

ОСЦИЛЛЯТОРЫ ВАН ДЕР ПОЛЯ, РЭЛЕЯ, ДЮФФИНГА В ДИНАМИКЕ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© 2016 В. В. Зайцев¹, Д. Б. Нураев², А. Н. Шилин²

¹Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

²Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара

Для дискретизации времени в нелинейных моделях колебательных систем предложено использовать сочетание метода инвариантности импульсных характеристик динамических систем с методом параметрического синтеза. В основу решения задачи проектирования нелинейной дискретной системы (дискретного отображения) положены разностное уравнение движения и структурная схема линейного диссипативного осциллятора. Таким способом в качестве объектов нелинейной динамики с дискретным временем в рассмотрение введены отображения осцилляторов Ван дер Поля, Рэля, Дюффинга. Проведено сопоставление характеристик автоколебаний дискретного и аналогового осцилляторов Ван дер Поля, установлено их сходство и различие при высоких уровнях возбуждения. По результатам численного эксперимента с дискретным осциллятором Ван дер Поля – Дюффинга установлено существование у него двух режимов автоколебаний, различающихся амплитудами и частотами. Показано, что при вариациях параметров системы переход между режимами может сопровождаться генерацией хаотических автоколебаний. Определены возможные области применения описанных в статье дискретных динамических систем.

Нелинейная динамика, дискретное время, параметрический синтез, автоколебательные системы, регулярные колебания, динамический хаос.

Введение

Современная нелинейная динамика [1] рассматривает эволюцию динамических систем как в непрерывном (НВ), так и дискретном времени (ДВ). Модели и методы нелинейной НВ-динамики широко и успешно применяются в радиофизике, биофизике, экологии, химических технологиях и многих других отраслях науки и техники. В области дискретного времени нелинейная динамика смыкается с цифровой обработкой сигналов [2] и объекты ДВ-динамики могут служить основой алгоритмов обработки. Для выполнения этих функций необходим широкий круг ДВ-систем, обеспечивающий возможность выбора заданной характеристики преобразования сигналов. Поиск таких систем следует рассматривать в качестве одной из задач нелинейной динамики дискретного времени. Заметим, что для обозначения ДВ-систем часто использует-

ся также термин «дискретные отображения». Как правило, объекты НВ-динамики являются результатом формализации физических (химических, биологических и т.д.) моделей реально существующих систем, в то время как ДВ-системы в большинстве случаев возникают в результате дискретизации времени в НВ-системах. При этом конкретная форма процесса дискретизации существенным образом влияет на характеристики синтезированной (спроектированной) ДВ-системы.

В работе [3] для проектирования нелинейного ДВ-осциллятора предложено использовать сочетание методов инвариантности импульсных характеристик (МИИХ) и параметрического синтеза. В настоящей статье такой подход применён для дискретизации времени в базовых осцилляторах НВ-динамики: Ван дер Поля, Рэля, Дюффинга.

Цитирование: Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Шилин А.Н. Осцилляторы Ван дер Поля, Рэля, Дюффинга в динамике с дискретным временем // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15, № 1. С. 187-196.
DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-187-196

Нелинейные и неизохронные ДВ-осцилляторы

На уровне физической модели в непрерывном времени исследуемый определяется как высокодобротный резонатор, возбуждаемый током нелинейного двухполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Кроме того, допускается независимое воздействие на систему внешнего сигнала. Математической моделью такой динамической системы служит дифференциальное уравнение (уравнение движения) вида

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \\ = \frac{\omega_0}{Q} g_a(x) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 g_r(x)x + \omega_0^2 s(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t)$ – безразмерная осциллирующая переменная; ω_0 и Q – собственная частота и добротность резонатора; $s(t)$ – сигнал внешнего воздействия. Активную и реактивную части нелинейной проводимости двухполюсника в уравнении движения (1) представляют функции $g_a(x)$ и $g_r(x)$. Реактивная часть проводимости ответственна за неизохронность колебательной системы – зависимость резонансной частоты или частоты автоколебаний от их амплитуды.

