УДК 534.1+004.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЛЕНТЫ В СТРИМЕРАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕКОСА И НЕРАВНОМЕРНОСТИ СКОРОСТИ ЕЁ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ

© 2011 В. Е. Лялин, В. П. Тарануха

Ижевский государственный технический университет

Получено решение двумерной граничной задачи колебания магнитной ленты без учёта ее массы. В отличие от ранее используемых управлений учтены скорость протягивания магнитной ленты и ее проскальзывание при входе на свободный участок.

Перекос ленты, стримеры, механизм транспортирования ленты.

Увеличение продольной и поперечной плотности записи информации на магнитной ленте (МЛ) требует существенного улучшения динамических характеристик механизмов транспортирования ленты (МТЛ), применяемых в ленточных накопителях информации (стримерах). Многочисленными исследованиями установлены закономерности образования временных искажений информации по одной дорожке, когда МЛ рассматривается как упругая нить. Модель МЛ в виде двумерной среды позволяет описать другой вид искажений – динамические перекосы, т.е. временные рассогласования между различными дорожками, что особенно важно для стримеров с широкими МЛ (8 мм и более). Теоретическое исследование упругих деформаций, приводящих к перекосам, приведено в работах [1, 2], ряд работ посвящён экспериментальным исследованиям. Однако применение полученных в [1, 2] результатов на практике затруднено неадекватностью граничных условий, т.к. реально в точках контакта МЛ с ведущими валами задаются линейные скорости, а не напряжения, как указано в работах [1, 2]. В работе [3] представлено уточнение волновых свойств МЛ с учётом ее ширины, хотя поправки, получаемые с учётом инерциальных свойств МЛ, в целом незначительны и ими на практике пренебрегают. Поэтому в настоящей работе приводится решение задачи о плоском напряжённом состоянии МЛ, на двух краях которой заданы скорости перемещения, а два других свободны.

Как показано в работе [4], плоская задача движения МЛ между двумя вращающимися с заданной скоростью валами имеет вид

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U_x}{\partial x\partial y}+b\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}=0,\\&\frac{\partial^2 U_y}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}=0,\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}&V_x(-l,y,t)-V_0\Theta(-l,y,t)=\bar{V}_x(y,t)-V_0\bar{\Theta}(y,t),\\&V_y(-l,y,t)=\bar{V}_y(y,t),\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

$$\left.\begin{aligned}&V_x(l,y,t)=\bar{\bar{V}}_x(y,t),\\&V_y(l,y,t)=\bar{\bar{V}}_y(y,t),\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{yy}(x,y,t)=0\\&\sigma_{xy}(x,y,t)=0,\end{aligned}\right\}\ \text{при}\quad \begin{aligned}&y=0,\\&y=H,\end{aligned}$$

где $U_x=U_x(x,y,t)$, $U_y=U_y(x,y,t)$ – перемещения, V_x, V_y – абсолютные скорости, Θ – относительная объёмная деформация МЛ в неподвижной системе координат, σ_{yy}, σ_{xy} – напряжения, λ, μ – коэффициенты Ляме, V_0 – скорость перемещения МЛ (номинальная), $2l$, H – геометрические размеры отрезка МЛ, $\bar{V}_x$, $\bar{\bar{V}}_x$, $\bar{V}_y$, $\bar{\bar{V}}_y$, $\bar{\Theta}$ – заданные на границах абсолютные скорости и относительная объёмная деформация,

$a=4(\lambda+\mu)(3\lambda+2\mu)^{-1}$,

$b=(\lambda+2\mu)(3\lambda+2\mu)^{-1}$ (рис. 1).

Выражая напряжения, абсолютные скорости, относительную объёмную деформацию через перемещения

$$\left.\begin{aligned}
&V_x = \frac{\partial U_x}{\partial t} + V_0 \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial U_y}{\partial t} + V_0 \frac{\partial U_y}{\partial x},\\
&\Theta = 2\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y}\right),\\
&\sigma_{yy} = 2(\lambda+\mu)\frac{\partial U_y}{\partial y} + \lambda\frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и исключив из (1) одну из неизвестных функций, например U_x, получим

$$U_x(x,y,t) = -a\int\frac{\partial U_y}{\partial y}dx - b\int\frac{\partial U_y}{\partial x}dy - f_x(x,t) - f_y(y,t) - f_t(t), \tag{6}$$

где f_x, f_y, f_t – неизвестные функции – постоянные интегрирования.

