

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА И ДЕМПФИРОВАНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ НАНОСПУТНИКОВ И МИКРОСПУТНИКОВ С МАГНИТНЫМИ КАТУШКАМИ НА БОРТУ

© 2016 В. В. Любимов, С. В. Подклетнова

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва

Рассматривается получение оптимального закона управления бортовыми магнитными катушками, обеспечивающего уменьшение кинетического момента наноспутников и микроспутников до заданных малых величин с последующим их поддержанием. Показывается, что применение полученного оптимального закона управления способствует значительному увеличению быстродействия магнитной системы управления ориентацией в задаче уменьшения кинетических моментов указанных спутников до малых величин. Отдельно обсуждается вопрос о демпфировании угловой скорости спутников в соответствии с заданной эталонной моделью, представляющей собой систему из трёх независимых линейных однородных уравнений. Приводятся численные результаты применения законов в задаче уменьшения кинетического момента и угловых скоростей спутников. Определяются достоинства и недостатки, характерные для представленных законов управления магнитными моментами наноспутников и микроспутников.

*Катушки, магнитный момент, закон управления, наноспутник, микроспутник, кинетический момент, демпфирование, уравнения движения.*

### Введение

Постоянное совершенствование бортовых устройств и оборудования, приводящее к уменьшению массы и размеров данных устройств, а также относительно небольшая стоимость малых спутников способствуют увеличению числа орбитальных группировок микроспутников и наноспутников. Системы управления ориентацией указанных спутников с длительными орбитальными сроками функционирования содержат в качестве исполнительных органов постоянные магниты [1;2] или электромагнитные катушки [3;4].

При отделении от базового комплекса наноспутники и микроспутники (будем в дальнейшем называть их спутниками) приобретают остаточные кинетические моменты [5]. Существует несколько известных законов управляемого уменьше-

ния угловой скорости спутников, основывающихся на взаимодействии магнитного поля катушек с геомагнитным полем [4], [6-8]. На практике при уменьшении угловой скорости спутников наибольшее применение получил закон управления, описанный в [9]. Известно, что применение электромагнитных катушек в системе управления вращательным движением обеспечивает реализацию достаточно малых механических управляющих моментов [4]. В результате время, затрачиваемое на управление угловой скоростью спутников с катушками на борту, достигает значительных величин. В работе [10] был описан оптимальный по быстродействию закон управления магнитными катушками, приводящий к эффективному уменьшению угловой скорости микроспутника, имеющего форму, близкую к кубической.

*Цитирование:* Любимов В.В., Подклетнова С.В. Оптимальные законы управления для уменьшения кинетического момента и демпфирования угловой скорости наноспутников и микроспутников с магнитными катушками на борту // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15, № 2. С. 57-67.  
DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-2-57-67

С целью улучшения характеристик быстродействия системы управления ориентацией (на этапе уменьшения кинетического момента спутников) ставится задача по разработке новых оптимальных законов управления электромагнитными катушками.

Рассмотрим нахождение закона уменьшения кинетического момента и закона демпфирования угловой скорости, которые являются оптимальными по быстродействию и реализуются посредством магнитных моментов бортовых катушек, установленных на микроспутнике или наноспутнике. Предположим, что управляемое уменьшение вектора кинетического момента спутника осуществляется до малых значений, определяемых погрешностью датчиков угловой скорости.

### Уравнения вращательного движения спутника

Математическая модель вращательного движения спутника относительно центра масс содержит три динамических уравнения Эйлера и четыре кинематических уравнения для параметров Родрига-Гамильтона. Динамические уравнения вращательного движения спутника в связанной системе координат  $XYZ$  записываются следующим образом:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K} = \vec{M}. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{K} = (K_x, K_y, K_z)$  – вектор кинетического момента спутника;

$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$  – вектор управляющего механического момента;

$$M_x = L_y B_z - L_z B_y, \quad M_y = L_z B_x - L_x B_z,$$

$M_z = L_x B_y - L_y B_x$ ;  $\vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$  – вектор магнитного момента, создаваемого катушками, расположенными вдоль осей  $X, Y, Z$ ;  $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$  – вектор магнитной индукции геомагнитного поля;

$OXYZ$  – главная центральная связанная со спутником система координат.

Вектор магнитной индукции рассчитывается в соответствии с моделью прямого диполя, являющейся простейшей моделью магнитного поля Земли. В этом случае проекции вектора магнитной индукции на оси орбитальной системы координат  $X_o Y_o Z_o$  записываются в виде [4]:

$$\begin{aligned} B_{x0} &= \mu_e \sin i \cos u / r^3, \\ B_{y0} &= \mu_e \cos i / r^3, \end{aligned} \quad (2)$$

$$B_{z0} = -2\mu_e \sin i \sin u / r^3,$$

где  $\mu_e = 8,1 \times 10^{22} \text{ Ам}^2$  – магнитный постоянная Земли;  $i$  – наклонение орбиты;  $u$  – аргумент широты;  $r$  – радиус круговой орбиты спутника.