Линейный резонатор в системе (1) описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 s(t). \quad (2)$$

В рамках МИИХ в дискретном времени ему ставится в соответствие диссипативный ДВ-осциллятор

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) \alpha_0 x[n-1] + \\ + \alpha_0^2 x[n-2] = s[n-1], \end{aligned} \quad (3)$$

где n – дискретный временной аргумент ($t_n = n\Delta$, Δ – интервал дискретизации); Ω_0 – собственная частота ω_0 , измеряемая

в единицах частоты дискретизации. Параметр линейной диссипации α_0 ДВ-осциллятора (3) связан с добротностью НВ-резонатора соотношением

$$\alpha_0 = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q}\right). \quad (4)$$

Отметим, что коэффициент при внешнем сигнале в правой части (3) принят равным единице за счёт перенормировки амплитуды сигнала. Линейный осциллятор (3) имеет блок-схему, показанную на рис. 1, 2 непрерывными линиями.

Уравнение движения (1) формально можно привести к виду (2) с помощью выражений

$$\frac{1}{Q_e(x(t))} = \frac{1}{Q} (1 - g_a(x(t)))$$

и

$$\omega_e^2(x(t)) = \omega_0^2 (1 - g_r(x(t))),$$

введя в рассмотрение мгновенные параметры Q_e и ω_e :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_e(x(t))} \frac{dx}{dt} + \omega_e^2(x(t))x = \omega_0^2 s(t). \quad (5)$$

Теперь при дискретизации времени в этой системе, по аналогии с переходом (2) → (3), предлагается совершить переход к разностному уравнению

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_e(x[n-1])) \times \\ \times \alpha(x[n-1]) x[n-1] + \\ + \alpha^2(x[n-2]) x[n-2] = s[n-1], \end{aligned} \quad (6)$$

где диссипативная функция с учётом (4) принимает вид

$$\alpha(x) = \exp\left(-\pi \frac{\Omega_0}{Q} (1 - g_a(x))\right), \quad (7)$$

а мгновенная частота определяется как

$$\Omega_e(x) = \Omega_0 \sqrt{1 - g_r(x)}. \quad (8)$$

Разностное уравнение движения (6) с учётом (7) и (8), а также конкретных выражений для $g_a(x)$ и $g_r(x)$, даёт один из вариантов дискретного отображения нелинейного неизохронного осциллятора с одной степенью свободы. На блок-схеме осциллятора (6), представленной на рис. 1, пунктиром показаны цепи регулировок блоков усиления с коэффициентами $a_1 = 2 \cos(2\pi \Omega_e(x[n-1]))\alpha(x[n-1])$

и

$$a_2 = -\alpha^2(x[n-2]).$$

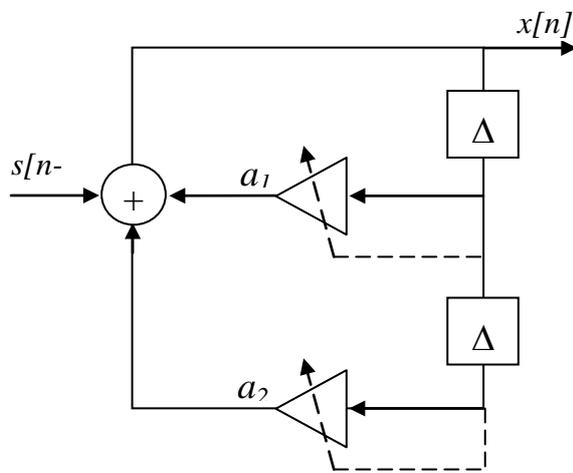


Рис. 1. Структурная схема осциллятора (6)

