

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЯ ТОПЛИВА В ИЗМЕРИТЕЛЬНОМ КАНАЛЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАСХОДОВАНИЕМ ТОПЛИВА

© 2016 Ю. А. Крюков

Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара

Рассматривается задача о колебаниях топлива в измерительном цилиндрическом канале системы управления расходом жидкого топлива в баке. Система представляет собой бак, внутри которого располагается вертикальная цилиндрическая труба – измерительный канал. При израсходовании топлива по его уровню в измерительном канале, фиксируемом датчиками внутри канала, определяют уровень топлива в баке. Построена математическая модель движения топлива в канале на основе параболического уравнения типа теплопроводности. Приведено численное решение модели на схеме с весами Кранка-Никольсона. Для подтверждения результатов, полученных по модели, предложенная задача решена альтернативным методом с помощью полных уравнений Навье-Стокса и модели Volume of Fluid в пакете Ansys Fluent. Описано построение геометрической и структурированной (блочной) сеточной моделей в пакете ICEM CFD. Решение задачи проведено на различных по объёму сетках. Сопоставление результатов показывает удовлетворительное совпадение и свидетельствует о квазипериодических колебаниях топлива в канале. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что равномерно расположенные по длине канала датчики уровня будут давать искажённую информацию. Предложенная модель может быть использована для оценки колебаний жидкого топлива в измерительных каналах системы управления расходом топлива и для разработки более сложных моделей.

*Система управления расходом топлива, измерительный канал, датчики уровня, топливный бак, уровень свободной поверхности, схема Кранка-Никольсона, модель Volume of Fluid, инерционность жидкости.*

### Введение

Одним из важных элементов ракеты-носителя является система управления расходом жидкого топлива в баках. От достоверного определения уровня горючего и окислителя в баках зависит их синхронное опорожнение и гарантированный остаток. Для контроля уровня жидкости в баке применяется следующий метод: в бак устанавливают вертикальный цилиндрический канал, внутри которого помещают датчики уровня (рис.1, а). Верхний срез цилиндрического канала находится выше уровня топлива в баке, поэтому перетекание жидкости в этом месте исключено. Через нижний срез жидкость свободно сообщается между баком

и каналом. Над свободной поверхностью жидкости в баке и канале поддерживается постоянное давление  $p_0$  (давление наддува). В начальный момент времени уровень топлива в баке и канале совпадает. При опорожнении топлива из бака по уровню свободной поверхности жидкости в цилиндрическом канале, фиксируемом датчиками, определяют уровень в баке. Известно, что средний уровень свободной поверхности в канале  $\xi(t)$  и баке  $H(t)$  отличаются. Целью работы является построение математической модели для определения уровня свободной поверхности топлива в измерительном канале.

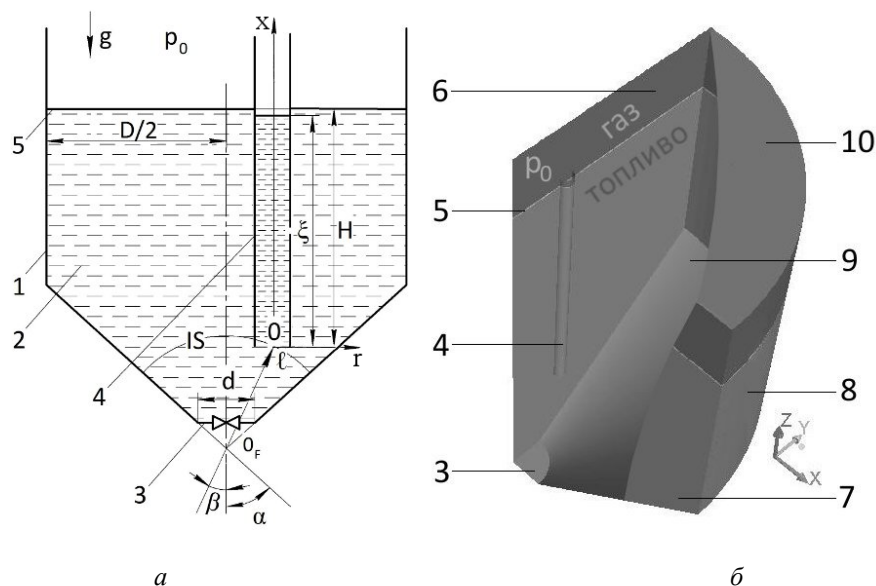


Рис. 1. а – схема топливного бака; б – аксонометрическая проекция геометрической модели: 1 – бак; 2 – топливо; 3 – слив; 4 – канал с датчиками; 5 – граница раздела между топливом и газом наддува; 6, 7 – плоскость симметрии цилиндрического канала и бака соответственно; 8, 9 – цилиндрическая и коническая обечайки бака соответственно; 10 – верхнее основание бака;  $p_0$  – давление наддува;  $g$  – ускорение свободного падения;  $D$  – диаметр бака;  $\xi$  – уровень топлива в цилиндрическом канале;  $H$  – уровень топлива в баке;  $O$  – центр нижнего основания цилиндрического канала;  $O_F$  – теоретический центр стока;  $d$  – диаметр сливного отверстия;  $l$  – радиус-вектор точки  $O$  относительно центра  $O_F$ ;  $\alpha$  – угол между осью симметрии и конической обечайкой бака;  $\beta$  – угол между осью симметрии бака и радиус-вектором  $l$ ;  $IS$  – изоповерхность площадью  $S_\ell$  для скорости  $V_\ell$

