

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА**

© 2011 Ф. В. Гречников, Я. А. Ерисов

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассмотрены способы определения напряжений при численном моделировании процессов обработки металлов давлением. Разработана математическая модель анизотропного упругопластического материала и описан алгоритм расчёта напряжённо-деформированного состояния по данной модели.

Математическая модель, критерий пластичности, ассоциированный закон течения, модель упрочнения, алгоритм, поверхность пластичности, радиальный метод, метод касательных, анизотропия.

Одним из перспективных направлений развития современных машиностроительных предприятий и повышения их конкурентоспособности является сокращение сроков и стоимости разработки новых изделий и технологических процессов за счёт активного использования численных методов и компьютерного моделирования при проектировании [1]. Вместе с тем, возможности наиболее популярных программных комплексов, основанных на методе конечных элементов (МКЭ), таких как ANSYS, LS-DYNA, ABAQUS и др., в большинстве случаев ограничены, т.к. используемые в них алгоритмы и модели или предназначены только для изотропных материалов, или не соответствуют требованиям современной теории пластичности анизотропных сред [2].

Однако такие широко распространённые металлургические полуфабрикаты, как листы, ленты, профили, трубы и т. д., обладают явно выраженной анизотропией свойств, являющейся следствием кристаллического строения вещества и последующего его текстурообразования при обработке давлением. Игнорирование этой фундаментальной характеристики материалов в технологических расчётах не только снижает потенциальные деформационные возможности заготовок, но и приводит к целому ряду других нежелательных явлений: повышенному расходу металла, ограничению предельно допустимой деформации, снижению эксплу-

атационных параметров продукции. С другой стороны, рациональная анизотропия является важным фактором интенсификации процессов формообразования материалов и повышения эксплуатационных характеристик изделий [3].

Таким образом, разработка эффективной математической модели анизотропного упругопластического материала является актуальной задачей и позволяет перенести значительную часть работ по оценке и анализу напряжённо-деформированного состояния в область численного эксперимента.

С позиций метода конечных элементов при выводе уравнений желательнее использовать положения теории пластических течений, когда напряжённое состояние и приращения напряжений определяются приращением компонентов пластических деформаций [4]. Рассмотрим элементы модели материала, являющиеся основными для данной теории [5]:

1) критерий пластичности, т.е. условие, дающее возможность определить то напряжённое состояние, при достижении которого возникает пластическая деформация;

2) закон течения, т.е. уравнения, связывающие в каждой точке напряжения с пластическими деформациями или их скоростями;

3) модель упрочнения, описывающая изменение поверхности пластичности в процессе деформирования.

Условия наступления пластического состояния для анизотропных сред исследовались многими учёными, при этом наибольшее применение получили критерии Р. Хилла [7], Ф. Барлата [8] и Д. Банабика [9]. Однако их практическое применение и реализация численными методами вызывает значительные трудности. Во-первых, указанные условия текучести не учитывают причин возникновения анизотропии. Во-вторых, они имеют сложную математическую запись с большим количеством параметров анизотропии, физический смысл которых не всегда очевиден [3]. При этом для определения параметров материала необходимы многочисленные механические испытания при различных условиях нагружения [10].

В связи с этим в данной работе использовался разработанный Ю. М. Арышенским критерий пластичности, в основу которого положены технические константы анизотропии, определяемые при испытании на линейное растяжение [11]. Дальнейшее развитие данное условие получило в результате исследований Ф. В. Гречникова, который связал показатели анизотропии с кристаллографическими ориентировками – с причиной анизотропии свойств [3].

Функцию текучести в общем виде можно записать следующим образом [4]:

$$f(\{\sigma\}, \bar{\sigma}) = \sigma_i - \bar{\sigma}, \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}$ – напряжение текучести; σ_i – интенсивность напряжений.