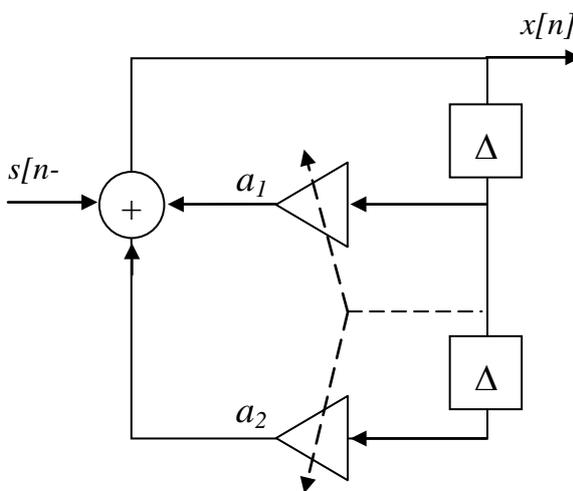


Рис. 2. Структурная схема осциллятора (9)

Если цепи регулировок усиления реализовать так, как показано пунктирными линиями на рис. 2, то приходим к ещё одному варианту ДВ-осциллятора разностным уравнением движения

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_e(x[n-1])) \times \\ \times \alpha(x[n-1])x[n-1] + \\ + \alpha^2(x[n-1])x[n-2] = s[n-1]. \end{aligned} \quad (9)$$

Можно показать, что при высоких частотах дискретизации ($\Omega_0 \rightarrow 0$) разностные уравнения (6) и (9) переходят в дифференциальное уравнение (1) и поэтому ДВ-осцилляторы сохраняют основные черты НВ-прототипа.

Отметим, что осцилляторы вида (9) с $\Omega_e = \text{const}$ используются в моделях колебательно-волновых процессов в пространственно распределённых системах [4; 5].

Осцилляторы Дюффинга, Ван дер Поля и Рэлея

Уравнения (6) и (9) содержат нелинейности в мультипликативной по отношению к порождающему уравнению линейного осциллятора (3) форме, т.е. в форме достаточно сложных нелинейных коэффициентов при осциллирующих переменных. Перейдём к более простым формам уравнений с аддитивными нелинейностями. Для этого сделаем предположение о томсоновости НВ-осциллятора (1).

Осцилляторы томсоновского типа помимо высокой добротности резонаторов имеют также слабые нелинейности. Поэтому в коэффициентах (7) и (8) можно считать

$$|g_a(x)| \sim 1, |g_r(x)| \ll 1$$

и воспользоваться следующими разложениями:

$$\alpha(x) \approx 1 - \pi \frac{\Omega_0}{Q} (1 - g_a(x)),$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \Omega_e(x)) \approx \cos(2\pi \Omega_0) + \\ + \pi \Omega_0 \sin(2\pi \Omega_0) g_r(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Дальнейшие преобразования проведём отдельно для обозначенных выше осцилляторов.

Для осциллятора Дюффинга [6] $g_r(x) = \varepsilon x^2$, $g_a(x) = 0$. С учётом этого и разложений (10) уравнение (6) принимает вид

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + x[n-2] = \\ = -2\pi\nu (\cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] - x[n-2]) + \\ + \mu x^3[n-1] + s[n-1], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\nu = \Omega_0 / Q$ – нормированная полоса контура. Параметр нелинейности $\mu = 2\pi\Omega_0 \sin(2\pi\Omega_0)\varepsilon$, но учитывая, что ДВ-осциллятор Дюффинга (11) рассматривается как самостоятельный объект нелинейной динамики, параметр может считаться независимым. Динамические характеристики осциллятора вида (11) рассмотрены в статье [7].

Для осциллятора Ван дер Поля $g_r(x) = 0$, $g_a(x) = \gamma(1 - x^2)$, где γ – коэффициент превышения ($\gamma > 1$) порога генерации ($\gamma = 1$). Преобразования уравнения (9) приводят к следующему уравнению движения ДВ-осциллятора Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + x[n-2] = \\ = -2\pi\nu (1 - \gamma(1 - x^2[n-1])) \times \\ \times (\cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] - x[n-2]) + s[n-1]. \end{aligned} \quad (12)$$

Несколько более громоздкое уравнение получено в [8] на основе преобразований уравнения (6).