Кинематические параметры Родрига-Гамильтона определяются из решения следующей системы уравнений [11]:

$$2 \frac{d\chi_0}{dt} = -\omega_x \chi_1 - \omega_y \chi_2 - \omega_z \chi_3, \quad (3)$$

$$2 \frac{d\chi_1}{dt} = \omega_x \chi_0 + \omega_z \chi_2 - \omega_y \chi_3, \quad (4)$$

$$2 \frac{d\chi_2}{dt} = \omega_y \chi_0 + \omega_x \chi_3 - \omega_z \chi_1, \quad (5)$$

$$2 \frac{d\chi_3}{dt} = \omega_z \chi_0 + \omega_y \chi_1 - \omega_x \chi_2, \quad (6)$$

где  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – вектор угловой скорости спутника.

### Оптимальный закон управления магнитными моментами катушек для уменьшения кинетического момента спутника

Получим оптимальный закон управления магнитными моментами катушек, позволяющий уменьшить кинетический момент спутника до заданных малых величин. Задача состоит в следующем: требуется определить величины магнитных моментов  $L_x, L_y, L_z$ , при которых угловые

скорости  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  переходят от начальных немалых величин  $(\omega_x(0), \omega_y(0), \omega_z(0))$  в окрестность начала координат  $(0,0,0)$ . В процессе решения данной задачи необходимо обеспечить достижение минимума функционала [12]:

$$G(M) = I_x \dot{\omega}_x^2 + I_y \dot{\omega}_y^2 + I_z \dot{\omega}_z^2, \quad (7)$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – осевые моменты инерции спутника. Предположим, что спутник имеет форму параллелепипеда и его моменты инерции:

$$I_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}, \quad I_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12},$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dt} &= - \left( \lambda_{xx} \frac{\partial G(M)}{\partial M_x} + \lambda_{xy} \frac{\partial G(M)}{\partial M_y} + \lambda_{xz} \frac{\partial G(M)}{\partial M_z} \right), \\ \frac{dM_y}{dt} &= - \left( \lambda_{yx} \frac{\partial G(M)}{\partial M_x} + \lambda_{yy} \frac{\partial G(M)}{\partial M_y} + \lambda_{yz} \frac{\partial G(M)}{\partial M_z} \right), \\ \frac{dM_z}{dt} &= - \left( \lambda_{zx} \frac{\partial G(M)}{\partial M_x} + \lambda_{zy} \frac{\partial G(M)}{\partial M_y} + \lambda_{zz} \frac{\partial G(M)}{\partial M_z} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\frac{\partial G(M)}{\partial M_x} = 2\dot{\omega}_x, \quad \frac{\partial G(M)}{\partial M_y} = 2\dot{\omega}_y, \quad \frac{\partial G(M)}{\partial M_z} = 2\dot{\omega}_z$ ; постоянные величины  $M_x = -(\lambda_{xx}\omega_x + \lambda_{xy}\omega_y + \lambda_{xz}\omega_z),$   
 $M_y = -(l_{yx}w_x + l_{yy}w_y + l_{yz}w_z),$   
 $M_z = -(\lambda_{zx}\omega_x + \lambda_{zy}\omega_y + \lambda_{zz}\omega_z).$  (9)

$\lambda_{mn}, m, n = i, j, k$  образуют матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}.$$

Проинтегрировав систему (8) при начальных величинах механических моментов и начальных значениях угловых скоростей, обеспечивающих взаимную компенсацию данных начальных величин, получим:

$$I_z = \frac{m(b^2 + a^2)}{12}.$$

Здесь  $m$  – масса спутника;  $a, b, c$  – размеры спутника относительно осей  $X, Y, Z$ .

Для достижения минимума функционала (7) применяется градиентный метод [12]. Функционал (7) характеризует величину энергии ускорения вращательного движения. Значение функционала (7) в каждый момент времени движения должно принадлежать малой окрестности своего минимума. Можно показать, что дифференциальный закон, описывающий достижение функционалом  $G(M)$  своего минимума в простейшем случае имеет вид:

