

УДК 629.7.01:536

## АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2015 В. И. Азаренков

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»  
г. Харьков, Украина

Проблема анализа температурных полей элементов конструкций летательных аппаратов является центральной для обеспечения эксплуатационной надежности последних. В работе изложены результаты разработки методов расчёта температурных полей проектируемых и действующих изделий, основанные на аналитическом решении уравнения теплопроводности для основных форм конструкций. Методом разделения переменных получено решение уравнения теплопроводности для параллелепипеда и цилиндра с источниками теплоты аналогичной формы. Получено общее выражение решения уравнения теплопроводности для тел простейшей формы (параллелепипед, цилиндр и его сегмент, шар и его сегмент) с объёмным, плоским, линейным или точечным источниками тепла. Предложена математическая модель для анализа тепловых полей элементов конструкций летательных аппаратов. Разработаны математическая и тепловая модели для анализа температурных полей бортовой радиоэлектронной аппаратуры.

*Анализ температурных полей, решение уравнения теплопроводности, тепловая и математическая модели конструкции.*

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-4-102-109

На тепловой режим элементов конструкций летательных аппаратов (ЭКЛА) оказывают влияние геометрическая форма, физические и энергетические особенности конструкции изделия, условия эксплуатации ЭКЛА. В свою очередь, форма элементов конструкции играет роль при выборе метода теоретического исследования температурного поля. Наиболее простые решения получаются для конструкций простой формы: пластина, параллелепипед, цилиндр, шар. Подавляющее большинство ЭКЛА имеют форму прямоугольного параллелепипеда или близкую к ней. Цилиндрическая или сферическая формы изделий встречаются реже.

Будем иметь в виду, что форму ЭКЛА (а также и источников тепла) в тепловой модели для удобства расчётов можно изменять таким образом, чтобы деформация последних не повлияла на температурное поле. Это может быть осуществлено двумя способами – путём деформации формы конструкции при неизменном объёме или путём изменения объёма конструкции [1]. Поэтому расчёты можно значительно упростить, приводя

формы источников тепла и конструкции к наиболее простым. Кроме того, любое произвольное тело, ограниченное некоторой поверхностью, можно разбить для удобства расчётов на сегменты любой простой формы: параллелепипед, сегменты цилиндра и шара в зависимости от вида используемых координат. Все сегменты представляются отрезками, например, в декартовой системе координат – прямой одинаковой длины даже в том случае, когда в реальном твёрдом теле стороны ячеек не будут равны. «Важно лишь, чтобы сегменты имели те же тепловое сопротивление и теплоёмкость, что и криволинейные сегменты различной длины, которые они представляют. В этих случаях любое твёрдое тело с тремя измерениями можно представить состоящим из ячеек в форме параллелепипедов, твёрдое тело с двумя измерениями – в виде прямоугольной сетки и т. д. Сказанное относится к телу произвольной структуры и произвольной формы, поскольку это тело можно разделить на ортогональные ячейки бесконечным числом способов, придерживаясь силовых линий и изотерм поля...» [2].

Одним из основных элементов конструкций летательных аппаратов является радиоэлектронная аппаратура (РЭА). Прямоугольный параллелепипед – наиболее часто встречающаяся в практике форма как основной конструкции РЭА, так и отдельных её блоков, модулей и элементов. В этом случае источник тепла также имеет форму прямоугольного параллелепипеда (слово «прямоугольный» для удобства изложения условимся в дальнейшем опускать). На практике при проведении тепловых расчётов форму элементов конструкции, как было указано выше, при необходимости всегда возмож-

но формально преобразовать в нужную, например, в прямоугольный параллелепипед. В этом случае наиболее удобной для описания температурного поля является ортогональная система координат.

В рассматриваемой тепловой модели координата  $r_i$  определяется центром или полюсом источника тепла  $O$  (рис. 1), который представляет собой точку наибольшего разогрева последнего. Координаты полюса будут определены ниже и совпадают с геометрическим центром в случае одинакового теплообмена с противоположных граней нагретой зоны.