Приведём некоторые характеристики свободных автоколебаний в ДВ-осцилляторе (12), сопоставляя их с характеристиками автоколебаний в НВ-осцилляторе Ван дер Поля. На рис. 3 показаны типичные графики зависимости амплитуды A первой гармоники автоколебаний в аналоговом (кривая *НВ*) и дискретном (кривая *ДВ*) осцилляторах от коэффициента превышения порога генерации γ . Параметры осцилляторов: $\Omega_0 = 0.204$, $Q = 15$. Реализация автоколе-

баний в непрерывном времени получена численным интегрированием уравнения Ван дер Поля методом Рунге–Кутты четвёртого порядка с фиксированным шагом в одну десятую часть интервала дискретизации. Амплитуды выделялись методами частотной фильтрации и аналитического сигнала. Как видно из графиков, амплитудная характеристика ДВ-осциллятора качественно и количественно соответствует характеристике НВ-осциллятора. Более медленный рост амплитуды автоколебаний в дискретной системе, чем в аналоговой, объясняется перекачкой энергии автоколебаний в высшие гармоники. Причина повышенного уровня гармоник в ДВ-системе, синтезированной с применением МИИХ, обсуждается в [9].

Повышенный уровень гармоник является причиной неизохронности ДВ-осциллятора (12), что иллюстрируется рис. 4, на котором показаны графики зависимости частоты автоколебаний от коэффициента превышения порога генерации.

Таким образом, ДВ-осциллятор Ван дер Поля (12), в отличие от своего аналогового прототипа, обладает определённой неизохронностью.

В физике колебаний в качестве модели автогенератора наряду с осциллятором Ван дер Поля рассматривается также осциллятор Рэля [10, 11]. В этом осцилляторе $g_r(x) = 0$, а активная составляющая нелинейности зависит от производной $y(t) = \dot{x}(t)\Delta$: $g_a(x) = \gamma(1 - y^2)$. По аналогии с (12) для ДВ-осциллятора Рэля можно записать уравнение движения вида

$$\begin{aligned} x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + x[n-2] = \\ = -2\pi\nu (1 - \gamma(1 - y^2[n-1])) \times \\ \times (\cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] - x[n-2]) + s[n-1]. \end{aligned}$$

В этом уравнении следует связать осцилляции $y[n]$ с осцилляциями $x[n]$.

Такая связь в виде

$$\text{sinc}(2\pi \Omega_0) y[n] = \cos(2\pi \Omega_0) x[n] - x[n-1]$$

является точной для гармонических колебаний с частотой Ω_0 . Как приближённую предлагается сохранить её в общем случае. Тогда ДВ-осциллятор Рэля описывается разностными уравнениями

$$x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + x[n-2] = -2\pi\nu(1 - \gamma(1 - y^2[n-1]))y[n-1] + s[n-1], \quad (13)$$

$$\text{sinc}(2\pi \Omega_0) y[n] = \cos(2\pi \Omega_0) x[n] - x[n-1].$$

Заметим, что активные осцилляторы (12) и (13) могут функционировать как в автономном режиме ($s[n] \equiv 0$), так и под внешним воздействием. ДВ-осциллятор Дюффинга является диссипативной системой и совершает колебания под действием внешнего сигнала.