### Вычисление магнитных моментов бортовых катушек

Запишем управляющие моменты:  $M_x = L_y B_z - L_z B_y, \quad M_y = L_z B_x - L_x B_z, \quad M_z = L_x B_y - L_y B_x.$  Приравняв данные соотношения и выражения (9), получим:

$$\begin{aligned} L_y B_z - L_z B_y &= -(\lambda_{xx}\omega_x + \lambda_{xy}\omega_y + \lambda_{xz}\omega_z), \\ L_z B_x - L_x B_z &= -(\lambda_{yx}\omega_x + \lambda_{yy}\omega_y + \lambda_{yz}\omega_z), \\ L_x B_y - L_y B_x &= -(\lambda_{zx}\omega_x + \lambda_{zy}\omega_y + \lambda_{zz}\omega_z). \end{aligned} \quad (10)$$

Из первого и второго уравнений системы (10) выразим магнитные моменты  $L_y$  и  $L_x$  соответственно. В результате получим:

$$L_y = \frac{L_z B_y}{H_z} - 2 \frac{(\lambda_{xx} \omega_x + \lambda_{xy} \omega_y + \lambda_{xz} \omega_z)}{B_z},$$

$$L_x = \frac{L_z B_x}{H_z} + 2 \frac{(\lambda_{yx} \omega_x + \lambda_{yy} \omega_y + \lambda_{yz} \omega_z)}{B_z}. \quad (11)$$

Третью составляющую вектора магнитного момента  $L_z$  можно найти из известных законов управления [4]. После подстановки выражений (11) в третье уравнение системы (10) получаем равенство, выполнение которого необходимо для решения задачи по оптимальному по быстродействию уменьшению кинетического момента спутников:

$$(\lambda_{yx} H_y + \lambda_{xx} H_x + \lambda_{zx} H_z) \omega_x +$$

$$+ (\lambda_{yy} H_y + \lambda_{xy} H_x + \lambda_{zy} H_z) \omega_y +$$

$$+ (\lambda_{yz} H_y + \lambda_{xz} H_x + \lambda_{zz} H_z) \omega_z = 0.$$

Если матрица  $A$  отвечает условию об определённой положительности квадратичной формы ( $\omega^T A \omega > 0$ ), то управляемое движение системы, описывающей вращательное движение спутника, является асимптотически устойчивым. В этом случае вектор составляющих угловой скорости  $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow 0$  при условии, что время  $t \rightarrow \infty$ . Следовательно, управляющие моменты, вычисляемые из выражений (10), обеспечивают решение задачи по уменьшению кинетического момента спутника до заданных малых значений.

Рассмотрим два частных случая.

1. Простейший частный случай: матрица  $A$  является единичной. Если единичная матрица  $A$  удовлетворяет условию  $\omega^T A \omega > 0$ , то уравнения (10) в этом случае принимают вид:

$$L_y B_z - L_z B_y = -2\omega_x,$$

$$L_z B_x - L_x B_z = -2\omega_y, \quad (12)$$

$$L_x B_y - L_y B_x = -2\omega_z.$$

Решая систему (10) с учётом элементов единичной матрицы  $A$ , находим:

$$L_x = \frac{L_z B_x}{B_z} + 2 \frac{\omega_y}{B_z},$$

$$L_y = \frac{L_z B_y}{B_z} - 2 \frac{\omega_x}{B_z}. \quad (13)$$

Третья составляющая вектора магнитного момента  $L_z$  может быть найдена из известных законов управления [6]. Выражения (13) позволяют решить задачу оптимального уменьшения кинетического момента при выполнении равенства  $B_x \omega_x + B_y \omega_y + B_z \omega_z = 0$ .

2. Рассмотрим матрицу  $A$  следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица, как и единичная, отвечает условиям Сильвестра об определённой положительности квадратичной формы. Уравнения (10) во втором случае записываются таким образом:

$$L_y B_z - L_z B_y = -2(\omega_x + \omega_y),$$

$$L_z B_x - L_x B_z = -2 \cdot (\omega_y + \omega_z), \quad (14)$$

$$L_x B_y - L_y B_x = -2 \cdot (\omega_x + \omega_z).$$

Из решения системы (14) с учётом элементов рассматриваемой матрицы  $A$  находим:

$$L_x = \frac{L_z B_x}{B_z} + 2 \frac{\omega_y}{B_z} + 2 \frac{\omega_z}{B_z}, \quad (15)$$

$$L_y = \frac{L_z B_y}{B_z} + \frac{2\omega_x}{B_x} + \frac{2B_y \omega_y}{B_x B_z} + \frac{2\omega_z}{B_x} \left(1 + \frac{B_y}{B_z}\right).$$

Третья составляющая вектора магнитного момента  $L_z$  может быть найдена из известных законов управления [6]. Для

решения поставленной задачи требуется выполнение равенства:

$$(B_x + B_z)\omega_x + (B_x + B_z)\omega_z + (B_y + B_z)\omega_z = 0.$$

На рис. 1 представлена зависимость трёх составляющих кинетического момента микроспутника массой 75 кг в форме прямоугольного параллелепипеда. Для кинетического момента данного спутника использовался закон управления (13).

