УДК 629.78 + 531.36

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАЗГОННОГО БЛОКА С ТОРОИДАЛЬНЫМ БАКОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС В ПАРАМЕТРАХ КЭЛИ-КЛЕЙНА

© 2011 А. В. Алексеев, В. С. Красников

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Предложена математическая модель движения вокруг центра масс разгонного блока (РБ) с тороидальным баком, заполненным жидким топливом. Определены зависимости параметров движения от времени численным и аналитическим методами. Исследованы предельные случаи ориентации в углах Эйлера.

Разгонный блок, параметры Кэли-Клейна, углы Эйлера, кинематические уравнения.

Введение

В ряде задач динамики полёта космических аппаратов необходимо определить движение относительно центра масс. Традиционно для определения ориентации твёрдого тела в пространстве применяются углы Эйлера. Однако, определить аналитические зависимости указанных углов от времени в общем случае трудно. Поэтому используют в основном их численные зависимости, полученные с помощью численного интегрирования соответствующих уравнений движения. Целью данной работы является определение аналитических зависимостей от времени традиционных углов ориентации твёрдого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью. Твёрдым телом с тороидальной полостью, целиком заполненной жидкостью, моделируется разгонный блок (РБ). Форма полости выбрана неслучайно: это один из наиболее распространённых типов баков наряду с цилиндрическими и сферическими, используемыми в РБ.

Под простейшими случаями движения твёрдого тела с полостями, наполненными жидкостью, будем подразумевать случаи, когда движение жидкости в полости можно полностью охарактеризовать конечным числом переменных [1]. Очевидно, это возможно лишь при полном заполнении жидкостью полости, когда отсутствует свободная поверхность. Известно, что если при этом движение жидкости является потенциальным или же однородным вихревым, то движение системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями вместе с уравнением Лапласа [2, 3]. Исследование движения системы в этих случаях значительно упрощается.

1. Математическая модель

В случае, когда полость целиком заполнена жидкостью и за начало подвижных осей принят центр инерции системы, уравнения движения принимают простой вид

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{L}\,. \tag{1}$$

Суммарный момент количеств движения твёрдого тела и жидкости в его полости равен:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}^* + \mathbf{R}\,,$$

где вектор $\mathbf{R}$ представляет собой линейную функцию главных циркуляций и является постоянным в связанной системе координат.

Уравнение движения системы относительно центра масс в векторном выражении имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}^*) + \omega \times (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}^* + \mathbf{R}) = \mathbf{L}\,.$$

Такой же вид имеет уравнение движения системы около неподвижной точки. Если оси абсолютной системы координат направить по главным осям эллипсоида

$\mathbf{r}(\theta^* + \theta^{(1)})\mathbf{r} = \mathbf{1}$, то векторное уравнение (1) в проекциях на оси жёстко связанной с телом системы координат даёт следующие три скалярных обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr + R_3 q - R_2 r = L; \\ B\dot{q} + (A - C)pr + R_1 r - R_3 p = M; \\ C\dot{r} + (B - A)pq + R_2 p - R_1 q = N. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь *A, B, C* – главные моменты преобразованного тела для точки *O*, равные суммам моментов инерции твёрдого тела и эквивалентного тела, относительно соответствующих осей координат, направленных по главным осям эллипсоида инерции для точки *O*; *L, M, N* – проекции внешнего момента на связанные оси координат; *p, q, r* – проекции вектора мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной системы координат; R_1, R_2, R_3 – проекции вектора **R** момента количества циклического движения жидкости, которые определяются для всех кольцевидных полостей в форме тел вращения вокруг оси x_3 через потенциал циклического движения жидкости [1]:

$$R_1 = R_2 = 0,\ R_3 = \frac{M_2 \chi}{2\pi}, \quad (3)$$

где M_2 – масса жидкости, χ – циркуляция жидкости.