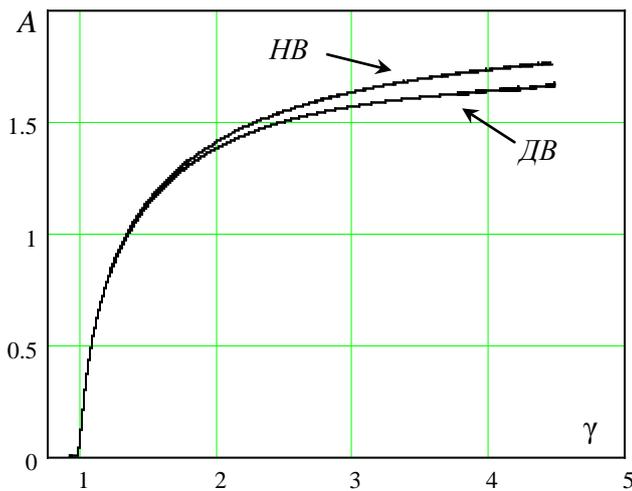


Рис. 3. Зависимости амплитуд от превышения порога генерации

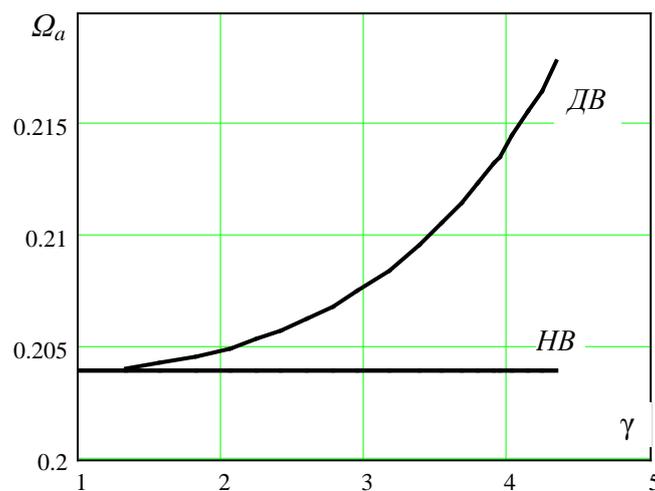


Рис. 4. Зависимости частот от превышения порога генерации

Осциллятор Ван дер Поля – Дюффинга

Комбинация уравнений движения активного осциллятора Ван дер Поля (12) и диссипативного осциллятора Дюффинга (11) приводит к ДВ-осциллятору Ван дер Поля – Дюффинга:

$$\begin{aligned}
 &x[n] - 2 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + x[n-2] = \\
 &= -2\pi\nu(1 - \gamma(1 - x^2[n-1])) \times \\
 &\times (\cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] - x[n-2]) + \\
 &+ \mu x^3[n-1] + s[n-1].
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Предлагается также определять этот осциллятор более компактным уравнением движения, представив линейную диссипативную часть системы в форме (3):

$$\begin{aligned}
 &x[n] - 2\alpha_0 \cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] + \alpha_0^2 x[n-2] = \\
 &= \gamma_a (1 - x^2[n-1]) (\cos(2\pi \Omega_0) x[n-1] - x[n-2]) + \\
 &+ \mu x^3[n-1] + s[n-1],
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где $\gamma_a = 2\pi\nu\gamma$ – параметр глубины обратной связи. Условие самовозбуждения осциллятора (15) является выполнение неравенства $\gamma_a > 1 - \alpha_0^2$.

Выше отмечалось, что ДВ-осцилляторы, воспроизводя основные свойства аналоговых прототипов, при определённых условиях могут существенно от них отличаться. Важнейшей особенностью автономного ДВ-осциллятора Ван дер Поля – Дюффинга (15), а также (14), отличающей его от аналогового прототипа, является наличие у него двух устойчивых предельных циклов.

Один из них на плоскости $\{x[n], y[n] = \cos(2\pi\Omega_0)x[n] - x[n-1]\}$ представляет собой обычную замкнутую кривую, а другой – совокупность четырёх неподвижных точек. При вариациях параметров осциллятора переход между этими предельными циклами может происходить как в форме регулярного релаксационного процесса, так и через хаотический аттрактор.

Для примера на рис. 5 представлены графики изменения частоты автоколебаний осциллятора (15) с параметрами $\Omega_0 = 0.204$, $Q = 15$, $\gamma_a = 0.2$ (кривая 1) и $\gamma_a = 0.25$ (кривая 2) при увеличении параметра реактивной нелинейности μ . Второй график демонстрирует переход между предельными циклами через хаотический аттрактор.