В процессе моделирования было обеспечено выполнение равенства  $B_x\omega_x + B_y\omega_y + B_z\omega_z = 0$ . Третья составляющая магнитного момента определялась из известного закона управления [4]:  $L_z = I_x\omega_x B_y - I_y\omega_y B_x$ . На рис. 1 изменение составляющих кинетического момен-

та спутника  $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$  показано сплошной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно. Из рис. 1 следует, что применение простейшего закона управления (13) обеспечивает эффективное уменьшение составляющих кинетического момента спутника. При этом уменьшение угловой скорости до величин менее 0.1 град/с достигается за время управления, равное восьмидесяти секундам.

Далее наблюдается более медленный процесс, приводящий к постепенному уменьшению угловой скорости и кинетического момента спутника.

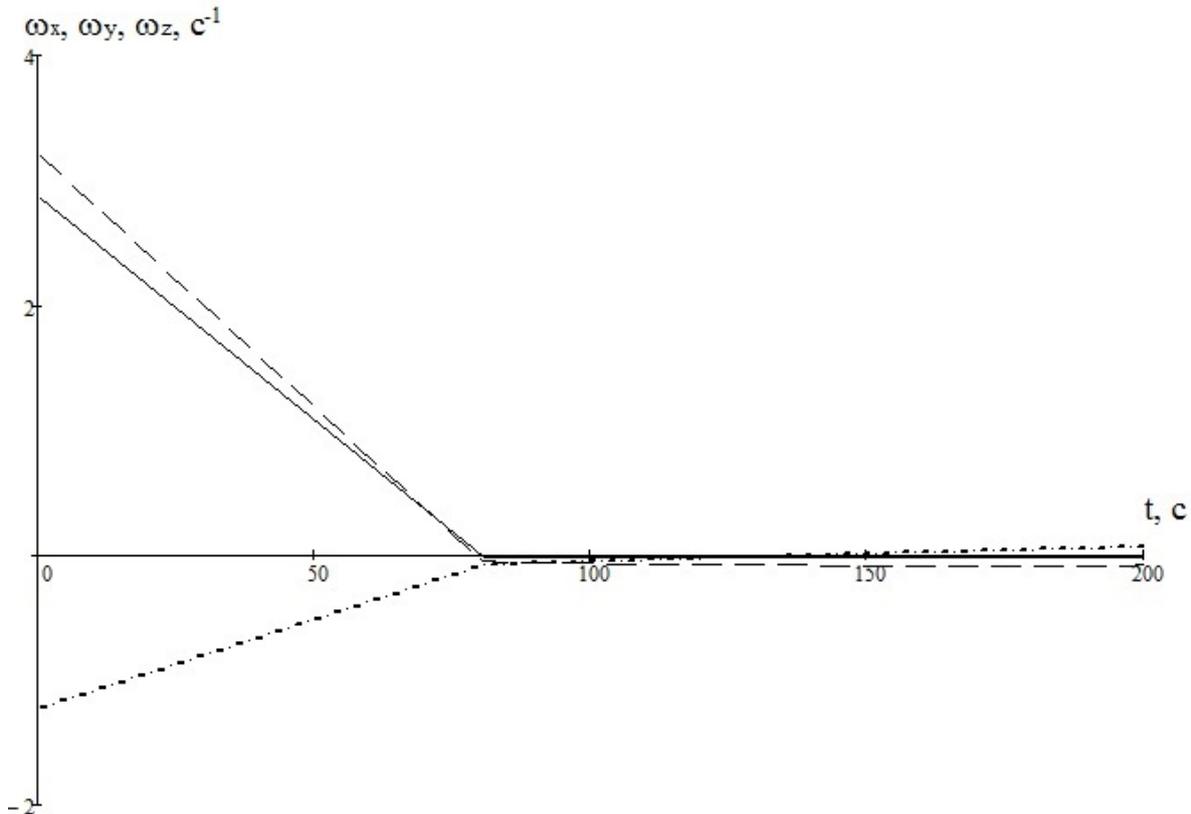


Рис. 1. Изменение составляющих кинетического момента спутника при использовании закона (13)

### Демпфирование угловой скорости наноспутников и микроспутников

Механические управляющие моменты (9) переводят систему в состояние покоя по произвольной неконтролируемой траектории, так как они были получены без учёта требований к переходному про-

цессу. Найдём управляющие моменты  $M_x, M_y, M_z$ , при которых система из произвольного состояния  $\omega(0)$  переходит в окрестность начала координат  $\omega = 0$  и остаётся в этой окрестности бесконечно долго. При этом траектория управляемого

