Sun Q. The dynamic analysis of electro-dynamic tether under atmospheric environment // Machinery Design and Manufacture. 2012. Iss. 4. P. 198-200.
6. Zhong R., Zhu Z. Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2013. V. 116, Iss. 3. P. 279-298. DOI: 10.1007/S10569-013-9489-4
7. Wong B., Damaren Ch. Control of the Electrodynamic Boom Propulsion System Accounting for Atmospheric Drag // Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2010. V. 33, Iss. 5. P. 1327-1333. DOI: 10.2514/1.48972
8. Zhong R., Zhu Z. Long-term libration dynamics and stability analysis of electrodynamic tethers in spacecraft deorbit // Journal of Aerospace Engineering. 2014. V. 27, Iss. 5. P. 04014020. DOI: 10.1061/(asce)as.1943-5525.0000310
9. Stiles L.A., Schaub H., Maute K.K., Moorer D.F. Electrostatically inflated gossamer space structure voltage requirements due to orbital perturbations // Acta Astronautica. 2013. V. 84. P. 109-121. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.11.007
10. Razzaghi P., Assadian N. Study of the triple-mass Tethered Satellite System under aerodynamic drag and  $J_2$  perturbations // Advances in Space Research. 2015. V. 56, Iss. 10. P. 2141-2150. DOI: 10.1016/j.asr.2015.07.046
11. Zanutto D. Analysis of Propellantless Tethered System for the De-Orbiting of Satellites at End of Life. PhD Thesis. Università degli Studi di Padova, 2013. 207 p. Available at: <http://paduaresearch.cab.unipd.it/5369/>
12. Aorpimai M., Navakitkanok P. Orbit Control Manoeuvre Strategy for Post-Mission De-Orbiting of A Low-Earth-Orbit Satellite // Applied Mechanics and Materials. 2015. V. 781. P. 495-499. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.781.495
13. Rossi E.V., Cicci D.A., Cochran J.E. Existence of periodic motions of a tether trailing satellite // Applied Mathematics and Computation. 2004. V. 155, Iss. 1. P. 269-281. DOI: 10.1016/s0096-3003(03)00776-8
14. Dong Z., Li A., Wang C., Zabolotnov Yu. Modeling and Simulation Analysis Equilibrium Position of Space Tether System // Journal Computer Simulation. 2014. V. 31, Iss. 2. P. 160-164.

### **Информация об авторах**

**Дон Чжэ**, аспирант кафедры программных систем, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [dongzhe@yandex.ru](mailto:dongzhe@yandex.ru). Область научных интересов: космические тросовые системы.

**Заболотнов Юрий Михайлович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программных систем, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [yumz@yandex.ru](mailto:yumz@yandex.ru). Область научных интересов: динамика космических систем и космических аппаратов, орбитальные тросовые системы, движение космических аппаратов в атмосфере, асимптотические методы механики.

**Ван Чанцин**, PhD, доцент института автоматизации, Северо-западный политехнический университет, г. Сиань, КНР. E-mail: [wangcq@mail.ru](mailto:wangcq@mail.ru). Область научных интересов: автоматические системы управления, динамика космических тросовых систем.

## ANALYSIS OF MOTION STABILITY OF A DEPLOYED SPACE TETHER SYSTEM WITH AN ATMOSPHERIC PROBE

© 2016 Dong Zhe<sup>1</sup>, Yu. M. Zabolotnov<sup>1</sup>, Wang Changqing<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

<sup>2</sup>Northwestern Polytechnic University, Xi'an, China

The stability of motion of a space tether system with an atmospheric probe is investigated in the paper. The equilibrium position stability of a space tether system near the local vertical (static stability) and deployment stability (dynamic stability) is studied. A tether system consists of spacecraft from which the tether is deployed and an atmospheric probe. The Lagrangian method is used to derive a dynamic model of the tether system's motion in a mobile orbital system of coordinates considering aerodynamic forces acting on the spacecraft and the probe. The conditions of tether system motion stability with respect to the local vertical are determined. Analytical analysis is confirmed by numerical examples.