Принудительное истечение топлива из бака происходит через сливное отверстие площадью  $S_F = \pi \frac{d^2}{4}$ , в котором задаётся расход  $Q_F$  при постоянной скорости истечения  $V_F$ . По величине  $Q_F$  определяют скорость понижения жидкости в баке  $V$ .

Введём систему координат  $Oxr$ , которую свяжем с цилиндрическим каналом, начало поместим на уровень нижнего среза. В качестве модели для течения используем уравнение нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической трубе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

где  $u$  – продольная скорость в канале;  $t$  – время;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление.

На основе уравнения (1) можно найти решение некоторых задач. В [1] исследуется развитие ламинарного движения на начальном участке и из состояния покоя, в [2] – пульсирующее движение, в [3] – периодическое движение.

### Математическая модель

Упростим уравнение (1), для чего определим градиент давления в цилиндрическом канале. Давление жидкости в баке на уровне  $x = 0$  около цилиндрического канала определяется выражением

$$p = p_0 + \rho g H + \frac{\rho V_T |V_T|}{2}, \quad (2)$$

где  $V_T$  – скорость жидкости в баке у нижнего среза цилиндрического канала (направление  $V_T$  совпадает с осью  $Ox$ ).

В правой части выражения (2) первые два слагаемых определяют гидростатическое давление, а третье – динамическое. Над свободной поверхностью жидкости в канале при  $x = \xi$  полное давление соответствует давлению наддува  $p_0$ . Тогда, принимая распределение давления по длине цилиндрического канала линейным, найдём градиент

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\rho g \left( H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi}. \quad (3)$$

С учётом (3) уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g \left[ 1 - \frac{\left( H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right]. \quad (4)$$

Предполагая течение в канале осесимметричным, запишем граничные условия задачи:

$$r = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0; \quad r = R, \quad u = 0. \quad (5)$$

Зададим начальную скорость  $u_s$  и уровень  $H_0$  в канале:

$$t = 0, \quad u = u_s, \quad \xi = H_0. \quad (6)$$

Случай, когда течение в канале рассматривается из состояния равновесия при внезапном открытии сливного клапана, соответствует переходному процессу, вызванному резким изменением давления или «гидравлическим ударом» [4]. Для исследования этого процесса необходимо учитывать упругость жидкости, что выходит за рамки работы.

Уравнение (4) содержит две неизвестные функции:  $u$  и  $\xi$ . Для замыкания системы добавим соотношение для опре-

деления среднего уровня свободной поверхности в канале:

$$\xi = H_0 - \int_0^t \bar{u} dt, \quad \bar{u} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \cdot u dr, \quad (7)$$

где  $\bar{u}$  – средняя скорость в канале,  $R$  – радиус цилиндрического канала.

Таким образом, получаем систему интегродифференциальных уравнений (4), (7) с краевыми (5) и начальными (6) условиями для определения  $u$  и  $\xi$ .

Доказательство теоремы существования и единственности задачи о движении топлива в измерительном канале приведено в [5; 6]. В [1-3; 5; 6] для решения уравнения параболического типа (1) применяются методы операционного исчисления. В настоящей работе приведено его численное решение.

### Численное решение

В рассматриваемой области введём равномерную сетку с шагами по радиусу  $h_r$  и времени  $h_t$ . На шеститочечном шаблоне сетки применим двухслойную схему с весами ( $\sigma = \text{const}$ ) [7]. Тогда дискретная версия уравнений (4) – (7) примет вид:

$$a_j u_{j-1}^{i+1} - c_j u_j^{i+1} + b_j u_{j+1}^{i+1} = -f_j^{i+1} + \tilde{f}_j^{i+1/2}, \quad (8)$$

$$\text{где } a_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left( \frac{1}{h_r} - \frac{1}{2r} \right); \quad c_j = \frac{2\nu \sigma}{h_r^2} + \frac{1}{h_t};$$

$$b_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left( \frac{1}{h_r} + \frac{1}{2r} \right);$$

$$f_j = \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left( \frac{1}{h_r} - \frac{1}{2r} \right) u_{j-1}^i + \left( \frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right) u_j^i + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left( \frac{1}{h_r} + \frac{1}{2r} \right) u_{j+1}^i;$$

$$\tilde{f}_j^{i+1/2} = g \left( \frac{H_j^{i+1/2} + \frac{V_T |V_T|}{2g}}{\xi_j^{i+1/2}} - 1 \right),$$

$$H_j^{i+1/2} = H_0 - V \cdot h_r \cdot \left( i + \frac{1}{2} \right),$$

$$\xi_j^{i+1/2} = \xi_j^i + \frac{h_r}{2} \cdot \bar{u}_j^{i+1/2},$$

$$\bar{u}_j^{i+1/2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \cdot u_j^{i+1/2} dr.$$