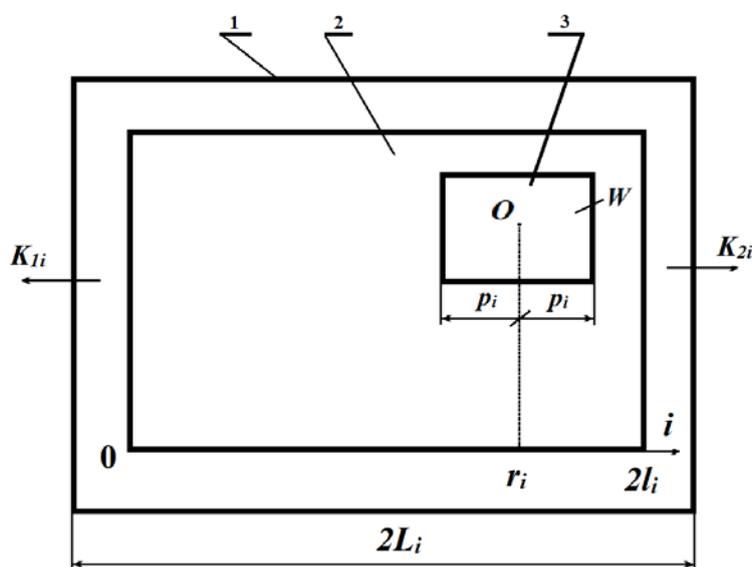


Рис. 1. Тепловая модель формы параллелепипеда с источником тепла:

1 – кожух; 2 – нагретая зона; 3 – источник тепла;  $i\{x, y, z\}$  – индексное обозначение координат,  $2L_i$ ,  $2l_i$  и  $2p_i$  – размеры кожуха, нагретой зоны и источника тепла вдоль  $i$ -й координаты;

$r_i$  – координата размещения источника тепла в нагретой зоне вдоль  $i$ -й координаты;

$K_{1i, 2i}$  – коэффициенты теплопередачи от нагретой зоны через кожух в окружающую среду вдоль  $i$ -й координаты;  $W = P / (2p_x 2p_y 2p_z)$  – удельная мощность рассеивания источника тепла;

$P$  – мощность источника тепла

Большинство конструктивных элементов РЭА, встречающихся на практике, имеют форму параллелепипеда: стойки, блоки, модули, платы, микросхемы. Стойки набираются из произвольно расположенных блоков с различной рассеиваемой мощностью.

Используем стандартные для такого класса задач допущения:

– удельная теплоёмкость  $C$  и плотность  $\gamma$  не зависят от координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и температуры перегрева  $\vartheta$  (разница между

температурой тела и температурой окружающей среды);

– внутри источника тепла коэффициент эффективной теплопроводности  $\lambda = \infty$ , т.е. температура на его поверхности и по объёму распределена равномерно, что соответствует техническим условиям на элементы, где задаётся средняя температура;

– в выбранных направлениях координат тело изотропно и имеет постоянные и не зависящие от температуры перегрева

Э значения коэффициентов теплопроводности  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ , которые в общем случае не равны друг другу.

Таким образом, общая постановка задачи является традиционной и сводится к решению следующего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{C\gamma} \left[ \lambda_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] + \frac{W}{C\gamma}$$

при нулевых начальных  $\vartheta(x, y, z, \tau=0)=0$  и граничных условиях третьего рода

$$\left. \begin{aligned} \left[ \lambda_i \frac{\partial \vartheta}{\partial i} - K_{1i} \vartheta \right]_{i=0} &= 0, \\ \left[ \lambda_i \frac{\partial \vartheta}{\partial i} - K_{2i} \vartheta \right]_{i=2l_i} &= 0, \end{aligned} \right\} i = x, y, z,$$

где  $\tau$  – время.

Используя замену независимых переменных, классические преобразования координат и функции температуры, в результате решения этого уравнения методом разделения переменных [3] после преобразования получаем выражение, позволяющее рассчитывать температурное поле в телах формы параллелепипеда с объёмным источником теплоты той же формы:

$$\vartheta(x, y, z, \tau) = \sum_{a_x=1}^{\infty} \sum_{a_y=1}^{\infty} \sum_{a_z=1}^{\infty} \frac{64WT_{a_i}(\tau)}{\sum_{i=x,y,z} \left( \frac{\mu_{a_i}}{2l_i} \right)^2 \lambda_i + q} \times \prod_{i=x,y,z} \frac{\sin \mu_{a_i} \frac{p_i}{2l_i} \cos \mu_{a_i} \left( \frac{i}{2l_i} - \frac{1}{m_i} \right) \cos \left( \frac{r_i}{2l_i} - \frac{1}{m_i} \right)}{\mu_{a_i} + \sin \mu_{a_i} \cos \mu_{a_i} \left( 1 - \frac{2}{m_i} \right)}, \quad (1)$$