*Space tether system, atmospheric probe, static stability, dynamic stability, stability conditions, phase plane approach, numerical analysis.*

### References

1. Beletskiy V.V., Levin E.M. *Dinamika kosmicheskikh trosovykh system* [Dynamics of space tether systems]. Moscow: Nauka Publ., 1990. 336 p.
2. Ishkov S.A., Naumov S.A. Control over orbital tether system unfolding. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2006. No. 1(9). P. 77-85.
3. Zabolotnov Yu.M. Control of the deployment of a tethered orbital system with a small load into a vertical position. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. V. 79, Iss. 1. P. 28-34. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2015.04.015
4. Kruijff M. *Tethers in Space*. The Netherlands: Delta-Utec Space Research, 2011. 432 p.
5. Zhou Y., Sun Q. The dynamic analysis of electro-dynamic tether under atmospheric environment. *Machinery Design and Manufacture*. 2012. Iss. 4. P. 198-200.
6. Zhong R., Zhu Z. Libration dynamics and stability of electrodynamic tethers in satellite deorbit. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. V. 116, Iss. 3. P. 279-298. DOI: 10.1007/s10569-013-9489-4
7. Wong B., Damaren Ch. Control of the Electrodynamic Boom Propulsion System Accounting for Atmospheric Drag. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2010. V. 33, Iss. 5. P. 1327-1333. DOI: 10.2514/1.48972
8. Zhong R., Zhu Z. Long-term libration dynamics and stability analysis of electrodynamic tethers in spacecraft deorbit. *Journal of Aerospace Engineering*. 2014. V. 27, no. 5. P. 1-13.
9. Stiles L.A., Schaub H., Maute K.K., Moorer D.F. Electrostatically inflated gossamer space structure voltage requirements due to orbital perturbations. *Acta Astronautica*. 2013. V. 84. P. 109-121. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.11.007
10. Razzaghi P., Assadian N. Study of the triple-mass Tethered Satellite System under aerodynamic drag and  $J_2$  perturbations. *Advances in Space Research*. 2015. V. 56, Iss. 10. P. 2141-2150. DOI: 10.1016/j.asr.2015.07.046
11. Zanutto D. Analysis of Propellantless Tethered System for the De-Orbiting of Satellites at End of Life. PhD Thesis. Università degli Studi di Padova, 2013. 207 p. Available at: <http://paduaresearch.cab.unipd.it/5369/>

---

*Citation:* Dong Zhe, Zabolotnov Yu.M., Wang Changqing. Analysis of motion stability of a deployed space tether system with an atmospheric probe. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 2. P. 102-113. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-2-102-113

12. Aorpimai M., Navakitkanok P. Orbit Control Manoeuvre Strategy for Post-Mission De-Orbiting of A Low-Earth-Orbit Satellite // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. V. 781. P. 495-499. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amm.781.495

13. Rossi E.V., Cicci D.A., Cochran J.E. Existence of periodic motions of a tether trailing satellite. *Applied Mathematics and Computation*. 2004. V. 155, Iss. 1. P. 269-281. DOI: 10.1016/s0096-3003(03)00776-8

14. Dong Z., Li A., Wang C., Zabolotnov Yu. Modeling and Simulation Analysis Equilibrium Position of Space Tether System. *Journal Computer Simulation*. 2014. V. 31, Iss. 2. P. 160-164.

#### **About the authors**

**Dong Zhe**, postgraduate student of the Department of Software Systems, Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation. E-mail: [dongzhe@yandex.ru](mailto:dongzhe@yandex.ru). Area of Research: space tether systems.

**Zabolotnov Yury Mikhailovich**, Doctor of Science (Engineering), Professor, Professor of the Department of Software Systems, Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation. E-mail: [yumz@yandex.ru](mailto:yumz@yandex.ru). Area of Research: dynamics of space systems and spacecraft, space tether systems, spacecraft motion in the atmosphere, asymptotic mechanics methods.

**Wang Changqing**, PhD, Associate professor, Institute of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xian, China. E-mail: [wangcq@mail.ru](mailto:wangcq@mail.ru). Area of Research: automatic control systems, dynamics of space tether system.