движения по угловой скорости должна совпадать с требуемой точностью с траекторией, определяемой системой независимых дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_x^* + \gamma_{x1}\dot{\omega}_x^* + \gamma_{x0}\omega_x^* &= 0, \\ \ddot{\omega}_y^* + \gamma_{y1}\dot{\omega}_y^* + \gamma_{y0}\omega_y^* &= 0, \\ \ddot{\omega}_z^* + \gamma_{z1}\dot{\omega}_z^* + \gamma_{z0}\omega_z^* &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\gamma_{x1}, \gamma_{x0}, \gamma_{y1}, \gamma_{y0}, \gamma_{z1}, \gamma_{z0}$  – положительные числа;  $\omega_x^*, \omega_y^*, \omega_z^*$  – угловые скорости, определяемые из эталонной модели (16). В соответствии с уравнениями (16) при  $t \rightarrow \infty$  выполняются предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_x^*(t) &\rightarrow 0, \\ \omega_y^*(t) &\rightarrow 0, \\ \omega_z^*(t) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Перевод спутника в заданное состояние будем осуществлять в соответствии с фазовыми траекториями движения эталонной модели (16). Точность приближения управляемых процессов

$$\omega_x(t) \rightarrow 0, \omega_y(t) \rightarrow 0, \omega_z(t) \rightarrow 0$$

к эталонным предельным соотношениям (17) оценивается величиной функционала:

$$G(M) = \frac{1}{2} \sum_{k=x,y,z} I_k [\dot{\omega}_s^*(t, M) - \dot{\omega}_s(t, M)]^2, \quad (18)$$

характеризующего энергию ускорения вращательного движения, рассчитываемую в окрестности фазовых траекторий эталонных моделей.

Пусть  $M_x^*, M_y^*, M_z^*$  – управляющие моменты, которые характеризуют абсолютный минимум функционала (18), достигаемый при выполнении равенства  $G(M^*) = 0$  в некоторый момент времени  $t > 0$ . В этом случае управляющие моменты спутника равны

$$\begin{aligned} M_x^* &= \frac{m}{12} [(b^2 + c^2)\dot{\omega}_x^* + (b^2 - c^2)\omega_y^*\omega_z^*], \\ M_y^* &= \frac{m}{12} [(a^2 + c^2)\dot{\omega}_y^* + (a^2 - c^2)\omega_x^*\omega_z^*], \\ M_z^* &= \frac{m}{12} [(a^2 + b^2)\dot{\omega}_z^* + (b^2 - a^2)\omega_x^*\omega_y^*]. \end{aligned} \quad (19)$$

Величины  $\dot{\omega}_x^*, \dot{\omega}_y^*, \dot{\omega}_z^*$  представляют собой значения ускорений, при которых выполняются равенства:  $\omega_x(t) = \omega_x^*(t)$ ,  $\omega_y(t) = \omega_y^*(t)$ ,  $\omega_z(t) = \omega_z^*(t)$ .

Выполняя аналогичные (8) и (9) преобразования, получим следующие выражения для механических моментов спутника:

$$\begin{aligned} M_x^* &= r_{xx}(\omega_x^* - \omega_x) + r_{xy}(\omega_y^* - \omega_y) + r_{xz}(\omega_z^* - \omega_z), \\ M_y^* &= r_{yx}(\omega_x^* - \omega_x) + r_{yy}(\omega_y^* - \omega_y) + r_{yz}(\omega_z^* - \omega_z), \\ M_z^* &= r_{zx}(\omega_x^* - \omega_x) + r_{zy}(\omega_y^* - \omega_y) + r_{zz}(\omega_z^* - \omega_z), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $r_{ij}, i, j = (x, y, z)$  – положительные числа.

Запишем динамические уравнения в векторной форме:

$$\dot{\omega} = F \cdot \omega + u. \quad (21)$$

Здесь матрица  $F$  имеет вид:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{c^2 - b^2}{c^2 + b^2} \omega_z & 0 \\ \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \omega_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \omega_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Функцию управления угловыми скоростями в уравнении (21) запишем следующим образом:

$$u = K \cdot (\omega^* - \omega), \quad (22)$$

где элементы матрицы  $[\omega_x^* \ \omega_y^* \ \omega_z^*]^T$  определяются в форме аналитических решений эталонной модели (16), матрица  $K$  имеет вид:

$$K = \begin{vmatrix} r_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & r_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & r_{zz} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, процесс управляемого демпфирования угловых скоростей спутника, учитывающий эталонную модель (16), описывается системой динамических уравнений (21) и системой кинематических уравнений (3) – (6).