Таким образом, краевая смешанная задача (1)…(4) принимает вид

$$\frac{\partial^4 U_y}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 U_y}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U_y}{\partial y^4} = 0\,. \tag{7}$$

При $x = -l$:

$$\left.\begin{aligned}
&b\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)\right]dy + a\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)\right]dx +\\
&+\frac{\partial f_x}{\partial t} + \alpha_1\frac{\partial f_x}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial t} + \frac{\partial f_t}{\partial t} = -(\bar{V}_x - V_0\bar{\Theta}),\\
&\frac{\partial U_y}{\partial t} + V_0\frac{\partial U_y}{\partial x} = \bar{V}_y,
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

при $x = l$:

$$\left.\begin{aligned}
&b\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + V_0\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)\right]dy + a\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + V_0\frac{\partial U_y}{\partial x}\right)\right]dx +\\
&+\frac{\partial f_x}{\partial t} + V_0\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial t} + \frac{\partial f_t}{\partial t} = -\bar{\bar{V}}_x,\\
&\frac{\partial U_y}{\partial t} + V_0\frac{\partial U_y}{\partial x} = \bar{\bar{V}}_y,
\end{aligned}\right\}$$

при $y = 0$,
$y = H$:

$$\left.\begin{aligned}
&(a-\gamma)\frac{\partial U_y}{\partial y} + b\int\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}dy + \frac{\partial f_x}{\partial x} = 0,\\
&(b-1)\frac{\partial U_y}{\partial x} + a\int\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}dx + \frac{\partial f_y}{\partial y} = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $\alpha_1 = V_0\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}$, $\alpha_2 = 2V_0\mu(\lambda+2\mu)^{-1}$, $\gamma = (\lambda+2\mu)\lambda^{-1}$.

Используя методы разложения неизвестных и заданных функций в ряды Фурье на отрезке $y \in [0, H]$ и удовлетворяя условиям (8), (9), ищем решение задачи в виде монохроматических колебаний с произвольной частотой ω_0:

$$\left.\begin{aligned}
&U_y(x,y,t) = e^{i\omega_0 t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}U_{yk}(x)\sin\lambda_k y + \bar{U}_y(x,y)\delta(y) + \bar{U}_y(x,y)\delta(y-H)\right],\\
&f_x(x,t) = e^{i\omega_0 t}\bar{f}_x(x),\\
&f_y(y,t) = e^{i\omega_0 t}\left(f_{y0} + \sum_{k=1}^{\infty}f_{yk}\cos\lambda_k y\right),\\
&f_t(t) = A_t e^{i\omega_0 t},
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

