УДК 621.452.3.034 DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-163-170

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ПОДАТЛИВОСТИ «БЕЛИЧЬЕГО КОЛЕСА» В ОПОРАХ РОТОРОВ АВИАЦИОННЫХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

© 2016 С. А. Дегтярев[1], М. К. Леонтьев[2], В. В. Попов[3]

[1]Научно-технический центр по роторной динамике ООО «Альфа-Транзит», г. Химки
[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
[3]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

В статье приводится методика определения матрицы податливости упругой втулки типа «беличье колесо» с прямыми стержнями с учётом скруглений пазов. «Беличье колесо» – распространённый элемент упругодемпферных опор авиационных газотурбинных двигателей. Определение матрицы податливости необходимо для построения математических моделей авиационных газотурбинных двигателей при решении задач роторной динамики. Методика построена на основе применения интеграла Мора для балочных конструкций. Результаты, полученные с помощью разработанной методики, сравниваются с результатами расчёта в конечно-элементном комплексе и с результатами расчёта без учёта скруглений, а также с результатами работ других авторов.

Упругодемпферные опоры (УДО), «беличье колесо», матрица податливости, роторная динамика.

Введение

Создание математических моделей роторных систем, к которым относятся авиационные газотурбинные двигатели (ГТД), требует определения жесткостных, массовых и демпфирующих свойств элементов конструкций, находящих в их составе. Одним из распространённых элементов, применяемых в опорах авиационных ГТД, является упругий элемент типа «беличье колесо» [1]. Конструкции этого элемента бывают весьма разнообразные, однако довольно широкое распространение получили «беличьи колёса» с прямыми стержнями с прямоугольным поперечным сечением (рис.1).

В работах [2; 3] у «беличьего колеса» учитывалась только радиальная жёсткость. Полученная в [2] формула для коэффициента радиальной жёсткости «беличьего колеса» получила широкое распространение в прикладных расчётах и была уточнена путём введения поправочного коэффициента. Дальнейшее развитие эта формула получила в работах [4; 5], в которых были получены поправочные коэффициенты, учитывающие влияние длины стержней и наличие пазов скругления на величину радиальной жёсткости.

Рис. 1. «Беличье колесо» с прямыми стержнями с прямоугольным сечением

Цитирование: Дегтярев С.А., Леонтьев М.К., Попов В.В. Совершенствование методики определения матрицы податливости «беличьего колеса» в опорах роторов авиационных газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2016. Т. 15, № 1. С. 163-170.
DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-163-170

Создание более точных математических моделей роторных систем требует учёта в «беличьем колесе» не только радиальной жёсткости. Поэтому возникает потребность описывать жёсткость элемента с помощью матрицы жёсткости (или, обратной ей, матрицы податливости). В работе [6] представлена методика для вывода матрицы податливости «беличьего колеса» с прямыми стержнями с прямоугольным поперечным сечением. В настоящей работе эта методика совершенствуется путём получения матрицы податливости для «беличьего колеса» с учётом скруглений пазов в основании стержней.

Постановка задачи

Матрица податливости «беличьего колеса» с учётом жёсткой заделки на одном конце и свободной на другом имеет следующий вид:

$$[\delta]=\begin{bmatrix} \delta_{xx} & 0 & 0 & 0 & \delta_{x\varphi} & 0 \\ 0 & \delta_{yy} & 0 & \delta_{y\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{\vartheta y} & 0 & \delta_{\vartheta\vartheta} & 0 & 0 \\ \delta_{\varphi x} & 0 & 0 & 0 & \delta_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{\psi\psi} \end{bmatrix},$$

где δ_{ij} – компонент матрицы податливости, равный величине перемещения в направлении i от действия обобщённого единичного усилия в направлении j.

Конструкция стержневых элементов в «беличьем колесе» с учётом скругления пазов представлена на рис. 2.