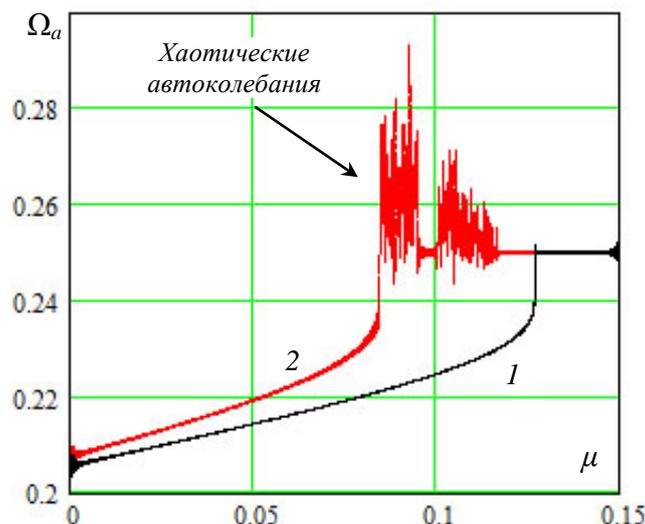


Рис. 5. Зависимости частот от параметра нелинейности

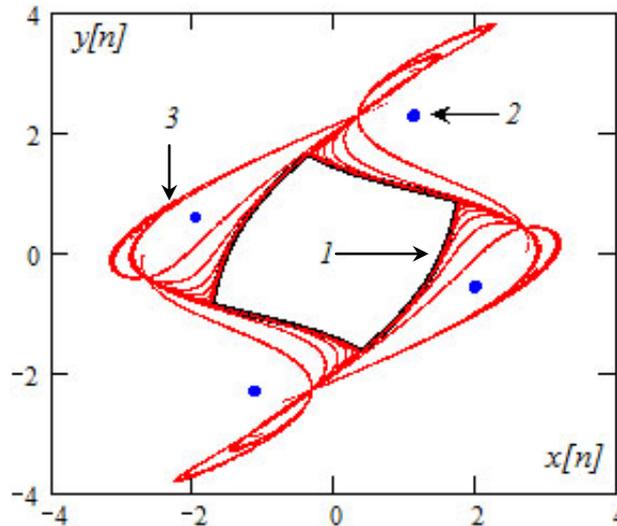


Рис. 6. Фазовый портрет осциллятора (15)

Фазовый портрет осциллятора Ван дер Поля – Дюффинга (15) показан на рис. 6. Предельные циклы 1, 2 и хаотический аттрактор 3 наблюдаются соответственно при значениях $\mu = 0.088$, $\mu = 0.089$ и $\mu = 0.2$. Параметр глубины обратной связи во всех трёх случаях имеет значение $\gamma_a = 0.24$. Корреляционная размерность хаотического аттрактора $S = 1.35 \pm 0.04$. Спектр мощности хаотических автоколебаний $x[n]$ содержит уширенную спектральную линию на центральной частоте $\Omega_a = 0.254$ (её относительная ширина $\Delta\Omega/\Omega_a = 0.08$) и сплошной амплитудно-фазовый пьедестал.

Отметим, что по спектральным характеристикам и фрактальной структуре хаотический аттрактор осциллятора (15) близок к хаотическому аттрактору предложенного ранее осциллятора [12]

$$x[n] - 2\alpha_0 \cos(2\pi\Omega_0)x[n-1] + \alpha_0^2 x[n-2] = \gamma_a (1 - x^2[n-1])(x[n-1] - x[n-2]). \quad (16)$$

На основании этого осциллятор (16) следует, по-видимому, рассматривать как вариант осциллятора Ван дер Поля – Дюффинга.

Заключение

Представленные дискретные отображения нелинейных осцилляторов расширяют круг объектов нелинейной динамики в дискретном времени со свойствами автоколебательных систем. В то же время они могут демонстрировать и аномальное поведение, отличающее их от аналоговых систем-прототипов.