Для второго свободного слагаемого в правой части (8) принимается значение между временными узлами [7]. Величину средней скорости  $\bar{u}_j^{i+1/2}$  с точностью  $\varepsilon$  определим последовательными приближениями, интегрируя методом Симпсона. Запишем аппроксимацию граничных условий (5) согласно [8]:

$$u_M^{i+1} = 0, \quad (9)$$

$$u_0^{i+1} = \lambda_1 u_1^{i+1} + \mu_1, \quad (10)$$

$$\text{где } \lambda_1 = \frac{\sigma}{\sigma + \frac{h_r^2}{2\nu h_i}};$$

$$\mu_1 = \frac{(1-\sigma)}{\sigma + \frac{h_r^2}{2\nu h_i}} u_1^i + \frac{\left( \frac{h_r^2}{2\nu h_i} - (1-\sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{2\nu h_i}} u_0^i + \frac{h_r^2}{2\nu \left( \sigma + \frac{h_r^2}{2\nu h_i} \right)} \tilde{f}_M^{i+1/2}.$$

Аппроксимация начальных условий имеет вид

$$u_j^0 = u_s, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad \xi = H_0. \quad (11)$$

По выражениям (8) – (11) видно, что на каждом временном слое  $i+1$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  образуется линейная система с неизвестными

$u_j^{i+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M-1$ ;  $N$  – количество временных шагов;  $M$  – количество узлов по радиусу. Уравнение (8) имеет трёхдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

В реальных условиях время опускания уровня жидкости в баке до допустимого гарантированного составляет довольно большое значение:  $T \gg 1$  с. Поэтому, согласно [7], для расчёта целесообразно использовать схему с  $\sigma = \frac{1}{2}$ , которую принято называть схемой Кранка – Никольсона. Эта схема отличается следующими достоинствами: имеет по обеим переменным второй порядок точности  $O(h_r^2 + h_t^2)$ , обладает безусловной и асимптотической устойчивостью, имеет хорошую сходимость [7; 8].

### Решение в Ansys Fluent.

#### Геометрическая модель

Для подтверждения полученных с помощью модели результатов решим представленную задачу, применив полные уравнения Навье-Стокса к описанию движения жидкости в трёхмерной связанной области внутри бака при истечении из него топлива. Для этого будем использовать пакет Ansys Fluent (AF). Очевидным достоинством получаемых с помощью пакета результатов является их экспериментальное подтверждение, например в [9].

На рис. 1, а обозначены все необходимые размеры, по которым можно построить геометрическую модель. Канал имеет тонкостенную оболочку, толщина которой много меньше радиуса канала. Высота канала и вертикальных поверхностей бака выше начального уровня свободной поверхности.

При решении представленной задачи в AF нет необходимости строить полную геометрическую модель бака. На рис. 1, б в аксонометрической проекции показаны граничные поверхности расчётной области. Наличие плоскостей симметрии у канала (цифра 6) и бака (цифра 7) позволяет оптимизировать расчётную область и

ограничиться рассмотрением только четверти от полной геометрии. Плоскость симметрии канала проходит через оси канала и бака, а плоскость 7 выбрана ортогонально плоскости б. Использование геометрической симметрии позволяет существенно уменьшить размеры расчётной области и, как следствие, объём сеточной модели и время решения задачи. Для видимости всех поверхностей плоскости симметрии бака и верхнего его основания усечены. На рис. 1, б светлым оттенком изображена тяжёлая фаза (топливо), а тёмным – лёгкая (газ наддува).

### Структурированная (блочная) сетка

Для построения сетки используем сеточный генератор ICEM CFD. Поскольку трёхмерная геометрическая область рассматриваемой задачи является относи-

тельно простой, в которой течение следует преимущественно вдоль поверхностей области, а движение предполагается нестационарным, то, согласно [11], решение задачи целесообразно производить на структурированной сетке с гексаэдрическими ячейками. Это позволяет сэкономить расчётное время, поскольку при использовании структурированных сеток оно меньше, чем при использовании неструктурированных (при равенстве количества ячеек сеток).

На рис. 2 показаны виды сверху и на плоскость 7 блочной структуры и ячеек сетки, сгенерированных на ней (видны только ближайшие блоки). Вся структура состоит из отдельных блоков, сгруппированных на рис. 2 по очередности разбиения исходного блока (на рисунке он не показан).