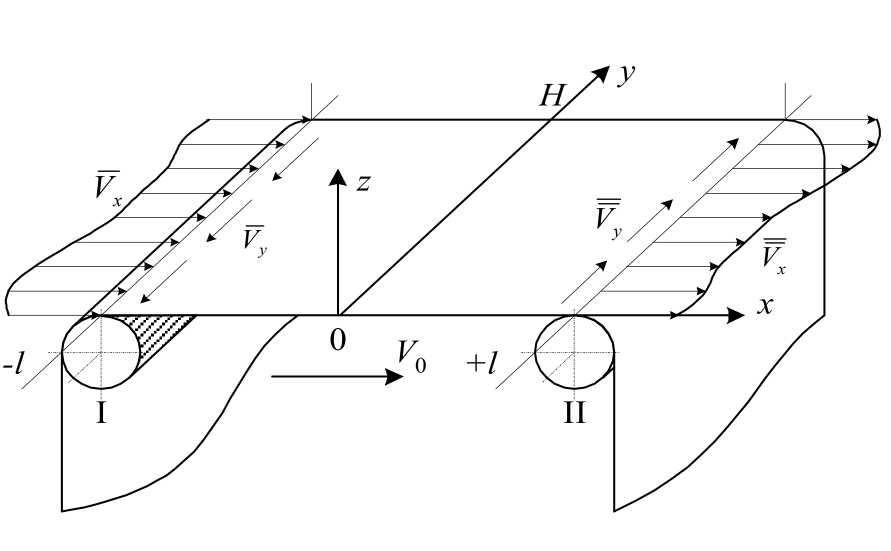

Рис. 1. Система координат и граничные условия

где $\lambda_k = k\pi H^{-1}$, $i = \sqrt{-1}$, f_{y0}, f_{yk}, U_{yk}, $\bar{U}_y$, $\bar{f}_x$, A_t – комплексные величины и функции, подлежащие определению. Введение $\delta-$ функций Дирака в выражения (10) связано с устранением разрывов функций $\bar{V}_y$, $\bar{\bar{V}}_y$ в угловых точках при разложении их в ряды Фурье по нечётным функциям. Уравнение (7) будет удовлетворено, если

$$U_{yk}(x) = c_{1k}\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x + c_{2k}\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x + c_{3k} x\,\mathrm{sh}\,\lambda_k x + c_{4k} x\,\mathrm{ch}\,\lambda_k x, \tag{11}$$

где c_{jk} $(j = 1,...,4)$ – неизвестные постоянные. Подставляя выражения (10), (11) в (7)…(9) и решая уравнения без учета слагаемых, содержащих δ-функции, получим

$$\left.\begin{aligned} &\bar{f}_x(x) = \sum_{k=\text{четн}}^{\infty} b\lambda_k^{-1}\frac{\partial U_{yk}}{\partial x} + (\gamma - a)\lambda_k \int U_{yk}\,dx, \\ &f_{y0} = \bar{\bar{V}}_k \omega_0^{-1} i - \bar{f}_x(l) + Ri\left.\frac{\partial \bar{f}_x(x)}{\partial x}\right|_{x=l}, \quad f_{yk} = \bar{\bar{V}}_{xk}\omega_0^{-1} i, \quad A_t = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Неизвестные постоянные c_{jk}, входящие в выражение (11), определяем из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{vmatrix} (-h_1 th\lambda_k l + h_2) & (h_1 - h_2 th\lambda_k l) & (h_3 th\lambda_k l - h_4) & (-h_3 + h_4 th\lambda_k l) \\ (h_1 - h_2 th\lambda_k l) & (-h_1 th\lambda_k l + h_2) & (h_5 th\lambda_k l - h_1 l) & (-h_5 + h_1 l th\lambda_k l) \\ (h_1 + h_2 th\lambda_k l) & (h_1 th\lambda_k l + h_2) & (h_6 th\lambda_k l + h_1 l) & (h_6 + h_1 l th\lambda_k l) \\ (h_7 th\lambda_k l) & (h_8 th\lambda_k l + h_9) & (h_{10} th\lambda_k l + h_{11}) & (h_{12} th\lambda_k l + h_7 l) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ c_{3k} \\ c_{4k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{\bar{V}}_x - \bar{V}_x + V_0\bar{\Theta}}{\mathrm{ch}\,\lambda_k e} \\ \bar{V}_{yk}\,\mathrm{ch}^{-1}\lambda_k e \\ \bar{\bar{V}}_{yk}\,\mathrm{ch}^{-1}\lambda_k e \\ \dfrac{\bar{V}_x - \bar{\bar{V}}_x - V_1\bar{\Theta}}{\mathrm{ch}\,\lambda_n e} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

где R – радиус вала,

$h_1 = V_0\lambda_k$; $h_2 = \omega_0 i$; $h_3 = \omega_0\lambda_k^{-1}(a+b)i + V_0 l\lambda_k$;

$h_4 = 2b\alpha_1 + \omega_0 li$; $h_5 = \omega_0 li - V_0$; $h_6 = V_0 + h_2 l$;

$h_7 = (\gamma - 1)(V_0 + \alpha_1)\lambda_k$; $h_8 = 2(\gamma - 1)h_2$;

$h_9 = \lambda_k(\gamma - 1)(V_0 - \alpha_1)$;

$h_{10} = 2h_2(a + b - \gamma)\lambda_k^{-1} + h_9 l$;

$h_{11} = 2b(V_0 - \alpha_1) + h_8 l$, $h_{12} = 2b(V_0 + \alpha_1)$.