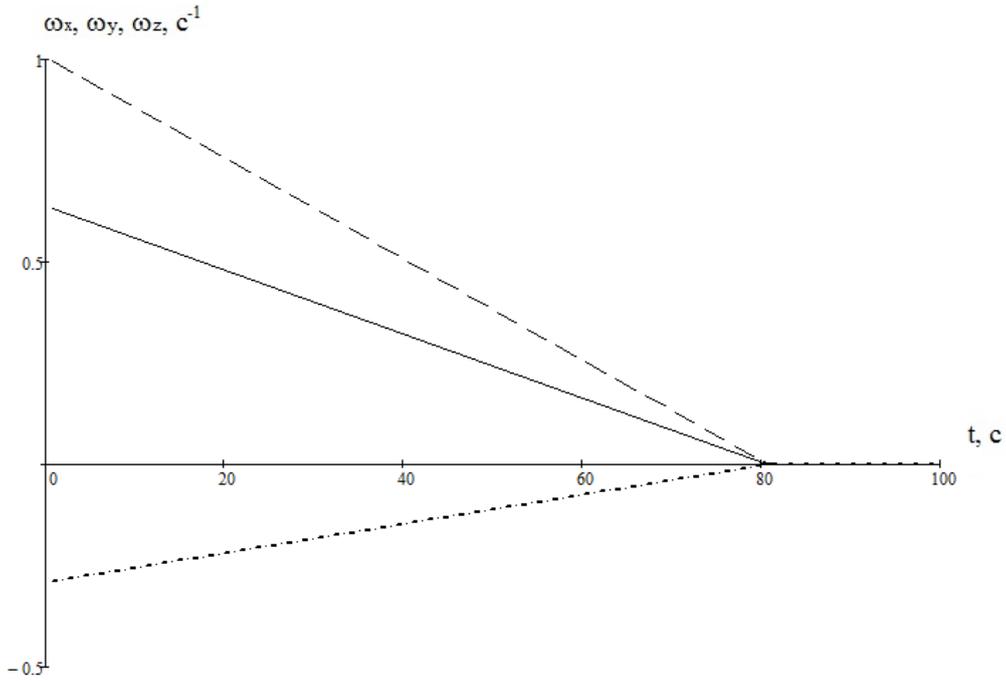


Рис. 2. Изменение угловой скорости спутника при использовании эталонной модели (16) и закона (13)

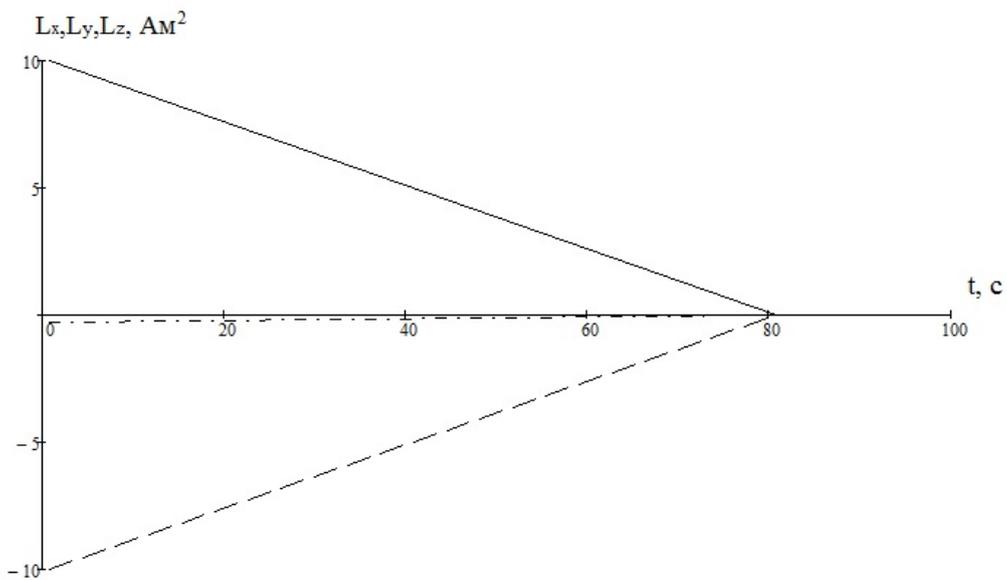


Рис. 3. Изменение магнитных моментов спутника при использовании эталонной модели (16) и закона (13)

На рис. 2, 3 показано уменьшение составляющих угловой скорости  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  и изменение трёх магнитных моментов катушек  $L_x(t)$ ,  $L_y(t)$ ,  $L_z(t)$  соответственно. Как и ранее, при численном моделировании рассматривался микроспутник с массой 75 кг. При определении угловых скоростей  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  предполагалось, что справедливы соотношения:  $\omega_x(t) = \omega_x^*(t)$ ,  $\omega_y(t) = \omega_y^*(t)$ ,  $\omega_z(t) = \omega_z^*(t)$ . Поэтому угловые скорости микроспутника  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  определялись из аналитических решений системы (16).