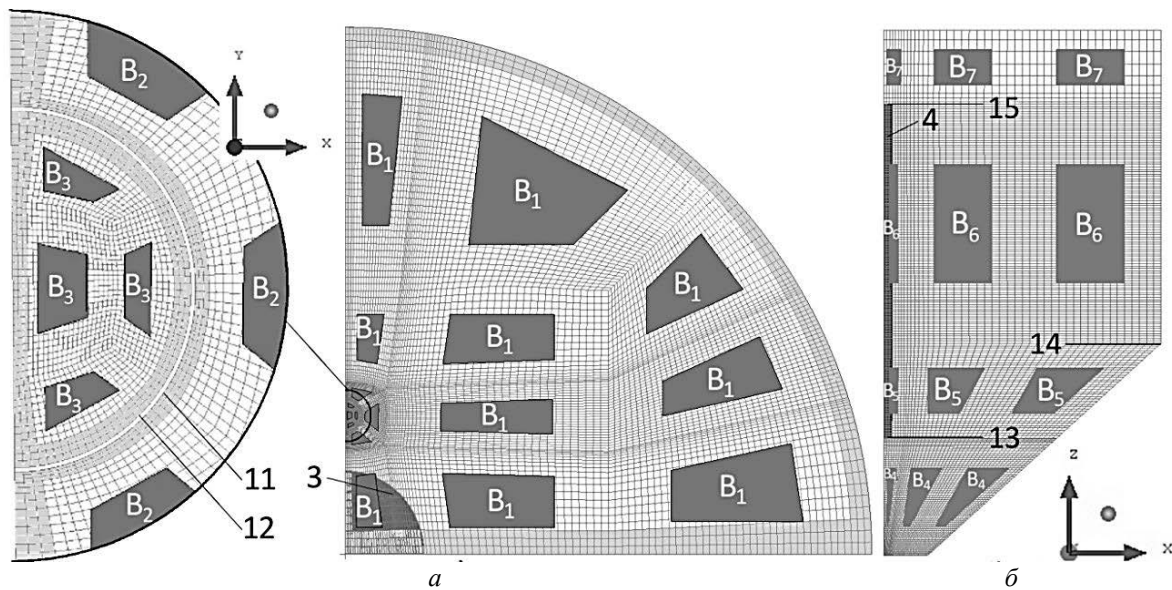


Рис. 2. Блочная структура и сетка: а – вид сверху, б – вид на плоскость 7.

11, 12 – внешняя и внутренняя поверхности канала соответственно;

13, 15 – нижнее и верхнее основания канала соответственно;

14 – линия стыка конической и цилиндрической обечаек бака;

$B_1 - B_7$  – блоки

На рис. 2, а изображено разбиение, выполненное в плоскости XY с помощью техники «Ogrid Block», на рис. 2, б – последующее разбиение, выполненное нормально к оси Z с помощью техники «Split Block». Первыми получаются блоки (обо-

значены  $B_1$ ), грани которых отображаются на плоскости б и 7 и на поверхности 8 и 9 (рис.1). Блоки  $B_2$  созданы внутри одного из блоков  $B_1$ , а блоки  $B_3$  – внутри одного из блоков  $B_2$ . Грани блоков  $B_2$ ,  $B_3$

отображаются на плоскость  $b$ , а также на внешнюю поверхность канала (цифра 11) и на внутреннюю его поверхность (цифра 12) соответственно. Блоки  $B_4$ - $B_7$  получают разбиением блоков  $B_1$ - $B_3$  параллельными плоскостями  $XU$  сечениями. Блоки  $B_4$ ,  $B_5$  разграничивает сечение, проходящее через нижнее основание цилиндрического канала (цифра 13), блоки  $B_5$ ,  $B_6$  – сечение через линию стыка конической и цилиндрической обечаек (цифра 14), а блоки  $B_6$ ,  $B_7$  – сечение через верхнее основание цилиндрического канала (цифра 15). Полученное разбиение позволяет отобразить вершины, грани и плоскости блоков на геометрические элементы поверхностей расчётной области, учитывая её особенности.

Из рис. 2, *a* видно, что углы между гранями ячеек (ячейки выделены в три ряда), примыкающих к поверхностям области, близки к прямым. Таким образом, использование техники «Ogrid Block» позволяет избежать излишней скошенности [11] ячеек сетки, которая, как отмечено в [12], иногда приводит к чрезмерной ошибке аппроксимации.

Верхняя часть блочной структуры отображается на поверхность 10, а нижняя – на меньшую по площади поверхность 3, что автоматически обеспечивает сгущение сетки к поверхности 3 в отрицательном направлении оси  $Z$  (за счёт одинакового числа ячеек в любом параллельном плоскости  $XU$  сечении). Варьируя число ячеек в блоках  $B_2$  и  $B_3$ , можно добиться необходимого сгущения сетки и в окрестности канала (без потерь на скошенность). Таким образом, может быть получено сгущение сетки в тех местах области (около канала, вниз по течению), где ожидаются большие градиенты скорости течения и, как следствие, могут возникнуть, большие ошибки. За счёт выбора числа ячеек в блоках  $B_4$  -  $B_7$  можно варьировать общее число ячеек во всей расчётной области.