В нормальных режимах регулярных автоколебаний предложенные отображения могут служить основой алгоритмов обработки дискретных (цифровых) сигналов, таких, например, как синхронное и частотное детектирование [13].

В аномальном режиме хаотических автоколебаний ДВ-осциллятор Ван дер Поля – Дюффинга генерирует широкополосный сигнал, который можно использовать для маскировки информации [14].

Библиографический список

1. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
2. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
3. Зайцев В.В., Нураев Д.Б., Юдин А.Н. Параметрический синтез отображения осциллятора Ван дер Поля в дискретном времени // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2013. № 4 (42). С. 140-144.
4. Корниенко В.Н., Привезенцев А.П. Особенности многоволновой самосогласованной динамики ансамбля автогенераторов и поля в прямоугольной области // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 7. С. 691-698. DOI: 10.7868/s0033849413060089.
5. Чернявский С.П. Многоволновое взаимодействие в системе «активная среда – волновое поле» // Вестник Челябинского государственного университета. 2015. № 7 (362). С. 55-59.
6. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
7. Зайцев В.В., Шилин А.Н., Юдин А.Н. Отображение осциллятора Дюффинга в дискретном времени // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, №2. С. 40-43.
8. Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17, №1. С. 35-40.
9. Зайцев В.В., Карлов А.В., Шилин А.Н., Федюнин Э.Ю. О дискретных моделях колебательных систем // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2015. Т. 18, №1. С. 38-43.
10. Кузнецов А.П., Селиверстова Е.С., Трубецков Д.И., Тюрюкина Л.В. Феномен уравнения Ван дер Поля // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 4. С. 3-42.
11. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
12. Зайцев В.В., Зайцев О.В., Яровой Г.П. Статистические оценки характеристик хаотических автоколебаний дискретного осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2001. Т. 4, №1. С. 18-21.
13. Зайцев В.В., Зайцев О.В. Детектор ЧМ-сигнала на основе кольца фазовой автоподстройки частоты дискретного автогенератора // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2005. Т. 8, № 1. С. 82-84.
14. Зайцев В.В., Зайцев О.В. Способ защиты информации с использованием алгоритма генерации хаотических автоколебаний // Вестник Самарского государственного университета. 2006. № 9(49). С. 66-71.

Информация об авторах

Зайцев Валерий Васильевич, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой радиофизики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: zaitsev@samsu.ru. Область научных интересов: автоколебательные системы, статистическая радиофизика, численное моделирование в радиофизике.

Нураев Дмитрий Борисович, инженер-конструктор, Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара. E-mail: d.nuraev@mail.ru. Область научных интересов: автоколебательные системы.

Шилин Александр Николаевич, инженер-конструктор, Акционерное общество «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара. E-mail: shilax@yandex.ru. Область научных интересов: цифровая обработка сигналов.

VAN DER POL, RAYLEIGH AND DUFFING OSCILLATORS IN DISCRETE TIME DYNAMICS

© 2016 V. V. Zaitsev¹, D. B. Nuraev², A. N. Shilin²

¹Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

²Joint Stock Company «Space Rocket Center «Progress», Samara, Russian Federation

Using a combination of the method of invariance of pulse characteristics of dynamic systems and the method of parametric synthesis is proposed for time sampling in nonlinear models of oscillatory systems. The difference equation of motion and the block diagram of a linear dissipative oscillator form the basis for the solution of the problem of designing a nonlinear discrete system (discrete mapping). Thus, Van der Pol, Rayleigh, Duffing oscillators are introduced as objects of nonlinear dynamics with discrete time mappings. Characteristics of self-oscillations of discrete and analog Van der Pol oscillators are compared, their similarity and difference at high levels of excitation is established. The results of a numerical experiment with a discrete Van der Pol – Duffing oscillator made it possible to establish that it can operate in two modes of self-oscillations differing in amplitudes and frequencies. It is shown that the transition between the modes can be followed by the generation of chaotic self-oscillations as the system parameters vary. Possible areas of application of the discrete dynamic systems described in the article are identified.