Если принять допущение о том, что напряжение, направленное по толщине материала, будет всегда оставаться перпендикулярным плоскости полуфабриката, что справедливо для операций листовой штамповки, то $\sigma_{31} = \sigma_{23} = 0$ и уравнение интенсивности напряжений σ_i в краткой матричной будет иметь вид [12]:

$$\sigma_i = \sqrt{\{\sigma\}^T [M] \{\sigma\}}, \quad (2)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \varphi_1 \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \dots} \\ &\rightarrow + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1 \right) (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \dots \\ &\rightarrow + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1 \right) (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + \varphi_3 \sigma_{12}^2 \end{aligned}$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{12}\}$ – вектор-строка напряжений; $[M]$ – тензор показателей анизотропии:

$$[M] = \varphi_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_{21}} & -1 & 1 - \frac{1}{\mu_{21}} & 0 \\ -1 & \frac{1}{\mu_{12}} & 1 - \frac{1}{\mu_{12}} & 0 \\ 1 - \frac{1}{\mu_{21}} & 1 - \frac{1}{\mu_{12}} & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_1 = \frac{\mu_{12} \mu_{21}}{\mu_{12} + \mu_{21} - 2\mu_{12} \mu_{21}},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\mu_{12}} + \frac{1}{\mu_{21}} - 2,$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 \frac{1 + \mu_1}{1 - \mu_1}.$$

Коэффициенты поперечной деформации μ_{ij} определяются при испытании на одноосное растяжение плоского образца и представляют отношение поперечной пластической деформации сжатия ε_i к продольной пластической деформации растяжения ε_j : $\mu_{ij} = -\varepsilon_i / \varepsilon_j$ ($i, j = 1, 2, 3$; 1 – направление проката, 2 – поперечное направление; 3 – направление по толщине листа); μ_i – коэффициент μ_{ij} под углом 45° к основным осям анизотропии i - j .

Пластическая деформация приводит к значительному изменению механических и физических свойств материала, т.е. к упрочнению. При этом напряжения являются нелинейной монотонно возрастающей функцией деформаций, и поверхность пластичности изменяется в ходе деформирования. Будем считать, что поверхность пластичности в процессе пластического течения расширяется равномерно в пространстве напряжений без изменения формы и положения центра (рис. 1), т.е. имеет место изотропное упрочнение [6].

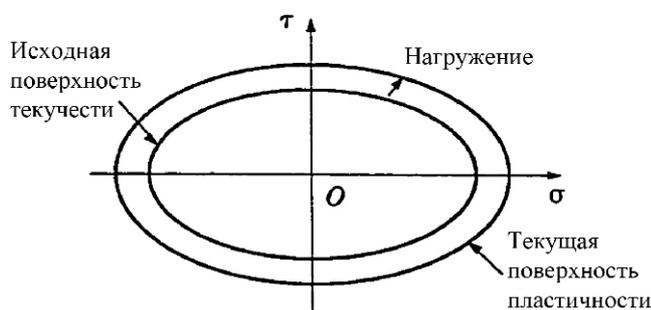


Рис. 1. Изотропная модель упрочнения

В качестве функциональной зависимости напряжений текучести $\bar{\sigma}$ от величины накопленных деформаций ε_i воспользуемся билинейной аппроксимацией кривой упрочнения упругопластического материала (рис. 2) [13]:

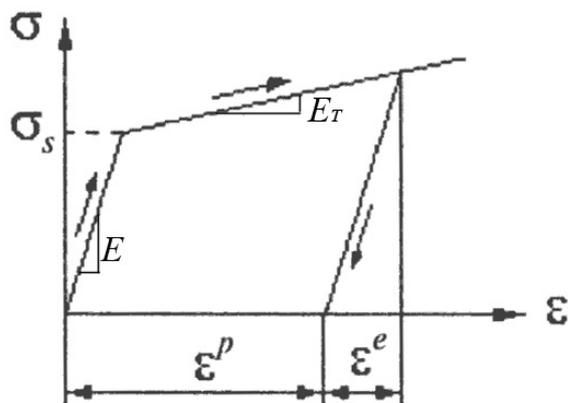


Рис. 2. Упругопластическая среда с линейным упрочнением

$$d\bar{\sigma} = Hd\varepsilon_i, \tag{3}$$

где $H = EE_T / (E - E_T)$ – постоянная упрочнения (константа материала); интенсивность деформаций ε_i находится из выражения [12]:

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\varphi_1(1-\mu_{12}\mu_{21})} \left(\frac{\varepsilon_{11}^2}{\mu_{12}} + 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \rightarrow \rightarrow + \frac{\varepsilon_{22}^2}{\mu_{21}} \right) + \frac{4}{\varphi_3} \varepsilon_{12}^2}.$$

Для установления связи между напряжениями и деформациями воспользуемся ассоциированным законом течения, согласно которому функция текучести (1) и вектор скоростей $\{\dot{\varepsilon}\}^P$ или приращений $\{d\varepsilon\}^P$ компонент пластических деформаций связаны между собой [14]:

$$\{d\varepsilon\}^P = d\lambda \{a\}, \tag{4}$$

где $d\lambda$ – неопределённый (пластический) множитель Лагранжа, постоянный для данных значений деформаций; $\{a\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}$ – нормаль к поверхности пластичности (градиент течения).

Из функции текучести (1) и ассоциированного закона течения (4) следует, что упругой области соответствуют отрицательные значения $f < 0$, а при пластическом течении $f = 0$. Случай при $f > 0$ не имеет физического смысла и свидетельствует о том, что напряжённое состояние не удовлетворяет уравнениям (1)-(4). При $\{a\} > 0$ происходит нагружение, сопровождающееся приращением пластических деформаций; при $\{a\} = 0$ и $\{a\} < 0$ – имеются нейтральное нагружение и разгрузка, сопровождающиеся упругими деформациями, связанными с напряжениями законом Гука (изменения пластических деформаций не происходит $\{d\varepsilon\}^P = 0$).

Для упругопластической модели материала полная деформация $\{d\varepsilon\}$ складывается из упругой $\{d\varepsilon\}^e$ и пластической $\{d\varepsilon\}^p$ [14]:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon\}^e + \{d\varepsilon\}^p. \quad (5)$$

Так как компоненты упругой деформации $\{d\varepsilon\}^e$ связаны с напряжениями законом Гука [4]: $\{d\sigma\} = [D]^e \{d\varepsilon\}^e$, где $[D]^e$ – тензор упругих постоянных материала, а изменение пластических деформаций $\{d\varepsilon\}^p$ определяется выражением (4), то из уравнения (5) получим

$$\{d\sigma\} = [D]^e \{d\varepsilon\} - d\lambda [D]^e \{a\}. \quad (6)$$

В связи с тем, что при решении упругопластической задачи методом конечных элементов на шаге расчёта t_n известно напряжённо-деформированное состояние и параметры материала ($\{\sigma\}_n$, $\{\varepsilon\}_n^e$, $\{\varepsilon\}_n^p$, H , $\bar{\sigma}_n$), а на следующем шаге t_{n+1} только приращение деформаций $\{d\varepsilon\}$ (рис. 3) [15], то выражение (6) можно записать следующим образом:

$$\{\sigma\}_{n+1} = \{\sigma\}_t - d\lambda [D]^e \{a\}, \quad (7)$$

где $\{\sigma\}_t = \{\sigma\}_n + [D]^e \{d\varepsilon\}$ – пробные напряжения, определяемые законом Гука.

Как видно из уравнения (7), задача нахождения напряжений сводится к определению пластического множителя $d\lambda$. Для изотропной среды $d\lambda$ находится из допущения, что множитель всегда направлен к центру поверхности пластичности (следует из принципа нормальности ассоциированного закона течения (4)), так называемый радиальный метод [2]. Однако в общем случае анизотропной среды воспользоваться данным методом невозможно вследствие нарушения принципа нормальности для поверхности пластичности с большой кривизной [15].

Непосредственное определение пластического множителя $\Delta\lambda$ методами численного интегрирования требует решения системы нелинейных алгебраических уравнений численными методами, что приводит к увеличению продолжительности расчётов [5]. Замена в уравнениях (4)-(7) бесконечно малых приращений конечными приводит к искусственному упрочнению, так называемому «дрейфу» поверхности пластичности, что искажает достоверность результатов моделирования. Для устранения «дрейфа» необходимо использовать дополнительные проце-



Рис. 3. Определение напряженно-деформированного состояния методом конечных элементов по математической модели материала

дуры, например, искусственное уменьшение величины приращения деформаций [16].