## Метод решения

Для решения задачи в пакете AF использована модель «Volume of Fluid» (VOF) [11; 13]. Эта модель специально разработана для двух или более несмешивающихся жидкостей или газов, поверхность раздела между которыми представляет интерес. Модель основана на решении полного уравнения движения Навье-Стокса и уравнения неразрывности во всей области методом контрольных объёмов. Уравнение движения является общим для всех рассматриваемых фаз и зависит от их объёмных долей через теплофизические свойства (плотность  $\rho$  и коэффициент динамической вязкости  $\mu$ ), а уравнение неразрывности записывается отдельно для каждой фазы. Результирующее поле скоростей получается общим для фаз, а межфазную границу можно определить, например, по равенству объёмных долей фаз в ячейке [11; 13].

Поставим граничные условия. На поверхностях 4 (включая 11 – 13, 15), 8 и 9 задаются условия прилипания и непротекания (типа «wall»); на 6 и 7 – условия симметрии (типа «symmetry»); на 10 – величина постоянного статического давления  $p_0$  (типа «pressure outlet»); на 3 – постоянная по направлению  $z$  и величине скорость истечения  $V_F$ . На поверхности 3 граничное условие имеет тип «velocity-inlet». С помощью процедуры «Solution Initialization» и «Region Adaption» задаём начальный уровень свободной поверхности топлива (равный в канале и баке) и невозмущённое поле скоростей. В меню «Operating Conditions» определяем внешние условия (атмосферное давление, ускорение свободного падения).

Кроме того, в AF необходимо задать параметры численного решения задачи (схему, метод и порядок дискретизации уравнений, параметров релаксации); параметры, контролирующие численный расчёт (точность решения уравнений, выбор временного шага и их количество); параметры вывода результатов и статистики расчёта и прочие. Эти параметры

можно установить такими, как в примерах [14; 15]. В процессе решения они могут варьироваться, изменяя его скорость, точность и т.д.

### Результаты

Для контроля сходимости решение выполнено на трёх разных по количеству ячеек сетках:  $0.5 \cdot 10^5$ ;  $4.5 \cdot 10^6$ ;  $10.8 \cdot 10^6$  штук. Время решения задачи зависит от объёма сетки и варьируется от 2 до 8 секунд при использовании 64 процессоров на кластере для 15 секунд процесса.

Рассмотрим поле скоростей в баке. Поскольку истечение из бака происходит через сливную поверхность 3 с постоянной скоростью, то поле скоростей под свободным уровнем межфазной поверхности в баке можно считать установившимся. Тогда для его определения применим свойство течения при пространственном стоке – точке [16]. Оно заключается в том, что скорость жидкости в баке в любом месте, находящемся на расстоянии  $\ell$  от теоретического центра стока – точки  $O_F$  (рис.1, а), одинакова по величине и направлена к центру стока. При этом краевыми эффектами на поверхности бака и канала пренебрегаем. Тогда изоповерхности для скорости будут представлять собой боковые поверхности шаровых сегментов. Проведём через точку  $O$  в центре нижнего основания канала (рис.1, а) изоповерхность  $IS$  и составим уравнение расхода через поверхность 3 и  $IS$ :  $S_\ell \cdot V_\ell = S_F \cdot V_F$ , откуда найдём неизвестную скорость

$$V_\ell = \frac{V_F d^2}{8 \ell^2 (1 - \cos \alpha)}, \quad V_T = V_\ell \cdot \cos \beta. \quad (12)$$

Выпишем входные данные задачи:  $R = 0.039 \text{ м}$ ,  $H_0 = 1.55 \text{ м}$ ,  $V = -0.04 \text{ м/с}$ ,  $d = 0.42 \text{ м}$ ,  $\ell = 0.757 \text{ м}$ ,  $\alpha = 48^\circ$ ,  $\beta = 25^\circ$ ,  $g = -9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $D = 2.66 \text{ м}$ . В качестве топлива используем керосин, а газанадува – воздух со стандартными свойствами из базы данных АФ. Вычисления по формуле (12) дают:  $V_T = -0.14 \text{ м/с}$ . В

АФ получены несколько отличающиеся данные:  $V_T \approx -0.16 \text{ м/с}$ ,  $u_s \approx -0.065 \text{ м/с}$ , которые будем использовать для модели в целях адекватности математического эксперимента.

На рис. 3 представлены изолинии для скорости в баке на поверхности 7 и на поверхности 6, полученные в АФ (изображены тонкой линией) и рассчитанные по формуле (12) (жирная линия). На изолиниях цифрами обозначена соответствующая скорость. Из рис. 3 видно, что кривые АФ напоминают теоретические дуги (12), и они близки друг к другу. Как и следовало ожидать, небольшое расхождение заметно у изолиний для скоростей  $V = 1.00; 0.05 \text{ м/с}$ , поскольку эти кривые ближе других находятся к границам, где нарушается условие пространственного стока (плоская изолиния для скорости  $V = 1.60 \text{ м/с}$  и изменение геометрии бака при переходе конической обечайки в цилиндрическую обечайку). Таким образом, по формуле (12) можно приближённо определить поле скоростей топлива в баке при равномерном стоке.