Откуда находим

$$c_{jk} = (L_{jk}^D\,\mathrm{ch}^{-1}\lambda_k l) + (L_{jk}^M\,\mathrm{ch}^{-1}\lambda_k l)i,$$

где $L_{jk}^D = L_{jk}^D(\bar{V}_{xk}, \bar{\bar{V}}_{xk}, \bar{V}_{yk}, \bar{\bar{V}}_{yk}, \bar{V}_{x0}, \bar{\bar{V}}_{x0})$;

$L_{jk}^M = L_{jk}^M(\bar{V}_{xk}, \bar{\bar{V}}_{xk}, \bar{V}_{yk}, \bar{\bar{V}}_{yk}, \bar{V}_{x0}, \bar{\bar{V}}_{x0})$.

Аналитические выражения коэффициентов L_{jk}^D, L_{jk}^M не приводятся ввиду их громоздкости.

Функции $\bar{U}_y(x,y)\delta(y)$, $\bar{U}_y(x,y)\delta(y-H)$ для упрощения решения задачи определяются приближённо. Введем функцию

$$\tilde{U}_y(x,y) = \sum_k U_{yk}(x)\sin\lambda_k y$$

и, выбирая малое значение $\varepsilon > 0$, определим касательные к $\tilde{U}_y$ в точках $y = 0 + \varepsilon$, $y = H - \varepsilon$ (рис. 2).

Значения касательных в точках $y = 0$, $y = H$ примем за приближённые значения функций $\bar{U}_y(x,y)\delta(y)$ и $\bar{U}_y(x,y)\delta(y-H)$ соответственно. Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\bar{U}_y(x,y)\delta(y) \approx \\ &\approx \sum_k U_{yk}(x)\sqrt{1+\lambda_k^2\varepsilon^2}\,\sin(\lambda_k\varepsilon - \mathrm{arctg}\,\lambda_k\varepsilon)\delta(y), \\ &\bar{U}_y(x,y)\delta(y-H) \approx \\ &\approx \sum_k U_{yk}(x)\sqrt{1+\lambda_k^2\varepsilon^2}\,\sin(\lambda_k(H-\varepsilon) + \mathrm{arctg}\,\lambda_k\varepsilon)\delta(y-H), \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &U_x(x,y,t) = \sum_k \Big\{\Big[\big[B_{1k}\sin(\omega_0 t + \varphi_{1k}) + \\ &+ F_{2k}(x)\sin(\omega_0 t + \varphi_{2k}(x))\big]\cos\lambda_k y + \\ &+ F_{3k}(x)\sin(\omega_0 t + \varphi_{3k}(x))\Big] + F_{5k}(x)\sin(\omega_0 t - \varphi_{5k})\Big\}, \\ &U_y(x,y,t) = \sum_k \Big\{\Big[\sin\lambda_k y + \sqrt{1+\lambda_k^2\varepsilon^2}\,\big[\sin(\lambda_k\varepsilon - \mathrm{arctg}\,\lambda_k\varepsilon)\delta(y) + \\ &+ \sin(\lambda_k(H-\varepsilon) + \mathrm{arctg}\,\lambda_k\varepsilon)\delta(y-H)\big]\Big] + \\ &+ F_{4k}(x)\sin(\omega_0 t + \varphi_{4k}(x))\Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Входящие в (14) величины B_{1k}, φ_{1k}, F_{5k}, φ_{5k} и функции переменной величины x F_{2k}, φ_{2k}, F_{3k}, φ_{3k}, F_{4k}, φ_{4k}, выраженные через известные параметры задачи и постоянные c_{jk}, не приводятся ввиду громоздкости выражений.

Так как оси вращения валов не совпадают с их геометрическими осями центров, законы изменения линейных скоростей на границах МЛ имеют вид:

$$\begin{aligned} &V_x(y,t) = V_0[1 + \varepsilon_j(y)R^{-1}\cos(\omega_0 t + \varphi_j(y))], \\ &V_y(y,t) = R\omega_0\sqrt{a_j(a_j + H^2)^{-1}}\cos(\omega_0 t), \end{aligned} \tag{15}$$

где $j = 1, 2$ – номер вала;