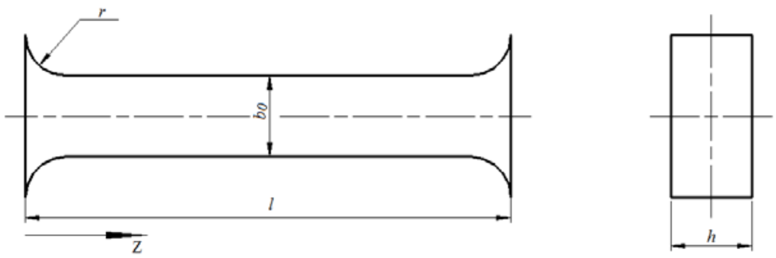

Рис. 2. Конструкция стержневого элемента «беличьего колеса»:
h – высота, b_0 – ширина в центральной части, r – радиус скругления пазов, l – длина

Высота стержневого элемента постоянна по всей длине, а ширина меняется по следующему закону

$$b=\begin{cases} b_0+2r-2\sqrt{2zr-z^2}, \ 0\le z<r, \\ b_0, \ r\le z<l-r, \\ b_0+2r-2\sqrt{2zl+2lr-2zr-z^2-l^2}, \ l-r\le z<l-r. \end{cases}$$

Для определения компонентов матрицы податливости воспользуемся интегралом Мора [7].

Компоненты матрицы податливости

δ_{xx} и δ_{yy} – компоненты матрицы податливости, вызванные действием единичной поперечной силы в направления X и Y соответственно. Любую из этих податливостей можно выразить через суммарную жёсткость стержневых элементов в соответствующих направлениях:

$$\delta_{yy}=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\delta_{yi}}},$$

где n – количество стержневых элементов.

Отметим тот факт, что стержневые элементы находятся в состоянии стеснённого изгиба, поэтому на конце у них запрещён поворот. В результате податливость одного стержневого элемента под действием силы равна

$$\delta_{yi}=\int\limits_0^l\frac{(l-z)\left(\frac{l}{2}-z\right)}{EJ_{xc}(z)}dz+\int\limits_0^l\frac{k_A}{GA(z)}dz,$$

где E и G – модули Юнга 1-го и 2-го рода соответственно; k_A – коэффициент, зависящий от геометрии поперечного сечения; $J_{xc}(z)$ и $A(z)$ – функции момента инерции относительно оси X «беличьего колеса» и площади поперечного сечения.

Из работы [6] известно, что

$J_{xc} = J_u \sin^2 \varphi_i + J_v \cos^2 \varphi_i$,

где φ_i – угол расположения стержневого элемента.

Итоговое выражение для компонента матрицы податливости имеет вид

$$\delta_{yy} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\int_0^l \frac{(l-z)\left(\frac{l}{2}-z\right)}{E\left(\frac{b(z)h^3}{12}\sin^2\left(\frac{2\pi i}{n}\right)+\frac{h(b(z))^3}{12}\cos^2\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right)}dz + \int_0^l \frac{k_A}{Ghb(z)}dz}}$$

и по аналогии

$$\delta_{xx} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\int_0^l \frac{(l-z)\left(\frac{l}{2}-z\right)}{E\left(\frac{b(z)h^3}{12}\cos^2\left(\frac{2\pi i}{n}\right)+\frac{h(b(z))^3}{12}\sin^2\left(\frac{2\pi i}{n}\right)\right)}dz + \int_0^l \frac{k_A}{Ghb(z)}dz}}.$$

δ_{zz} – компонент матрицы податливости, вызванный действием единичной осевой силы. Единичная сила будет равномерно распределяться между отдельными стержневыми элементами, поэтому компонент податливости равен:

$$\delta_{zz} = \int_0^l \frac{dz}{nEhb(z)} dz.$$

$\delta_{\vartheta\vartheta}$ и $\delta_{\varphi\varphi}$ – компоненты матрицы податливости, вызванные действием изгибающих моментов вокруг оси *X* и *Y* соответственно. Величина поворота сечения «беличьего колеса» от действия единичного момента вокруг оси *X* равна:

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \int_0^l \frac{dz}{EJ_x(z)},$$

где $J_x(z)$ – функция от координаты главного центрального момента инерции относительно оси *X* сечения «беличьего колеса».

Из [6] она равна:

$$J_x \approx \sum_i {y_i}^2 A(z),$$

где y_i – расстояние от оси *X* «беличьего колеса» до центра тяжести i-го стержневого элемента.

В итоге

$$\delta_{\vartheta\vartheta} = \int_0^l \frac{dz}{Ehb(z)\sum_i {y_i}^2}$$

и по аналогии

$$\delta_{\varphi\varphi} = \int_0^l \frac{dz}{Ehb(z)\sum_i {x_i}^2}.$$

$\delta_{x\varphi}$ и $\delta_{y\vartheta}$ – компоненты матрицы податливости, показывающие перемещение вдоль оси *X* и *Y* от действия единичных изгибающих моментов вокруг осей *Y* и *X* соответственно (или, наоборот, угол поворота вокруг оси *X* и *Y* от действия единичных сил вдоль осей *Y* и *X*).