Рассмотрим течение в канале. Как и следовало ожидать, радиальный профиль скорости в канале  $u(r)$  симметричен относительно вертикальной оси и не зависит от продольной координаты  $z$ . На рис. 4, а показан профиль скорости в канале (АФ), имеющий локальный экстремум по величине, в разные моменты времени (значения времени обозначены цифрами около соответствующих профилей).

По рис. 4, а хорошо просматривается деформация профиля. Можно заметить, что наибольшее изменение профиль испытывает в непосредственной близости от стенки. Так, на графике скорость может принимать положительные значения (при  $t = 3.8; 8.5; 14.9 \text{ с}$ ) или отрицательные (при других  $t$ ). Следовательно, в канале возникают обратные токи, и сила касательного напряжения  $F_\tau$  (АФ) на внутренней поверхности канала меняет свой знак в зависимости от времени (рис.4, б).

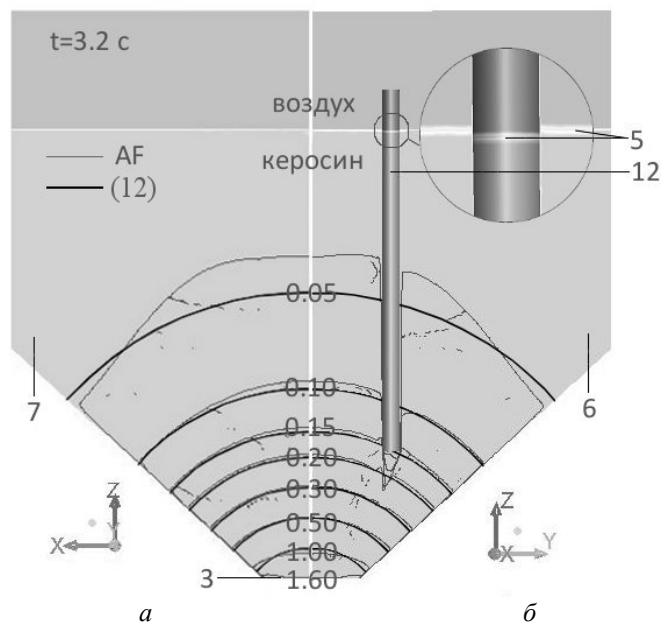


Рис. 3. Изолинии для скорости в баке: а – на поверхности 7; б – на поверхности 6

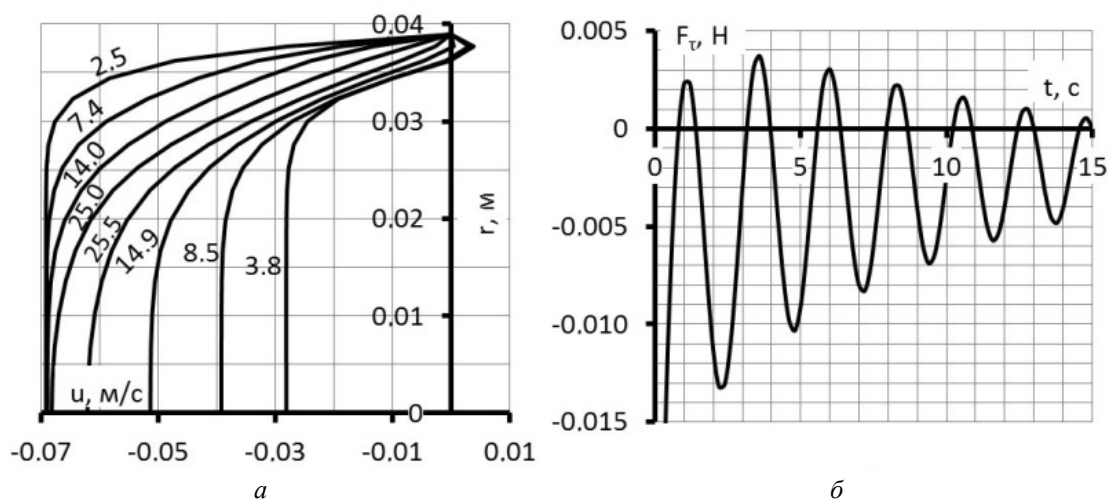


Рис. 4. а – радиальный профиль скорости в канале в разные моменты времени; б – сила касательного напряжения на внутренней поверхности канала

Из рис. 4, а следует, что со временем разница между профилями уменьшается, течение в канале стабилизируется и поэтому отличие между уровнем свободной поверхности в баке и канале  $\Delta = H - \xi$  (рис. 5) становится меньше. На рис. 5 маркерами обозначено решение, полученное на разных по количеству ячеек сетках (число ячеек указано на графике), сплошной кривой – решение по модели.