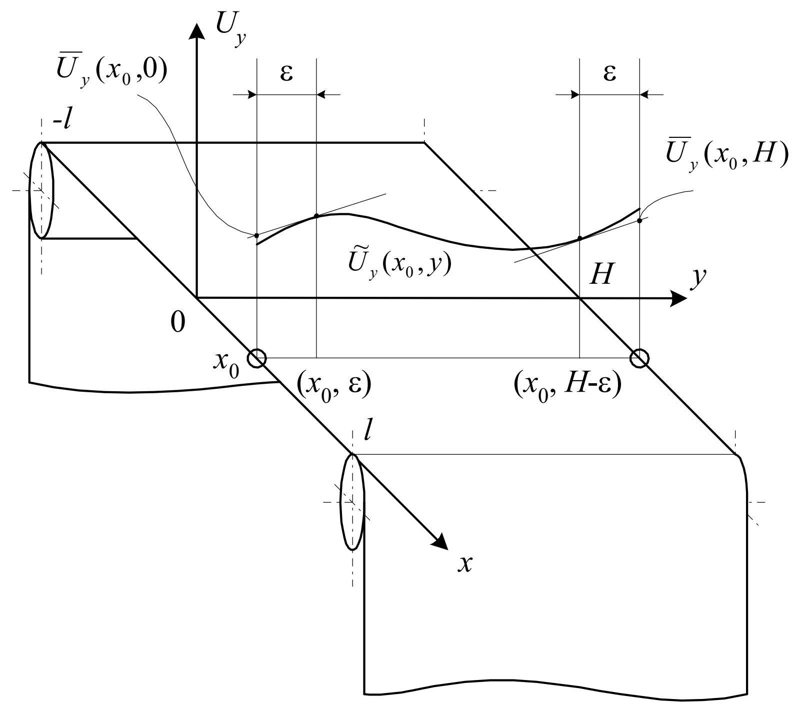

Рис. 2. Приближённое определение функций $\overline{U}_y$ на границах y=0, y=H

$a_j = \varepsilon_{jH}^2 + \varepsilon_{jk}^2 - 2\varepsilon_{jH}\varepsilon_{jk}\cos\varphi_{jk}$, $\varepsilon_j(y)$, $\varphi_j(y)$ – изменение эксцентриситета и угла его поворота вдоль оси y; ε_{jH}, ε_{jk}, φ_{jk} – начальное и конечное значения эксцентриситета и угла поворота. Считая, что изменение относительной деформации в зоне проскальзывания первого вала целиком зависит от относительного удлинения МЛ в направлении оси y, прием

$$\Theta(y,t) = 2\mu(\lambda+2\mu)^{-1}\varepsilon_1(y)(2l)^{-1}\sin(\omega_0 t + \varphi_1(y)). \qquad (16)$$

В дальнейшем, для примера, не учитывая движения МЛ вдоль оси и принимая $\varepsilon_2(y) = \varepsilon_{2H} - (\varepsilon_{2H} - \varepsilon_{2k})H^{-1}y$, $\varepsilon_1(y) = \varepsilon_0$, получим граничные условия (2)–(3) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&V_x(-l,y,t) - V_0\Theta(-l,y,t) = \\
&= V_0\left[1+\varepsilon_0 R^{-1}\cos\left(\omega_0 t + \varphi_1(y)\right)\right] - \\
&- V_0\mu\varepsilon_0 l^{-1}(\lambda+2\mu)^{-1}\sin\left(\omega_0 t+\varphi_1(y)\right), \\
&U_y(-l,y,t) = 0, \\
&V_x(l,y,t) = \\
&= V_0\left[1+\left(\varepsilon_{2H} - (\varepsilon_{2H}-\varepsilon_{2k})H^{-1}y\right)R^{-1}\cos\left(\omega_0 t+\varphi_2(y)\right)\right], \\
&U_y(l,y,t) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Результаты расчётов, выполненных на компьютере, при значениях
$\varphi_1(y) = \pi y(2H)^{-1}$, $\varphi_2(y) = \pi y(3H)^{-1}$,
$R_1 = R_2 = 13\cdot 10^{-3}$ м, $V_0 = 0{,}76$ м$\cdot$с$^{-1}$,
$H = 25\cdot 10^{-3}$ м, $l = 0{,}25$ м, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{2H} = 10^{-5}$ м,
$\varepsilon_{2k} = 5\cdot 10^{-6}$ м, $\lambda = 2596{,}153\cdot 10^{-6}$ Нм$^{-2}$,
$\mu = 1730{,}769\cdot 10^{-6}$ Нм$^{-2}$
приведены на рис. 3, 4, 5. Найденные значения U_x в зависимости от y фактически дают значения амплитуд и фаз перекосов, выраженных в линейных единицах. Нормируя U_x средней скоростью V_0, легко перейти к временным единицам, более привычным в инженерных расчётах.