Ввиду отмеченных недостатков интегрирования уравнений предложен способ нахождения пластического множителя $\Delta\lambda$ разложением условия пластичности (1) в ряд Тейлора вокруг окрестности пробного напряженного состояния $\{\sigma\}_t$ [17]:

$$f_{n+1} \approx f_t + \left\{ \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} \right\}^T \{\Delta\sigma\} + \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} \Delta\bar{\sigma} + \dots \quad (8)$$

При этом, если пренебречь членами высшего порядка, то получим линеаризованную форму критерия пластичности (1). После подстановки (3) и (6) в (8) выразим величину $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \frac{f_t}{H + \{a\}_t^T [D]^e \{a\}_t} \quad (9)$$

Так как уравнение линеаризованного критерия пластичности является уравнением гиперплоскости, касательной к поверхно-

сти пластичности, то данный метод получил название метода касательных (рис. 4) [15].

Вследствие принятых допущений для уменьшения погрешности вычисления по уравнению (9) производятся до достижения заданной точности.

Разработанный алгоритм расчёта напряжений при упругопластической деформации анизотропного материала представлен в виде блок-схемы на рис. 5.

Математическое моделирование по сравнению с натурным экспериментом позволяет получить больший объём информации, провести всестороннее исследование, рассмотреть и сопоставить большее количество альтернативных вариантов. По мере развития численных методов повышается достоверность полученных результатов, и поэтому возрастает роль компьютерного моделирования.

Анализ опубликованных работ показал, что математическая постановка задачи пластического течения анизотропной среды разработана еще недостаточно полно. Многие вопросы требуют дальнейшего решения.