По графику на рис. 5 можно заметить, что в канале реализуется квазипериодический процесс с уменьшающейся амплитудой  $A$  и увеличивающейся частотой  $\bar{T}$  колебаний свободной поверхности: при  $t \approx 0,65 \text{ с}$   $A \approx 0,01 \text{ м}$ ,  $\bar{T} \approx 0,4 \text{ 1/с}$ ; при  $t \approx 14,38 \text{ с}$ ,  $A \approx 0,0047 \text{ м}$ ,  $\bar{T} \approx 0,48 \text{ 1/с}$ . Сравнение результатов, полученных в АФ и по модели, показывает их хорошее совпадение, что косвенно подтверждает адекватность результатов.



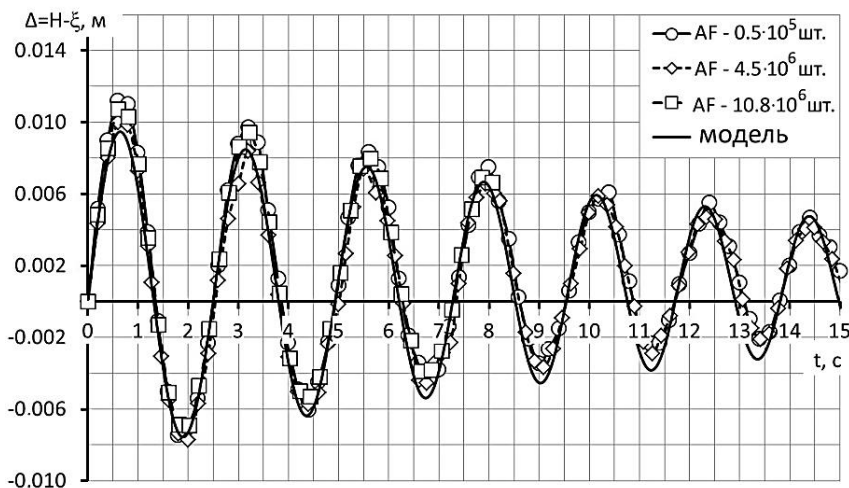


Рис. 5. Разница уровней свободной поверхности в баке и канале

### Заключение

По приведённым графикам можно заключить, что причиной несовпадения уровней свободных поверхностей является инерционность столба жидкости в канале. При изменении условий на границе реакция в канале запаздывает, что вызывает колебания. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что равномерно расположенные по длине канала датчики

уровня будут давать искажённую информацию и ошибка будет несистематической. Для того, чтобы сигнал с датчика соответствовал реальному уровню жидкости, датчики должны быть расположены в точках, соответствующих узлам пересечения функций  $H(t)$  и  $\xi(t)$ . Такая настройка возможна, поскольку численный эксперимент позволяет определить функцию  $\Delta(t)$ .

### Библиографический список

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
3. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. М.: Машиностроение, 1982. 240 с.
4. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. М.: Энергоиздат, 1981. 248 с.
5. Ключев Н.И., Филатов О.П. Модели измерения уровня жидкости в баке ракеты-носителя // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2015. № 3(125). С. 88-96.
6. Филатов О.П. Интегро-дифференциальная задача параболического типа // Материалы 68-й научной конференции «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения – 2015». Спб.: Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, 2015. С. 73-74.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
9. Платонов Д.В., Минаков А.В., Дектерев А.А., Харламов Е.Б. Сравнительный анализ CFD-пакетов Sigmaflow и AnsysFluent на примере решения ламинарных тестов

вых задач // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 1(21). С. 84-94.

10. ANSYS ICEM CFD 11.0. Tutorial Manual, 2007.

[http://orange.engr.ucdavis.edu/ICEM11\\_Tutorial/itut110.pdf](http://orange.engr.ucdavis.edu/ICEM11_Tutorial/itut110.pdf)

11. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide, 2009.

<http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.0/120/FLUENT/flth.pdf>

12. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 2. М.: Мир, 1990. 728 с.

13. Храбрый А.И. Численное моделирование нестационарных турбулентных течений жидкости со свободной поверхностью. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 2014. 154 с.

14. Tutorial: Fuel Tank Sloshing.

<http://wenku.baidu.com/view/7357404269eae009581bec64.html>

15. Tutorial Solving a 2D Box Falling into Water.

[http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/2053/fluent-mdm-tut-01\\_2d-falling-box.pdf](http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/2053/fluent-mdm-tut-01_2d-falling-box.pdf)

16. Талиев В.Н. Аэродинамика вентиляции. М.: Стройиздат, 1979. 295 с.

#### Информация об авторе:

**Крюков Юрий Александрович**, инженер-конструктор, АО «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара. E-mail: [yurakryukov1985@mail.ru](mailto:yurakryukov1985@mail.ru). Область научных интересов: аэрогидродинамика, математическое моделирование.