Анализ результатов расчётов позволяет сделать следующие выводы:

1. При значениях параметров, близких к реальным, разложения решений в ряды Фурье сходятся достаточно быстро.

2. Зависимость распределения амплитуд перекосов по ширине МЛ мало отличается от линейной при отсутствии смещений по оси y.

3. Влияние граничных условий на входе и выходе рассматриваемого участка МЛ не

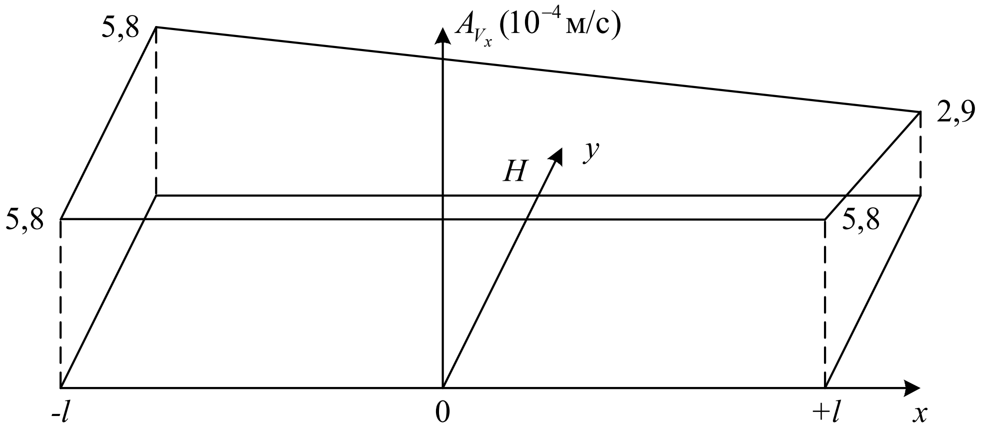

Рис. 3. Изменение амплитуды скорости V_x *около номинальной* V_0

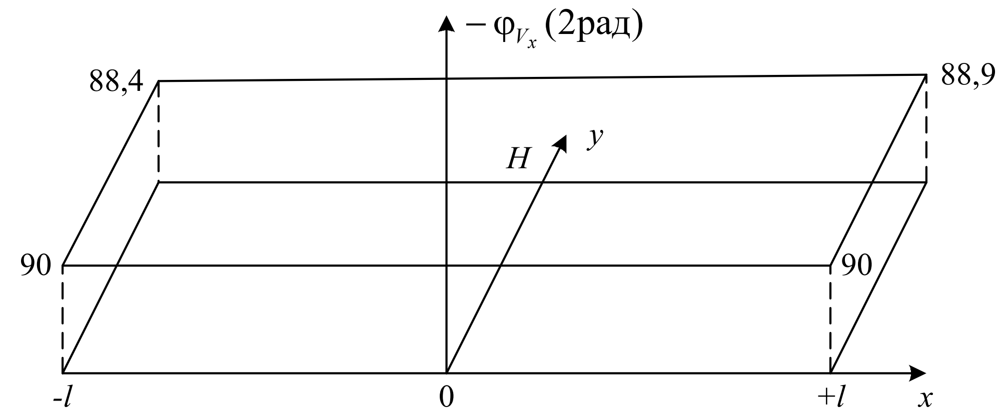

Рис. 4. Изменение фазы скорости V_x

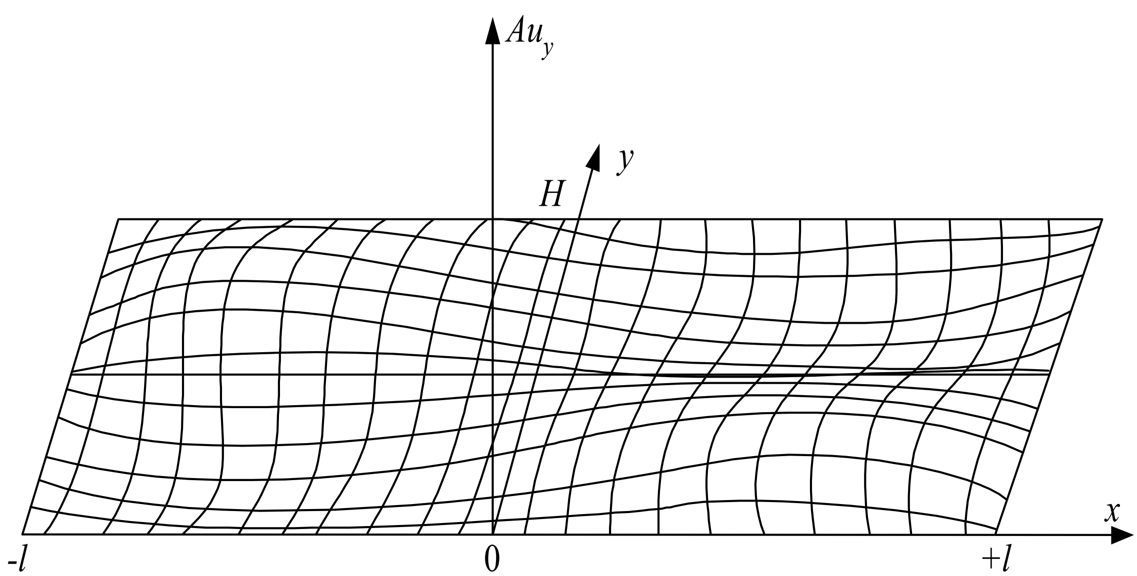

Рис. 5. Изменение амплитуды перемещений V_y $(\max|Au_y| = 3,8\cdot 10^{-4}$ м)

одинаково и совпадает при равной нулю номинальной скорости протягивания МЛ.

4. Полученные результаты дают основание для применения к данному типу задач приближённых методов, основанных на разложениях по системам ортогональных функций (проекционные методы).

Библиографический список

1. Варнаускас, П. А. Методы и средства экспериментальных исследований динамики прецизионных лентопротяжных механизмов [Текст] / П. А. Варнаускас, А. И. Куртинайтис, К. М. Рагульскис. – Вильнюс: Москалас, 1982. – 104 с.

2. Рагульскис, К. М.. Динамика прецизионных лентопротяжных механизмов [Текст] / К. М. Рагульскис, Е. В. Лялин, П. А. Варнаускас и др. – Вильнюс: Мокслас, 1984.– 171 с.

3. Норенков, И. П. Телекоммуникационные технологии и сети [Текст] / И. П. Норенков, В. А. Трудоношин. – М.: Изд–во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2000. – 248 с.