где

$$T_{a_i}(\tau) = 1 - \exp \left( - \frac{\tau}{C\gamma} \left[ \sum_{j=x,y,z} \left( \frac{\mu_{a_j}}{2l_j} \right)^2 \lambda_j + q \right] \right) -$$

функция разогрева источника, и при стационарном режиме работы  $T_{a_i}(\tau)=1$ ;

$q$  – коэффициент температурной зависимости источников тепла;

$\mu$  – корни характеристического

уравнения:  $\text{ctg } \mu_x = \frac{\mu_x^2 - Bi_{1x} Bi_{2x}}{\mu_x (Bi_{1x} + Bi_{2x})}$ .

Если таких источников много (например,  $N$ ) и они температурнезависимы ( $q=0$ ), то по принципу суперпозиции полей можно записать

$$\vartheta(x, y, z) = \sum_{j=1}^N \vartheta_j(x, y, z),$$

где  $\vartheta_j(x, y, z)$  рассчитывается по (1).

Для температурозависимых источников тепла (на практике весьма редкий для РЭА случай, так как обычно по определению мощность элементов-источников не должна зависеть от температуры или зависимость выражена очень слабо) можно также найти картину температурного поля в нагретой зоне, применяя одновременно методы последовательных приближений и суперпозиции полей.

Для удобства и краткости записи в дальнейшем обозначим символом надчёркивания любую переменную, нормированную относительно значения  $2l$ , например:  $\frac{\mu_i}{2l_i} = \overline{\mu}_i$ . Используя (1), найдём решение для плоских, линейных и точечных источников теплоты, достаточно часто встречающихся на практике. Для удобства изложения из общего решения (1) выделим только те множители, которые будут изменяться. Раскрывая неопределённость с помощью первого замечательного предела и подставляя полученный результат в формулу решения уравнения теплопроводности, получим общее аналитическое выражение решения уравнения теплопроводности для параллелепипеда с объёмным, плоским, линейным или точечным источником тепла:

решение для плоских, линейных и точечных источников теплоты, достаточно часто встречающихся на практике. Для удобства изложения из общего решения (1) выделим только те множители, которые будут изменяться. Раскрывая неопределённость с помощью первого замечательного предела и подставляя полученный результат в формулу решения уравнения теплопроводности, получим общее аналитическое выражение решения уравнения теплопроводности для параллелепипеда с объёмным, плоским, линейным или точечным источником тепла:

$$\vartheta(x, y, z) = \sum_{a_x=1}^{\infty} \sum_{a_y=1}^{\infty} \sum_{a_z=1}^{\infty} PG_{a_x, y, z} T_{a_x, y, z}(\tau) \prod_{i=x, y, z} M_{a_i},$$

где

$$G_{a_{x,y,z}} = \frac{1}{\sum_{i=x,y,z} R_{a_i}}$$

$$T_{a_{x,y,z}}(\tau) = 1 - \exp\left(-c^{-1}\gamma^{-1}G_{a_{x,y,z}}^{-1}\tau\right),$$

$$M_{a_i} = \frac{d_i \mu_{a_i}^{n_1} \sin^{n_2} 0,5 \mu_{a_i} \bar{p}_i}{p_i^{n_2} l_i^{n_4} \left[\mu_{a_i} + \sin \mu_{a_i} \cos \mu_{a_i} (1 - 2b_{a_i})\right]^{n_3}} \times \left[\cos \mu_{a_i} (\bar{r}_i - b_{a_i}) \cos \mu_{a_i} (\bar{i}_i - b_{a_i})\right]^{n_3},$$

$b$  определяется из характеристического уравнения:  $b = \frac{1}{\mu} \operatorname{arccotg} \frac{\mu}{Bi_1}$ ; значения  $d_i, n_1, n_2, n_3, n_4, R_{a_i}$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения величин  $d_i, n_1, n_2, n_3, n_4, R_{a_i}$

Параметры	$Bi_{1i} > 0$		$Bi_{1i} = 0$
	$p_i > 0$	$p_i = 0$	
$d_i$	4	2	1
$n_1$	0	1	0
$n_2$	1	0	0
$n_3$	1	1	0
$n_4$	0	1	1
$R_{a_i}$	$(\bar{\mu}_{a_i})^2 \lambda_i$	$(\bar{\mu}_{a_i})^2 \lambda_i$	$\bar{k}_{1i} b_{a_i}^{-1} l_i^{-1}$

Наиболее распространённая форма элементов конструкций летательных аппаратов – прямоугольный круглый цилиндр или его сегменты. Рассмотрим задачу анализа температурного поля круглого цилиндра или его сегмента с источником тепла той же формы. Решать уравнение теплопроводности для цилиндра будем как и в задаче для параллелепипеда.