Они равны

$$\delta_{x\varphi} = \int_0^l \frac{(l-z)}{Ehb(z)\sum_i {x_i}^2} dz$$ и

$$\delta_{y\vartheta} = -\int_0^l \frac{(l-z)}{Ehb(z)\sum_i {y_i}^2} dz.$$

$\delta_{\psi\psi}$ – компонент матрицы податливости, равный углу поворота сечения вокруг оси Z от действия крутящего момента вокруг него. Действие крутящего момента представляется в виде действия единичных усилий на стержневые элементы, равного величине крутящего момента, отнесённого к количеству стержневых элементов и радиусу их расположения. Перемещение одного стержневого элемента под действием этой нагрузки, отнесённое к величине радиуса, и есть искомая величина податливости.

Таким образом

$$\delta_{\psi\psi} = \frac{1}{nR^2}\left(\int_0^l \frac{(l-z)\cdot\left(\frac{l}{2}-z\right)}{\frac{Eh(b(z))^3}{12}}dz + \int_0^l \frac{k_A}{Ghb(z)}dz\right),$$

где R – радиус расположения центров тяжести стержневых элементов (одинаковый для всех).

Стоит отметить, что указанные в выражениях для компонентов матриц интегралы рассчитываются численно с помощью квадратур Гаусса [8].

Тестовый пример и проверка полученных результатов

В качестве тестового примера произведём расчёт матрицы податливости для «беличьего колеса» с параметрами, представленными в табл.1.

Для валидации результатов проводится расчёт в конечно-элементном комплексе. Конечно-элементная модель стержневых элементов «беличьего колеса» представлена на рис. 3.

Таблица 1. Характеристики «беличьего колеса»

Обозначение	Описание	Величина	Размерность
R	Радиус расположения стержневых элементов в УДО	78,1	мм
l	Длина стержневых элементов	31	мм
b	Ширина стержневых элементов	3.69	мм
h	Высота стержневых элементов	3.8	мм
r	Радиус скругления пазов	4	мм
n	Количество стержневых элементов	43	–
E	Модуль Юнга 1-го рода	$2\cdot10^5$	МПа
μ	Коэффициент Пуассона	0,3	–

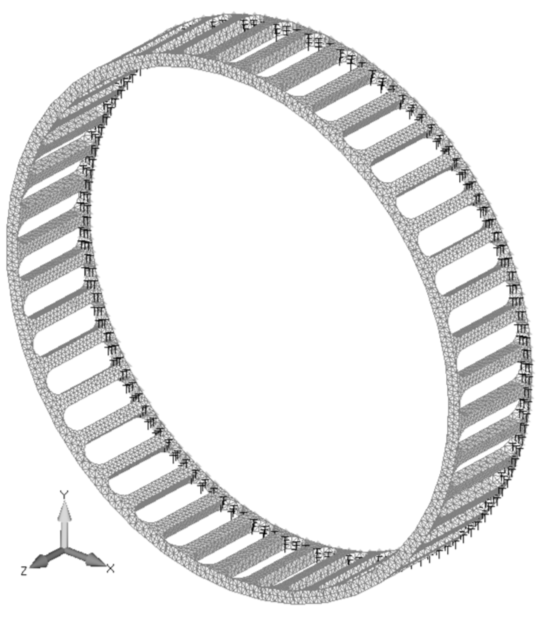

Рис. 3 Конечно-элементная модель стержневых элементов «беличьего колеса»

Стержневые элементы промоделированы с помощью 10-узловых квадратичных тетраэдрных твёрдотельных конечных элементов. С одной плоскости стержневые элементы жёстко закреплены по всем степеням свободы, а с другой связаны между собой абсолютно жёстким элементом и сведены к центральному узлу. Нагрузка модели производится через центральный узел.

Для демонстрации влияния скругления пазов проводится расчёт матрицы податливости по методике из работы [6].