#### MATHEMATICAL MODEL OF FUEL SLOSHING IN THE MEASURING CHANNEL OF THE FUEL EXPENDITURE CONTROL SYSTEM

© 2016 Yu. A. Kryukov

Joint-Stock Company «Space Rocket Center «Progress», Samara, Russian Federation

The problem of fuel sloshing in the measuring cylindrical channel of the system controlling fuel expenditure in the tank is considered in the paper. The system under consideration is a tank inside which there is a measuring channel in the form of a vertical cylindrical tube. The fuel level in the tank is recorded by the level sensors disposed within the measurement channel. It is known that the level of fuel in the tank does not match that in the channel. A mathematical model of fuel flow in the channel is constructed on the basis of parabolic equations of the heat-conduction type. The numerical solution of the model for the Crank-Nicolson scheme is presented. To confirm the results obtained by the model, the problem is solved with the help of full Navier-Stokes equations and the VOF model in the Ansys Fluid package. Construction of geometrical patterns and block grids in the ICEM CFD package is described. The problem is solved on grids differing in volume. The comparison of the results shows good agreement between them and indicates the presence of quasi-periodic oscillations of fuel in the channel. The inertia of the liquid column is the cause of the mismatch between the free surface level in the tank and that in the channel. When conditions change on the boundary, the response is late in the channel, causing vibrations. The results obtained suggest that the level sensors evenly spaced along the length of the channel will provide distorted information. The error is not systematic. The proposed model can be used to estimate the sloshing of liquid fuel in the measuring channels of fuel expenditure control system and for the development of more complex models.

*Fuel expenditure control system, measuring channel, level sensors, fuel tank, level of the free surface, Crank-Nicolson scheme, Volume of Fluid model, inertia of fluid.*

---

*Citation:* Kryukov Yu.A. Mathematical model of fuel sloshing in the measuring channel of the fuel expenditure control system. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 1. P. 207-217. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-207-217

## References

1. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Dynamics of viscous incompressible fluid]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1955. 520 p.
2. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid mechanics]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 904 p.
3. Popov D.N. *Nestatsionarnye gidromekhanicheskie protsessy* [Unsteady hydromechanical processes]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1982. 240 p.
4. Foks D.A. *Gidravlicheskiy analiz neustanovivshegosya techeniya v truboprovodakh* [Hydraulic analysis of unsteady flow in pipelines]. Moscow: Energoizdat Publ., 1981. 248 p.
5. Klyuev N.I., Filatov O.P. Models for measuring the liquid level in the tank of rocket carrier. *Vestnik of Samara State University*. 2015. No. 3(125). P. 88-96. (In Russ.)
6. Filatov O.P. Integro-differential problem of the parabolic type. // *Proceedings of the 68th Conference «Some current problems of modern mathematics and mathematical education»*. Spb.: Herzen University Publ., 2015. P. 73-74. (In Russ.)
7. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 512 p.
8. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka Publ., 1977. 656 p.
9. Platonov D.V., Minakov A.V., Dekterev A.A., Kharlamov E.B. Comparative analysis of CFD SIGMAFLOW and FLUENT packages by the example of solving laminar test problems. *Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics*. 2013. No. 1(21). P. 84-94. (In Russ.)
10. ANSYS ICEM CFD 11.0. Tutorial Manual, 2007. Available at: [http://orange.engr.ucdavis.edu/ICEM11\\_Tutorial/itut110.pdf](http://orange.engr.ucdavis.edu/ICEM11_Tutorial/itut110.pdf).
11. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide, 2009. Available at: <http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.0/120/FLUENT/flth.pdf>
12. Anderson D., Tannehill Dzh., Pletcher R. *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen. T. 2* [Computational fluid mechanics and heat transfer. V. 2]. Moscow: Mir Publ., 1990. 728 p.
13. Khrabryy A.I. *Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh turbulentnykh techeniy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu* [Numerical simulation of unsteady turbulent free-surface fluid flows. Cand. phys-math. sci. diss.]. St. Petersburg, 2014. 154 p.
14. Tutorial: Fuel Tank Sloshing. Available at: <http://wenku.baidu.com/view/7357404269eae009581bec64.html>
15. Tutorial Solving a 2D Box Falling into Water. Available at: [http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/2053/fluent-mdm-tut-01\\_2d-falling-box.pdf](http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/2053/fluent-mdm-tut-01_2d-falling-box.pdf)
16. Taliev V.N. *Aerodinamika ventilyatsii* [Aerodynamics of ventilation]. Moscow: Stroyizdat Publ, 1979. 295 p.

## About the author

**Kryukov Yury Alexandrovich**, design engineer, Joint-Stock Company «Space Rocket Center «Progress», Samara, Russian Federation. E-mail: [yurakryukov1985@mail.ru](mailto:yurakryukov1985@mail.ru). Area of Research: aerohydrodynamics, mathematical simulation.