Нагретая зона и источник тепла представляют собой прямоугольный кру-

Таким образом, получена математическая модель, позволяющая анализировать температурные поля элементов конструкций летательных аппаратов формы параллелепипеда с источниками тепла, в частности РЭА. Допущения, сделанные при поиске решения уравнения теплопроводности, являются стандартными, правомерность которых доказана. Использование вычислительной техники при расчётах снимает вопрос сложности вычислений суммы бесконечного ряда. Отметим, что сходимость подобных рядов доказана, а использование для вычислений только первого члена ряда даёт возможность проведения экспресс-анализа с достаточной точностью для принятия проекторочных решений по конструкции РЭА.

говой цилиндр или его часть, ограниченную координатными поверхностями прямоугольных цилиндрических координат  $r\theta\varphi z$  (рис. 2).

Все условия аналогичны предыдущей постановке задачи с прямоугольным параллелепипедом (слова «прямоугольный» и «круговой» в дальнейшем будем опускать).

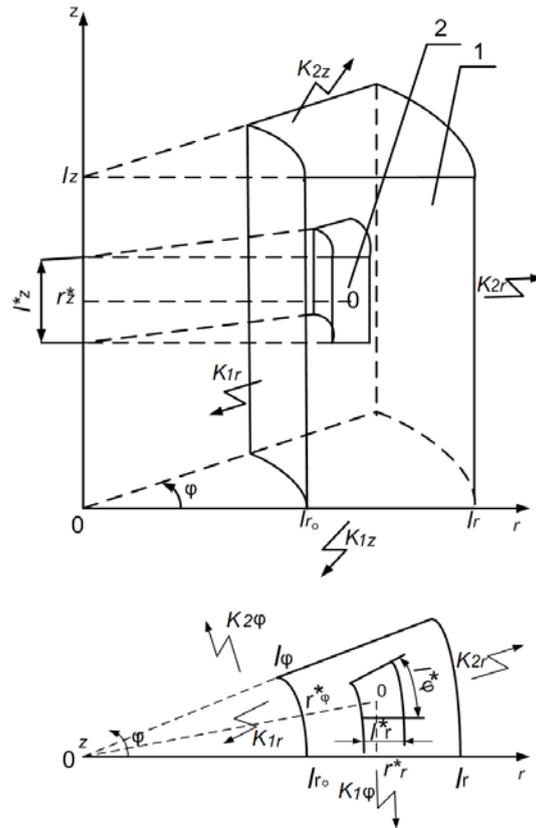


Рис. 2. Тепловая модель нагретой зоны с источником тепла, имеющих форму цилиндра, ограниченного координатными поверхностями: 1 – нагретая зона; 2 – источник тепла

Математически формулировка задачи имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{1}{c\gamma} \left[ \frac{\lambda_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\varphi}{\varphi^2} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right] + \frac{W}{c\gamma}; \\ \vartheta = \vartheta(x, y, z); \quad W = W(x, y, z, \vartheta); \\ \lambda_r = \lambda(r); \quad \lambda_\varphi = \lambda(\varphi); \quad \lambda_z = \lambda(z); \\ C = \text{const}; \quad \gamma = \text{const}; \\ l_{r0} \leq r \leq l_r; \quad 0 \leq \varphi \leq l_\varphi; \quad \max l_\varphi = 2\pi; \\ 0 \leq z \leq l_z; \quad \tau \geq 0; \\ W = w - q\vartheta; \quad w = w(r, \varphi, z); \quad q = \text{const}. \end{array} \right.$$

Начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$\vartheta(r, \varphi, z, \tau = 0) = 0,$$

$$\left( \lambda_j \frac{\partial \vartheta}{\partial j} \mp k_{1,2j} \vartheta \right)_{\substack{i=0 \\ r=l_{r0} \\ j=l_j \\ l_\varphi < 2\pi}} = 0,$$

где  $i = \varphi, z$ ;  $j = r, \varphi, z$ .