Результаты численного моделирования показывают, что управление угловой скоростью спутника в соответствии с эталонной моделью (16) обеспечивает получение аналогичных результатов по быстродействию по сравнению с уменьшением угловой скорости, наблюдающимся при управляемом уменьшении кинетического момента. Кроме того, при использовании эталонной модели качество переходного процесса при достижении и поддержании малых значений угловой скорости существенно выше, чем в случае оптимального демпфирования, производимого без учёта эталонной модели.

Другим важным аспектом является характер изменения магнитных моментов катушек. При управляемом демпфировании угловых скоростей с учётом эталонной модели наблюдается более интенсивное уменьшение величин магнитных моментов. В результате одновременно с увеличением быстродействия процесса управления при использовании эталонной

модели имеет место более экономное расходование электроэнергии на борту.

### Заключение

Результаты моделирования показывают, что закон управления магнитными моментами катушек, основанный на использовании выражений (10), позволяет производить оптимальное по быстродействию уменьшение как кинетического момента, так и угловой скорости наноспутников и микроспутников.

Применение закона управления (13) обеспечивает оптимальный по быстродействию процесс уменьшения угловой скорости наноспутника, близкого по форме к кубической [10]. Оптимальное демпфирование в соответствии с эталонной моделью (16) способствуют достижению лучших результатов по качеству переходного процесса управления и поддержанию малых величин угловой скорости. Энергетические затраты на процесс управления в этом случае меньше, чем при оптимальном управлении без учёта эталонной модели.

Таким образом, традиционные законы управления магнитными моментами катушек являются удобными для практической реализации, но они не обеспечивают высокого быстродействия процесса управления. Использование оптимальных законов демпфирования угловой скорости наноспутников и микроспутников позволяет существенно увеличить быстродействие системы управления. Следует также отметить, что применение новых оптимальных законов управления (12), (13), (14) требует выполнения дополнительных математических тождеств, что затрудняет их практическую реализацию.

### Библиографический список

1. Любимов В.В. Внешняя устойчивость резонансов при движении асимметричного твёрдого тела с сильным магнитом в геомагнитном поле // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2010. № 1. С. 13-27.

2. Любимов В.В. Об особенностях в возмущённом вращательном движении спутника с сильным магнитом на борту // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 29-31.
3. Slavinskis A., Kvell U., Kulu E., Sünter I., Kuuste H., Lätt S., Voormansik K., Noorma M. High spin rate magnetic controller for nanosatellites // Acta Astronautica. 2014. V. 95, Iss. 1. P. 218-226. DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.11.014
4. Коваленко А.П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
5. Калаев М.П., Любимов В.В., Сёмкин Н.Д. Полунатурное и имитационное моделирование процесса отделения микроспутника // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 52-60.
6. Сёмкин Н.Д., Любимов В.В., Малышев В.И. Моделирование законов функционирования магнитных исполнительных органов при ориентации микроспутника по местной вертикали // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2012. Т. 15, № 1. С. 103-108.
7. Лебедев А.С., Любимов В.В., Сёмкин Н.Д. Моделирование управляемого движения микроспутника с магнитными и гравитационными исполнительными органами // Полёт. Общероссийский научно-технический журнал. 2012. № 7. С. 39-44.
8. Любимов В.В., Подклетнова С.В. Расчёт управляющих магнитных моментов в задаче демпфирования угловых скоростей // Известия Самарского научного центра РАН. 2013. Т. 15, № 6 (4). С. 861-867.
9. Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О. Исследования алгоритма активного магнитного демпфирования // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 2. С. 176-182.
10. Lyubimov V.V., Podkletnova S.V., Osipov A.A. Simulating the process of microsatellite angular velocity decrease using various laws of electromagnetic coil control // 22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015 – Proceedings. 2015. P. 484-487.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский Н.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
12. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории автоматического управления. Цикл лекций: уч. пособие для втузов. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.

### Информация об авторах

**Любимов Владислав Васильевич**, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва. E-mail: [vlubimov@mail.ru](mailto:vlubimov@mail.ru). Область научных интересов: динамика космического полёта, математическое моделирование движения космических аппаратов.

**Подклетнова Светлана Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва. E-mail: [matema@narod.ru](mailto:matema@narod.ru). Область научных интересов: математическое моделирование движения космических аппаратов.