Результаты расчётов компонентов матрицы податливости различными методами представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты расчётов

Компонент матрицы податливости	Решение по приведённой методике (1)	Решение с помощью метода конечных элементов (2)	Решение по методике из [6] (3)	Разница между 1 и 2 решениями	Разница между 1 и 3 решениями
δ_{xx}	$1{,}36\cdot10^{-5}$	$1{,}40\cdot10^{-5}$	$1{,}84\cdot10^{-5}$	2,85%	35,3%
$\delta_{x\varphi}$	$1{,}22\cdot10^{-9}$	$1{,}23\cdot10^{-9}$	$1{,}31\cdot10^{-9}$	0,8%	7,38%
δ_{yy}	$1{,}36\cdot10^{-6}$	$1{,}40\cdot10^{-6}$	$1{,}84\cdot10^{-5}$	2,85%	35,3%
$\delta_{y\vartheta}$	$-1{,}22\cdot10^{-9}$	$-1{,}23\cdot10^{-9}$	$-1{,}31\cdot10^{-9}$	0,8%	7,38%
δ_{zz}	$2{,}40\cdot10^{-7}$	$2{,}46\cdot10^{-7}$	$2{,}57\cdot10^{-7}$	2,5%	7,08%
$\delta_{\vartheta\vartheta}$	$7{,}88\cdot10^{-11}$	$7{,}89\cdot10^{-11}$	$8{,}43\cdot10^{-11}$	0,12%	6,98%
$\delta_{\varphi\varphi}$	$7{,}88\cdot10^{-11}$	$7{,}89\cdot10^{-11}$	$8{,}43\cdot10^{-11}$	0,12%	6,98%
$\delta_{\psi\psi}$	$2{,}12\cdot10^{-9}$	$2{,}18\cdot10^{-9}$	$3{,}10\cdot10^{-9}$	2,75%	46,2%

Погрешность компонентов матрицы податливости, полученных по приведённой методике, по сравнению с конечно-элементным расчётом составляет не более 3%. Разница между величинами компонентов, подсчитанными со скруглениями и без них достигает 35% для компонентов радиальных перемещений и 46% – для поворота от действия крутящего момента. Расчёт радиальной податливости с учётом скруглений по формуле из работы [4]

$$k = \frac{nEbh(h^2+b^2)}{2l^3\left(1+8.2\left(\dfrac{l}{h}\right)^{-1,35}\left(\dfrac{r}{b}\right)\right)}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2\sqrt{bh}}{l}\right)^3}$$

даёт результат, отличающийся от решения в конечно-элементном комплексе и от решения по полученным формулам на 17%.

Заключение

В статье приведена методика для определения компонентов матрицы податливости «беличьего колеса» с прямыми стержнями с учётом скругления пазов. Методика строится на использовании интеграла Мора для балочных конструкций и позволяет с высокой точностью определять компоненты матрицы. Разница между результатами по приведённой методике и конечно-элементным расчётом для компонентов не превышает 3%.

При этом разница между величинами компонентов матриц податливости с учётом скруглений и без них достигает 46%, что свидетельствует о необходимости их учёта. Получение матрицы по предложенной методике не вызывает вычислительных трудностей. Поэтому данная методика и матрица податливости, получаемая с её помощью, могут успешно использоваться для моделирования опорных узлов авиационных газотурбинных двигателей в задачах роторной динамики. Отметим, что на общую податливость «беличьего колеса», помимо стержневых элементов, могут влиять другие элементы конструкции – фланец, крепления под подшипник и др. В этом случае необходимо проводить дополнительный анализ и учитывать дополнительные податливости.

Библиографический список

1. Белоусов А.И., Балякин В.Б., Новиков Д.К. Теория и проектирование гидродинамических демпферов опор роторов. Самара: Самарский научный центр РАН, 2002. 335 с.
2. Сергеев С.И. Демпфирование механических колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 408 с.
3. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / под ред. И.А. Биргера, Б.Ф. Шорра. М.: Машиностроение, 1981. 232 с.
4. Балякин В.Б., Барманов И.С. Совершенствование методик расчёта динамических параметров упругих элементов УДО роторов ГТД // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. Т. 11, № 3-1. С. 205-209.
5. Балякин В.Б., Барманов И.С. Методика определения коэффициента жёсткости упругих элементов опор роторов авиационных газотурбинных двигателей // Известия Самарского научного центра РАН. 2013. Т. 15, № 4-1. С. 213-217.
6. Дегтярев С. А., Леонтьев М. К., Попов В.В. К определению податливости «беличьего колеса» в опорах роторов авиационных газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2014. № 4 (46). С. 52-60.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2010. 590 с.
8. Амосов А.А, Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.

Информация об авторах

Дегтярев Сергей Александрович, руководитель направления разработки средств моделирования, Научно-технический центр по роторной динамике, ООО «Альфа-Транзит». E-mail: degs@alfatran.com. Область научных интересов: роторная динамика, вибрационная диагностика.