Таким образом, полная математическая модель, позволяющая получить зависимости параметров движения от времени, состоит из системы (2) и любых кинематических уравнений, например, кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi; \\ q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi; \\ r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad (4)$$

где ψ, θ, φ – углы Эйлера. Одним из вариантов исследования движения системы является получение решения системы дифференциальных уравнений (2), (4) в углах Эйлера. Нелинейность уравнений (4) не позволяет получить зависимости углов от времени в аналитическом виде. На рис. 1, 3, 5 представлены зависимости углов Эйлера от времени, полученные в результате численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2), (4). На рис. 2, 4, 6 для анализа влияния жидкости на движение вокруг центра масс показаны те же углы, полученные аналогичным образом, но для тела без жидкости.

Решения, полученные в результате численного интегрирования, полезны для определения характера движения и его параметров для определённого набора начальных условий и характеристик системы. Проведение по ним качественного анализа движения и выявление влияния различных параметров системы затруднительно и требует больших затрат времени и ресурсов. Удобнее проводить анализ по аналитическим зависимостям.

2. Получение аналитических зависимостей параметров движения от времени

Для решения поставленной задачи введём следующие допущения, характерные для РБ и позволяющие упростить решение динамических уравнений.

1. Будем считать, что движение происходит под действием только тяги маршевых двигательных установок, которая не создаёт момента относительно центра масс. Тогда проекции внешнего момента на оси связной системы координат равны нулю:

$$N = M = L = 0.$$

2. В качестве топливных баков используются баки тороидальной формы, т.е. для них проекции момента циклического движения жидкости на оси связной системы координат имеют вид (3).

3. РБ является динамически симметричным:

$$A = B \neq C.$$

4. Топливный бак расположен перпендикулярно продольной оси симметрии РБ.

Перепишем систему (2) с учётом введённых допущений:

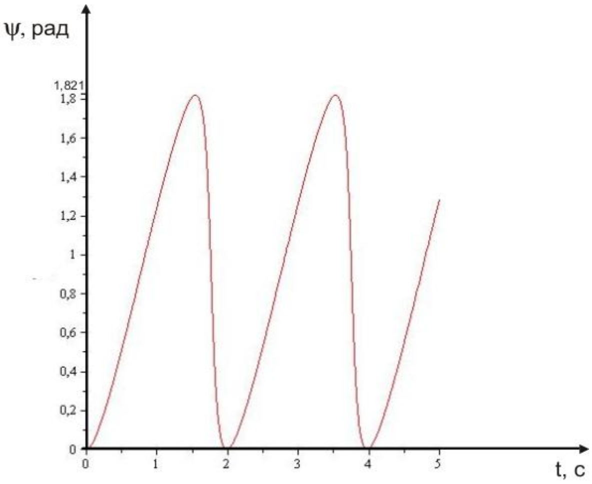

Рис. 1. Зависимость угла прецессии от времени для тела с жидкостью

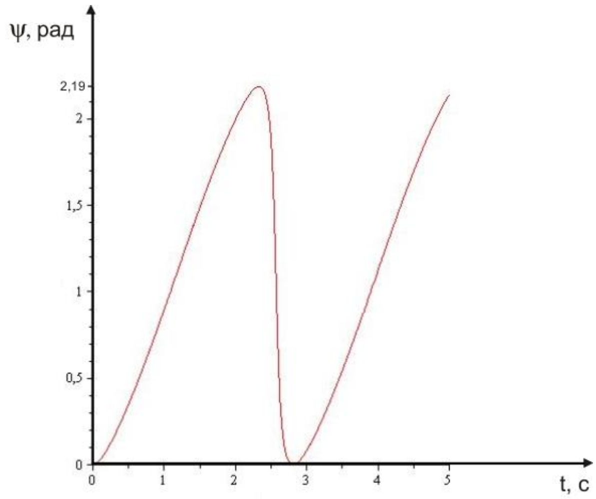

Рис. 2. Зависимость угла прецессии от времени для тела без жидкости

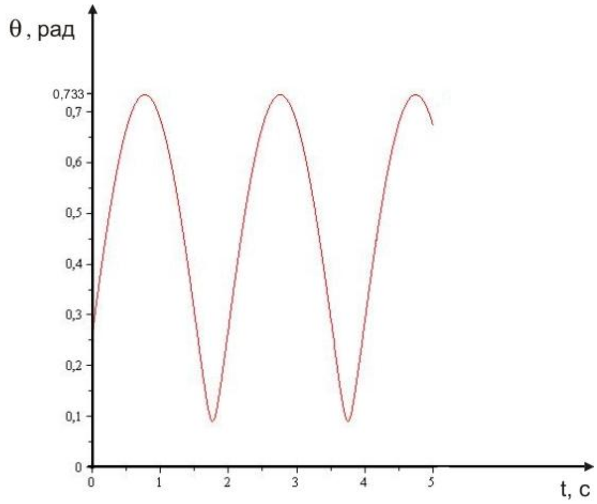

Рис. 3. Зависимость угла нутации от времени для тела с жидкостью

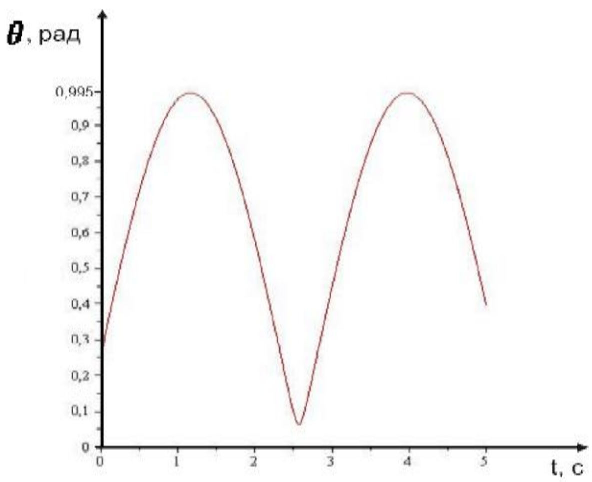

Рис. 4. Зависимость угла нутации от времени для тела без жидкости

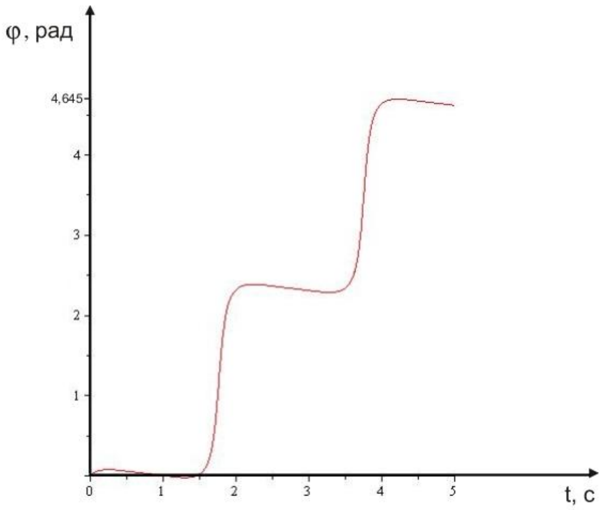

Рис. 5. Зависимость угла собственного вращения от времени для тела с жидкостью

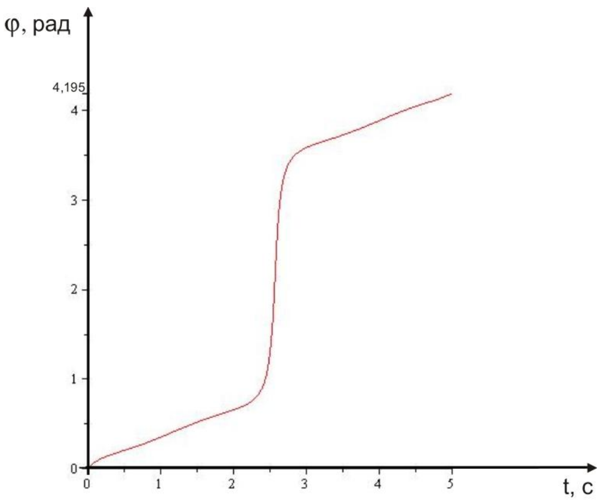

Рис. 6. Зависимость угла собственного вращения от времени для тела без жидкости

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr + R_3 q = 0; \\ B\dot{q} + (A-C)pr - R_3 p = 0; \\ C\dot{r} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из (5) получим аналитические зависимости от времени проекций вектора угловой скорости на оси связанной системы координат:

$$\begin{cases} p(t) = p_0 \cos kt - q_0 \sin kt; \\ q(t) = p_0 \sin kt + q_0 \cos kt; \\ r(t) = r_0, \end{cases} \quad (6)$$

где p_0, q_0, r_0 - начальные условия,

$k = \dfrac{1}{A}[r_0(C-A) + R_3]$ - циклическая частота.