**OPTIMAL CONTROL LAWS OF ONBOARD COILS FOR THE REDUCTION OF ANGULAR MOMENTUM AND DAMPING OF ANGULAR VELOCITY OF NANOSATELLITES AND MICROSATELLITES WITH MAGNETIC COILS ON BOARD**

© 2016 V. V. Lyubimov, S. V. Podkletnova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

Obtaining a new optimal law of controlling onboard magnetic coils that would provide reduction of the angular momentum of nanosatellites and microsatellites to a predetermined small value and subsequently maintaining it is discussed in the paper. The study shows that the use of a new time-optimal control law contributes to a significant increase in the high speed performance of the magnetic attitude control system in the tasks of reducing angular momentum of satellites to small values. The problem of satellite angular rate damping in accordance with a reference model – a system of three independent linear homogeneous equations – is discussed as well. Some numerical results of the application of these laws to the problem of reduction of satellite angular momentum and angular velocity are presented. Advantages and drawbacks of the new time-optimal laws of control of angular momentum of nanosatellites and microsatellites are specified.

*Coils, magnetic moment, control law, nanosatellite, microsatellite, angular momentum, damping, equations of motion.*

**References**

1. Lyubimov V.V. External stability of resonances in the motion of an asymmetric rigid body with a strong magnet in the geomagnetic field. *Mechanics of Solids*. 2010. V. 45, Iss. 1. P. 10-21. DOI: 10.3103/S0025654410010036
2. Lyubimov V.V. Some features of disturbed rotational motion of a satellite with a strong onboard magnet. *Russian Aeronautics*. 2009. V. 52, Iss. 2. P. 172-175. DOI: 10.3103/S106879980902007X
3. Slavinskis A., Kvell U., Kulu E., Sünter I., Kuuste H., Lätt S., Voormansik K. and Noorma M. High spin rate magnetic controller for nanosatellites. *Acta Astronautica*. 2014. V. 95, Iss. 1. P. 218-226. DOI: 10.1016/j.actaastro.2013.11.014
4. Kovalenko A.P. *Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nymi apparatami* [Magnetic spacecraft attitude control systems]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1975. 248 p.
5. Kalaev M.P., Lyubimov V.V., Siomkin N.D. Seminaturnal modeling and numerical simulation for the process of the small satellite separation. *Giroskopiya i navigatsiya*. 2014. № 2 (85). P. 52-60. (In Russ.)
6. Semkin N. D., Lyubimov V.V., Malyshev V.I. Modeling the operation laws of magnetic control devices with orientation a microsatellite along the local vertical. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2012. V. 15, no. 1. P.103-108. (In Russ.)
7. Lebedev A.S., Lyubimov V.V., Semkin N.D. Maintenance of Orientation of Microsatellite With The Magnetic And Gravitational Executive Devices. *All-Russian Scientific-Technical Journal «Polyot»*. 2012. No. 7. P. 39-44. (In Russ.)
8. Lyubimov V.V., Podkletnova S.V. The calculation of control of the magnetic moments in the problem of damping of angular velocities of the cubic microsatellite. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN*. 2013. V. 15, no. 6 (4). P. 861-867. (In Russ.)

---

*Citation:* Lyubimov V.V., Podkletnova S.V. Optimal control laws of onboard coils for the reduction of angular momentum and damping of angular velocity of nanosatellites and microsatellites with magnetic coils on board. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 2. P. 57-67. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-2-57-67

9. Ovchinnikov M.Yu., Pen'kov V.I., Roldugin D.S., Karpenko S.O. Investigation of the effectiveness of an algorithm of active magnetic damping. *Cosmic Research*. 2012. V. 50, Iss. 2. P. 170-176. DOI: 10.1134/S0010952512010078

10. Lyubimov V.V., Podkletnova S.V., Osipov A.A. Simulating the process of microsatellite angular velocity decrease using various laws of electromagnetic coil control. *22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2015 – Proceedings*. 2015. P. 484-487.

11. Branets V.N., Shmyglevskiy N.P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Application of quaternions in problems of solid body orientation]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 320 p.

12. Krut'ko P.D. *Obratnye zadachi dinamiki v teorii avtomaticheskogo upravleniya. Tsikllektsiy: uchebnoe posobie dlya vtuzov* [Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2004. 576 p.

### **About the authors**

**Lyubimov Vladislav Vasilievich**, Doctor of Science (Engineering), Assistant Professor, Head of the Department of Advanced Mathematics, Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: [vlubimov@mail.ru](mailto:vlubimov@mail.ru). Area of Research: space flight dynamics, mathematical modeling of spacecraft.

**Podkletnova Svetlana Vladimirovna**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Assistant Professor of the Department of Advanced Mathematics, Samara National Research University, Samara, Russian Federation. E-mail: [matema@narod.ru](mailto:matema@narod.ru). Area of Research: mathematical modeling of spacecraft.