ременных, классические преобразования координат и функции температуры, в результате решения уравнения методом разделения переменных после преобразования получаем выражение, позволяющее рассчитывать температурное поле в телах формы цилиндра или его сегмента с объёмным источником теплоты той же формы (заметим, что в полученном решении функции Бесселя ортогональны с весом  $r$ ):

Используя замену независимых пе-

$$\vartheta(r, \varphi, z, \tau) = \sum_{a_r=1}^{\infty} \sum_{a_\varphi=1}^{\infty} \sum_{a_z=1}^{\infty} \frac{64wT_{a_r,z}(\tau)}{q + \sum_{i=r,z} (\bar{\mu}_{a_i})^2 \lambda_i} \times \\ \times D_{a_r} D_{a_\varphi} D_{a_z} U_{a_r} U_{a_\varphi} \cos \mu_{a_z} (\bar{r}_z - b_{a_z});$$

$$\text{где } D_{a_r} = \frac{\int_{r_r^*-0,5l_r^*}^{r_r^*+0,5l_r^*} r U_{a_r} dr}{4 \|U_{a_r}\|^2}.$$

$U_{a_r}$  и  $U_{a_\varphi}$  в общем случае представляют собой следующие выражения:

$$U_r = A_r \left[ J_n(\mu_r \bar{r}) - \frac{J'_n(\mu_r) + \bar{B}i_{2r} J_n(\mu_r)}{Y_n(\mu_r) + \bar{B}i_{2r} Y_n(\mu_r)} Y_n(\mu_r \bar{r}) \right],$$

$$D_{a_\varphi} = \frac{\int_{r_\varphi^*-0,5l_\varphi^*}^{r_\varphi^*+0,5l_\varphi^*} U_{a_\varphi} d\varphi}{4 \|U_{a_\varphi}\|^2},$$

$$U_\varphi = A_\varphi \left( \cos \mu_\varphi \bar{\varphi} + \frac{Bi_{1\varphi}}{\mu_\varphi} \sin \mu_\varphi \bar{\varphi} \right),$$

$$D_{a_z} = \frac{\sin 0,5\mu_{a_z} \bar{l}_z^* \cdot \cos \mu_{a_z} (\bar{r}_z^* - b_{a_z})}{\mu_{a_z} + \sin \mu_{a_z} \cos \mu_{a_z} (1 - 2b_{a_z})},$$

$$T_{a_r,z}(\tau) = 1 - \exp \left\{ -\frac{\tau}{C\gamma} \left[ q + \sum_{i=r,z} (\bar{\mu}_{a_i})^2 \lambda_i \right] \right\}.$$

Для  $N$  источников теплоты применим принцип суперпозиции полей.

Таким образом, получено аналитическое выражение решения уравнения теплопроводности для цилиндра и элементов конструкции летательных аппаратов в виде сегмента цилиндра с объёмным источником тепла аналогичной формы. Полученное решение позволяет получить

выражения для плоского, линейного и точечного источников тепла, представив соответствующий размер последнего стремящимся к нулю и воспользовавшись свойствами первого замечательного предела.

Для летательных аппаратов, элементов конструкций и источников тепла в виде шара и его сегментов по аналогии с предыдущими решениями можно получить аналитическое решение соответствующего уравнения теплопроводности для объёмного, плоского, линейного и точечного источников тепла. Решение имеет более сложный вид и кроме функций Бесселя содержит присоединённые функции Лежандра I и II рода.

Таким образом, получены следующие научные и практические результаты:

- получено общее выражение решения уравнения теплопроводности для тел простейшей формы (параллелепипед, цилиндр и его сегмент, шар и его сегмент) с объёмным, плоским, линейным или точечными источниками тепла;

- предложена математическая модель для анализа тепловых полей элементов конструкций летательных аппаратов простейшей формы (параллелепипед, цилиндр и его сегмент, шар и его сегмент) с объёмным, плоским, линейным или точечными источниками тепла;

- разработаны математическая и тепловая модели для анализа температурных полей бортовой РЭА.

Вопросы практического применения разработанных математической и тепловой моделей докладывались на международной научной конференции [4] и изложены в [5, 6]. Использование результатов этой работы позволило разработать методы синтеза элементов конструкции с регламентируемыми температурными, надёжностными [6] и стоимостными характеристиками, которые обеспечивают заданные требования на ранних стадиях конструирования РЭА.