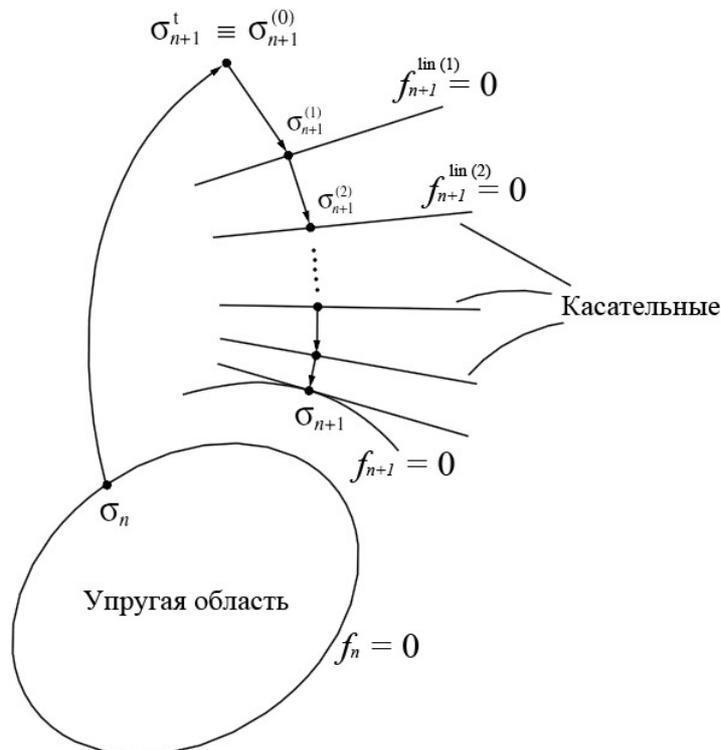


Рис. 4. Метод касательных

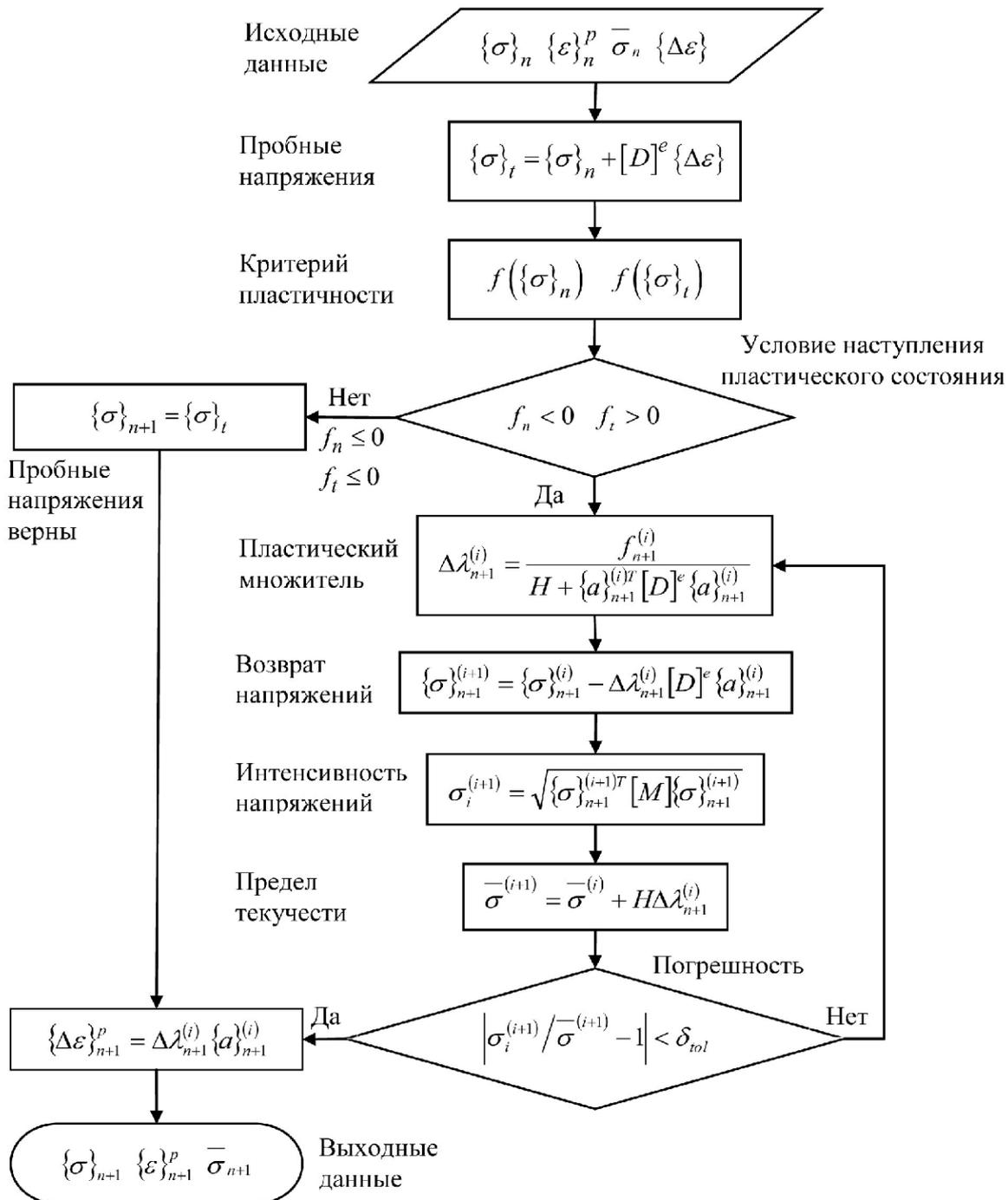


Рис. 5. Блок-схема алгоритма расчёта напряжений

Алгоритмы расчёта напряжений и деформаций при решении упругопластической задачи, изначально созданные для изотропных материалов, приводят к значительной погрешности при моделировании формообразования анизотропных заготовок.

Рассмотренная в данной работе математическая модель материала лишена отмеченных недостатков, т.к. основывается на современных положениях теории пластических течений и физически обоснованном

критерии пластичности анизотропного материала, а алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния методом касательных обеспечивает высокую точность и может быть использован совместно с большинством программных комплексов, реализующих инженерный анализ методом конечных элементов (например, LS-DYNA), для моделирования процессов обработки давлением анизотропных материалов.