Система (5) является аналитическим решением динамических уравнений, по которым можно анализировать изменение проекций угловой скорости на оси связанной системы координат. Подставляя данное решение в кинематические уравнения, решим задачу Дарбу, состоящую в определении параметров ориентации по известным угловым скоростям.

Для определения ориентации РБ будем использовать параметры Кэли-Клейна, в которых кинематические уравнения запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = \dfrac{r}{2}\alpha I + \dfrac{I}{2}(p - qI)\beta; \\ \dot{\beta} = -\dfrac{r}{2}\beta I + \dfrac{I}{2}(p + qI)\alpha; \\ \dot{\gamma} = \dfrac{r}{2}\gamma I + \dfrac{I}{2}(p - qI)\delta; \\ \dot{\delta} = -\dfrac{r}{2}\delta I + \dfrac{I}{2}(p + qI)\gamma. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя в систему дифференциальных уравнений первого порядка (7) аналитические выражения для угловых скоростей (6) и решая задачу Коши для этой системы с начальными условиями α_0, β_0, γ_0, δ_0, после введения замены

$$\mu = \sqrt{-k^2 - r_0^2 - 2kr_0 - q_0^2 - p_0^2}$$

получим следующие аналитические выражения для параметров Кэли-Клейна:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= A_0 e^{-\frac{1}{2}(Ik-\mu)t} - B_0 e^{-\frac{1}{2}(Ik+\mu)t}; \\ \beta(t) &= \frac{C_0 e^{-\frac{1}{2}(Ik+\mu)t} + D_0 e^{-\frac{1}{2}(Ik-\mu)t}}{(-p_0 + Iq_0)e^{-Ikt}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где константы μ, A_0, B_0, C_0, D_0 определяются из начальных условий системы.

Аналитические зависимости для *δ(t), γ(t)* являются комплексным сопряжением *α(t), β(t)* и, наоборот, с точностью до знака [4]:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= -\overline{\beta}(t); \\ \delta(t) &= \overline{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Для определения ориентации РБ в традиционных углах Эйлера необходимо воспользоваться их связью с параметрами Кэли-Клейна [5]:

$$\begin{cases} \theta = \arccos(\alpha\delta + \beta\gamma); \\ \varphi = \dfrac{1}{2}\arccos\left(\mathrm{Re}\left(\dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}\right)\right); \\ \psi = \dfrac{1}{2}\arccos\left(\mathrm{Re}\left(\dfrac{\alpha\beta}{\gamma\delta}\right)\right). \end{cases} \quad (9)$$

Графическое представление решения (9) полностью совпадает с графиками на рис. 1, 3, 5, что подтверждает адекватность полученных зависимостей.

Таким образом, получены аналитические зависимости углов Эйлера от времени, которые определить из кинематических соотношений Эйлера весьма сложно, а в некоторых случаях и невозможно. С помощью полученных соотношений (9) можно анализировать влияние параметров системы, в том числе и жидкости, на угловое движение РБ.

3. Предельные случаи ориентации в углах Эйлера

Как известно, при θ=0 или $\theta=\pi$ углы ψ, φ не определены, а определена только их сумма $\psi+\varphi$. Эта особенность углов Эйлера делает их малопригодными для исследования движения вблизи указанных значений угла нутации. В этом случае необходимо использовать другие углы. Однако, если использовать решение (9), полученное выше, то эта проблема устраняется. Например, численное решение для нулевого начального угла нутации получить невозможно из-за возникновения деления на ноль в кинематических уравнениях Эйлера. График зависимости угла нутации от времени, полученной при начальных условиях $\theta(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$, приведён на рисунке 7.