4. Захаров, В. Г. Уточненная динамическая модель пространственных колебаний магнитных лент [Текст] / В. Г. Захаров, С. П. Севенко. – Техника средств связи. Серия «Общетехническая», 1982.- № 2 (14). – С. 39–43.

MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF THE TAPE IN STREAMERS IN THE PRESENCE OF THE WARP AND NON-UNIFORMITY OF SPEED OF ITS TRANSPORTATION

© 2011 V. E. Ljalin, V. P. Taranuha

Izhevsk state technical university

Obtained a solution for two-dimensional boundary task of magnetic tape oscillations without considering its mass. In contrast to the previously used controls, the speed of tape pulling and its slip at the entrance to a free area are taken into account.

A tape warp, streamers, the mechanism of tape transportation.

Информация об авторах

Лялин Вадим Евгеньевич, заведующий кафедрой, д.т.н., д.э.н., профессор, интеллектуальные информационные технологии, Ижевский государственный технический университет. E-mail: velyalin@mail.ru. Область научных интересов: информационно–телекоммуникациионные системы.

Тарануха Владимир Прокофьевич, заведующий кафедрой, к.т.н., доцент, конструирование радиоэлектронной аппаратуры, Ижевский государственный технический университет. E-mail: velyalin@mail.ru. Область научных интересов: системы и устройства хранения данных.

Lyalin Vadim Evgenievich, head of department, professor, PhD, intelligent information technology, Izhevsk State Technical University. E-mail: velyalin@mail.ru. Research interests: information and telecommunications systems.

Taranukha Vladimir Prokof'evich, head of departmen, Ph.D., associate professor, design of electronic equipment, Izhevsk State Technical University. E-mail: velyalin@mail.ru. Research interests: systems and storage devices.