Леонтьев Михаил Константинович, доктор технических наук, профессор кафедры 203 «Конструкция и проектирование двигателей», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). E-mail: lemk@alfatran.com. Область научных интересов: проектирование конструкций газотурбинных двигателей, прочность, роторная динамика, вибрационная диагностика.

Попов Валерий Васильевич, ассистент кафедры РК-5 «Прикладная механика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана. E-mail: vvpopov.bmstu@gmail.com. Область научных интересов: вычислительная механика, тензорная алгебра в механике, механика контактного взаимодействия.

PERFECTING THE METHODOLOGY OF DETERMINING THE FLEXIBILITY MATRIX OF THE «SQUIRREL CAGE» IN ROTOR SUPPORTS OF AVIATION GAS-TURBINE ENGINES

© 2016 S. A. Degtyarev[1], M. K. Leontiev[2], V. V. Popov[3]

[1]Technical Research Center of Rotor Dynamics «Alfa-Tranzit», LLC, Khimky, Russian Federation
[2]Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation
[3]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Elastic-damping supports are widely spread in the design of aviation gas-turbine engines. These supports include elastic elements of the «squirrel cage» type. A methodology of calculating the flexibility matrix for the «squirrel cage» with straight rod elements of rectangular cross-section with account for groove rounding is presented in the paper. Determining the flexibility matrix is essential for constructing mathematical models of aviation gas turbine engines when solving problems of rotor dynamics. The methodology is based on the application of Mohr integral for beam constructions. The results obtained with the help of the methodology are compared with the results of calculations in the finite-element complex and with the results of calculation without regard for the rounding, as well as with results obtained by other authors.

Elastic-damping supports, «squirrel cage», flexibility matrix, rotor dynamics.

References

1. Belousov A.I., Balyakin V.B., Novikov D.K. *Teoriya i proektirovanie gidrodinamicheskih dempferov opor rotorov* [Theory and design of hydrodynamic dampers of rotor supports]. Samara: Samarskiy nauchnyy tsentr RAN Publ., 2002. 335 p.

2. Sergeev S.I. *Dempfirovanie mehanicheskih kolebaniy* [Damping of mechanical vibrations]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959. 408 p.

3. *Dinamika aviacionnyh gazoturbinnyh dvigateley* [Dynamics of aircraft gas turbine engines]. Ed. by I.A. Birger, B.F. Shorr. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1981. 232 p.

4. Balyakin V.B., Barmanov I.S. Perfection of design procedures of dynamic parameters of elastic elements FDS of rotors GTE. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN.* 2009. V. 11, no. 3-1. P. 205-209. (In Russ.)

5. Balyakin V.B., Barmanov I.S. Design procedure of factor of rigidity flexible elements of support of rotors aviation gas turbine engines. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo centra RAN*. 2013. V. 15, no. 4-1. P. 213-217. (In Russ.)

6. Degtiarev S.A., Leontiev M.K., Popov V.V. «Squirrel cage» flexibility in supports of aviation gas turbine engine rotors. *Vestnik of the Samara State Aerospace University.* 2014. No. 4(46). P. 52-60. (In Russ.)

7. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow: Bauman Moscow State Technical University Publ., 2010. 590 p.

8. Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* [Computational methods for engineers]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1994. 544 p.

Citation: Degtyarev S.A., Leontiev M.K., Popov V.V. Perfecting the methodology of determining the flexibility matrix of the «squirrel cage» in rotor supports of aviation gas-turbine engines. *Vestnik of the Samara State Aerospace University.* 2016. V. 15, no. 1. P. 163-170. DOI: 10.18287/2412-7329-2016-15-1-163-170

About the authors

Degtyarev Sergey Alexandrovich, Manager of Department on the development of simulation means, Technical Research Center of Rotor Dynamics «Alfa-Tranzit» LLC, Khimky, Russian Federation. E-mail: degs@alfatran.com. Area of Research: rotary dynamics, vibration diagnostics.

Leontiev Mikhail Konstantinovich, Doctor of Science (Engineering), Professor of the Department 203 «Construction and design of engines», Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation. E-mail: lemk@alfatran.com. Area of Research: structural design of gas turbine engines, durability, rotary dynamics, vibration diagnostics.

Popov Valerii Vasil'evich, teaching assistant of the Department RK-5 «Applied mechanics», Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation. E-mail: vvpopov.bmstu@gmail.com. Area of Research: numerical mechanics, tensor algebra in mechanics, contact interaction mechanics.