Библиографический список

1. Рыбин, Ю.И. Математическое моделирование и проектирование технологических процессов обработки металлов давлением [Текст]/Ю.И. Рыбин, А.И. Рудской, А.М. Золотов. – М.: Наука, 2004. – 644 с.
2. Dunne, F. Introduction to computational plasticity [Текст]/F. Dunne, N. Petrinic. – U.K.: Oxford University Press, 2005. – 259 с.
3. Гречников, Ф.В. Деформирование анизотропных материалов (Резервы интенсификации) [Текст]/Ф.В. Гречников. – М.: Машиностроение, 1998. – 448 с.
4. Соколовский, В.В. Теория пластичности [Текст]/В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
5. Wang, D.Q. Numerical integration for anisotropic plasticity [Текст]: дисс. ... доктора философии/Dong Qing Wang. – Wyoming, 1995. – 249 с.
6. Hambrecht, J.D. Elastic-plastic return algorithms for sheet metal forming simulations and springback analysis [Текст]: дисс. ... доктора философии/Jochen Dieter Hambrecht. – Ohio, 1993. – 230 с.
7. Хилл, Р. Математическая теория пластичности [Текст]/Р. Хилл. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 407 с.
8. Barlat, F. Constitutive modeling for metals [Текст]/F. Barlat//Advanced methods in material forming, 2007. С. 1-18.
9. Vanabic, D. About the mechanical data required to describe the anisotropy of thin sheets to correctly predict the earing of deep-drawn cups [Текст]/D. Vanabic, S. Soare//International Journal of Material Forming, 2008, Vol. 1. С. 285-288.
10. Majak, J. Material parameters identification by use of hybrid GA [Текст]/J. Majak, S. Toompalu, M. Pohlak//Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering, 2008, Vol. 27. С. 63-66.
11. Арышенский, Ю.М. Теория и расчёты пластического формоизменения анизотропных материалов [Текст]/Ю.М. Арышенский, Ф.В. Гречников. – М.: Metallurgiya, 1990. – 304 с.
12. Арышенский, Ю.М. Теория листовой штамповки анизотропных материалов [Текст]/Ю.М. Арышенский. – Саратов: Саратовский университет, 1973. – 112 с.
13. Сторожев, М.В. Теория обработки металлов давлением [Текст]/М.В. Сторожев, Е.А. Попов. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
14. Ивлев, Д.Д. Теория упрочняющегося пластического тела [Текст]/Д.Д. Ивлев, Г.И. Быковцев. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
15. Neto, E.S. Computational methods for plasticity: theory and applications [Текст]/E.S. Neto, D. Peric, D.R.J. Owen. – U.K.: John Wiley & Sons Ltd, 2008. – 816 с.
16. Owen, D.R.J. Finite elements in plasticity: theory and practice [Текст]/D.R.J. Owen, E. Hinton. – U.K.: Pineridge Press Limited, 1980. – 603 с.
17. Волков, Е.А. Численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов/Е.А. Волков. – М.: Наука, 1987. – 248 с.

MATHEMATICAL MODEL OF ANISOTROPIC ELASTIC-PLASTIC MATERIAL

© 2011 F. V. Grechnikov, Ya. A. Yerisov

Samara State Aerospace University
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

The paper deals with ways of determining stress during numerical simulation of metal forming processes. A mathematical model of anisotropic elastic-plastic material and an algorithm for the computation of stress-strain state using this model have been developed.

Mathematical model, plasticity criteria, associated flow rule, hardening rule, algorithm, plasticity surface, radial method, cutting-plane algorithm, anisotropy.

Информация об авторах

Гречников Федор Васильевич, член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой обработки металлов давлением, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: gretch@ssau.ru. Область научных интересов: деформирование анизотропных материалов.

Ерисов Ярослав Александрович, аспирант, инженер кафедры обработки металлов давлением, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: yaroslav.erisov@mail.ru. Область научных интересов: исследование механизмов формирования кристаллографических ориентировок при прокатке.

Grechnikov Fyodor Vasilievitch, corresponding member of RAS, doctor of technical sciences, professor, head of the metal forming department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: gretch@ssau.ru. Area of research: anisotropic materials deforming.

Yerisov Yaroslav Alexandrovitch, post-graduate student, engineer of the metal forming department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: yaroslav.erisov@mail.ru. Area of research: crystallographic orientation formation mechanisms during sheet rolling.