Nonlinear dynamics, discrete time, parametric synthesis, self-oscillation systems, regular oscillations, dynamic chaos.

References

1. Malinetskiy G.G., Potapov A.B. *Sovremennyye problemy nelineynoy dinamiki* [Modern problems of nonlinear dynamics]. Moscow: Editorial URSS Publ., 2000. 336 p.
2. Oppengeym A., Shafer R. *Tsifrovaya obrabotka* [Digital signal processing]. Moscow: Tekhnosfera Publ., 2006. 856 p.
3. Zaitsev V.V., Nuraev D.B., Yudin A.N. Parametrical design of discrete mapping of Van der Pol oscillator. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2013. No. 4 (42). P. 140-144. (In Russ.)
4. Kornienko V.N., Privezentsev A.P. Features of the multimode self-consistent dynamics of an ensemble of self-oscillators and the field in a rectangular region. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2013. V. 58, no. 7. P. 703-710. DOI: 10.1134/s1064226913060089.
5. Chernyavskiy S.P. Multiwave interaction in system active environment – wave field. *Bulletin of Chelyabinsk State University*. 2015. No. 7 (362). P. 55-59. (In Russ.)
6. Hayashi Ch. *Nelineynyye kolebaniya v fizicheskikh sistemakh* [Nonlinear oscillations in physical systems]. Moscow: Mir Publ., 1968. 432 p.
7. Zaitsev V.V., Shilin A.N., Yudin A.N. The mapping of Duffing oscillator in discrete time. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2014. V. 17, no. 2. P. 40-43. (In Russ.)
8. Zaitsev V.V. About discrete mapping the Van der Pol oscillator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2014. V. 17, no. 1. P. 35-40. (In Russ.)
9. Zaitsev V.V., Karlov A.V., Shilin A.N., Fedyunin E.Yu. About discrete models of oscillatory systems. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2015. V. 18, no. 1. P. 38-43. (In Russ.)

Citation: Zaitsev V.V., Nuraev D.B., Shilin A.N. Van der Pol, Rayleigh and Duffing oscillators in discrete time dynamics. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2016. V. 15, no. 1. P. 187-196.
DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-187-196

10. Kuznetsov A.P., Seliverstova E.S., Trubetskoy D.I., Turukina L.V. Phenomenon of the van der Pol equation. *Izvestiya VUZ Applied Nonlinear Dynamics*. 2014. V. 22, no. 4. P. 3-42. (In Russ.)

11. Nayfeh A. *Vvedenie v metody vozmushcheniy* [Introduction to perturbation techniques]. Moscow: Mir Publ., 1984. 536 p.

12. Zaitsev V.V., Zaitsev O.V., Yarovoy G.P. Statistical estimates of characteristics of chaotic self-oscillations of the discrete van der Pol oscillator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2001. V. 4, no. 1. P. 18-23. (In Russ.)

13. Zaitsev V.V., Zaitsev O.V. FM-signal detector based on phase-locked loop of discrete self-oscillator. *Physics of Wave Processes and Radio Systems*. 2005. V. 8, no. 1. P. 82-84. (In Russ.)

14. Zaitsev V.V., Zaitsev O.V. Protection of information using an algorithm of generating chaotic self-oscillations. *Vestnik of the Samara State University*. 2006. No. 9(49). P. 66-71. (In Russ.)

About the authors

Zaitsev Valery Vasilyevch, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Radiophysics, Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation. E-mail: zaitsev@samsu.ru. Area of Research: self-oscillation systems, statistical radiophysics, numerical modeling in radiophysics.

Nuraev Dmitriy Borisovich, design engineer, Space Rocket Center «Progress» plc, Samara, Russian Federation. E-mail: d.nuraev@mail.ru. Area of Research: self-oscillation systems.

Shilin Alexander Nicolaevich, design engineer, Space Rocket Center «Progress» plc, Samara, Russian Federation. E-mail: shilax@yandex.ru. Area of research: digital signal processing.