Заключение

На основании работ Н. Е. Жуковского построена математическая модель движения вокруг центра масс осесимметричного РБ с тороидальным баком, заполненным жидким топливом. Для анализа влияния топлива на движение системы проведено численное интегрирование уравнений движения. Для исследования предельных случаев движения в углах Эйлера и качественной оценки влияния параметров системы на её движение с помощью параметров Кэли-Клейна построено аналитическое решение уравнений движения.

Данная статья написана по результатам проведения поисковой научно-исследовательской работы в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

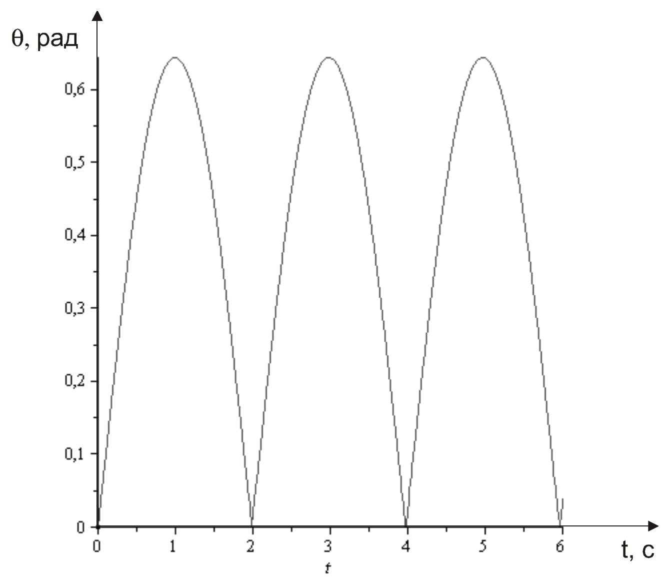

Рис. 7. График зависимости угла нутации от времени в предельном случае

Библиографический список

1. Жуковский, Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью [Текст] / Н. Е. Жуковский. - М.: Гостехиздат, 1949.- 766 с.

2. Моисеев, Н. Н., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость [Текст] / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. - М.: Наука, 1965. - 439 с.

3. Алексеев, А. В. Приведение спутника-гиростата с полостью с жидкостью к системам твердых тел с вязким трением [Текст] / А. В. Алексеев, А. В. Дорошин // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». - 2007. - № 9. - С. 26-33.

4. Лурье, А. И. Аналитическая механика [Текст] / А. И. Лурье. - М.:ГИФМЛ, 1961.- 825 с.

5. Голдстейн, Г. Классическая механика: пер. с англ., 2 изд.[Текст] / Г. Голдстейн. - М., 1975. - 413 с.

MOTION OF AN UPPER STAGE ROCKET WITH A TOROIDAL TANK AROUND THE MASS CENTER IN PARAMETERS OF CAYLEY-KLEIN

© 2011 A. V. Alekseev, V. S. Krasnikov

Samara State Aerospace University
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

The paper presents a mathematical model of motion of an upper-stage rocket with a toroidal tank filled with liquid fuel around the centre of mass. Time dependencies of motion parameters are established using a numerical and an analytical method. Limiting cases of orientation in Eulerian angles are analyzed.

Eulerian angles, upper-stage rocket, kinematic equations, Cayley-Klein parameters.

Информация об авторах

Алексеев Алексей Владимирович, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: alexeeff05@mail.ru. Область научных интересов: динамика систем твёрдых тел, динамика систем переменного состава, движение твёрдых тел с жидкостью.

Красников Виктор Сергеевич, магистрант, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: walkthrough@mail.ru. Область научных интересов: движение твёрдых тел с жидкостью.

Alekseev Aleksey Vladimirovich, candidate of technical sciences, associate professor, Samara State Aerospace University, e-mail: alexeeff05@mail.ru. Area of research: dynamics of rigid bodies, dynamics of variable composition systems, motion of tanks with liquids.

Krasnikov Victor Sergeevich, student of Samara State Aerospace University, e-mail: walkthrough@mail.ru. Area of research: motion of tanks with liquids.