### Библиографический список

1. Пехович А. И. Расчёты теплового режима твёрдых тел. Л.: Энергия, 1976. 352 с.
2. Камья Ф. Н. Импульсная теория теплопроводности. М.: Энергия, 1972. 272 с.
3. Азаренков В.И. Аналитическое решение уравнения теплопроводности в задачах анализа и синтеза температурных полей радиоэлектронной аппаратуры: дис. ... канд. техн. наук. Харьков, 2015. 190 с.
4. Азаренков В. И. Исследование и разработка тепловой модели и методов анализа температурных полей конструкций радиоэлектронной аппаратуры // Тезисы докладов международной научной конференции «Научная периодика славянских стран в условиях глобализации». № 3(5), ч. 1. Харьков: Технологический центр, 2012. С. 39-40.
5. Азаренков В.И., Майборода М.В. Методика инженерного расчёта температурного режима радиоэлектронной аппаратуры // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2006. № 2/3(20). С. 3-11.
6. Азаренков В.И. Методика инженерного расчёта конструктивных и теплофизических параметров конструкции радиоэлектронной аппаратуры заданной надёжности // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2008. № 3/2(33). С. 27-31.

### Информация об авторе

**Азаренков Владимир Ильич**, кандидат технических наук, доцент кафедры системного анализа и управления, Национальный технический университет «Харьковский политехнический инсти-

тут», г. Харьков, Украина. E-mail: [azarnikov@ukr.net](mailto:azarnikov@ukr.net). Область научных интересов: проектирование технических конструкций различных изделий с заданными тепловыми характеристиками.

### ANALYSIS OF TEMPERATURE FIELDS OF AIRCRAFT COMPONENTS

© 2015 V. I. Azarenkov

National Technical University «Kharkov Polytechnical Institute»  
Kharkov, Ukraine

The problem of analyzing of temperature fields of aircraft components is central for ensuring the operational reliability of the latter. The results of developing methods of calculating temperature fields of the existing products and those being designed based on analytical solution of thermal conductivity equations for the principal types of structures are outlined in the paper. The thermal conductivity equation for a parallelepiped and cylinder with heat sources of a similar form is solved using the variable separation method. A common expression of the solution of thermal conductivity equation for bodies of the simplest form (parallelepiped, cylinder or its segment, sphere or its segment) with spatial, flat, linear or point heat sources is obtained. A mathematical model for the analysis of thermal fields of aircraft components is proposed. Mathematical and thermal models are developed for the analysis of temperature fields of onboard REA.

*Analysis of temperature fields, solution of the thermal conductivity equation, thermal and mathematical models of a structure.*

## References

1. Pehovich A.I. *Raschety teplovogo rezhima tverdyh tel* [Calculations of thermal conditions of solid bodies]. Leningrad: Energiya Publ., 1976. 352 p.
2. Kam'ya F.N. *Impul'snaja teorija teploprovodnosti* [Pulse theory of heat conductivity]. Moscow: Energiya Publ., 1972. 272 p.
3. Azarenkov V.I. *Analiticheskoe reshenie uravneniya teploprovodnosti v zadachah analiza i sinteza temperaturnykh polej radioelektronnoj apparatury. Diss. cand. techn. nauk* [Analytical solution of the thermal conductivity equation in tasks of analysis and synthesis of temperature fields of radio-electronic equipment. Cand. Sc. (Engineering) dissertation]. Khar'kov, 2015. 190 p.
4. Azarenkov V.I. Research and development of thermal models and methods for the analysis of temperature fields structures radio-electronic equipment. *Theses of reports of the International scientific conference «The Scientific Periodical Press of the Slavic Countries in the conditions of Globalization»*. No. 3/1(5). Khar'kov: Tekhnologicheskiiy tsentr Publ., 2012. P. 39-40. (In Russ.).
5. Azarenkov V.I., Majboroda M.V. Technique of engineering calculation of temperature condition of the radio-electronic equipment. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 2006. No. 2/3(20). P. 3-11. (In Russ.).
6. Azarenkov V.I. Technique of engineering calculation of design and heat physical data of a design of the radio-electronic equipment of the set reliability. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy*. 2008. No. 3/2(33). P. 27-31. (In Russ.)

## About the author

**Azarenkov Vladimir Il'ich**, Candidate of Science (Engineering), Assistant Professor of the Department of System Analysis and Management, National Technical University

«Kharkov Polytechnical Institute», Kharkov, Ukraine. E-mail: [azarnikov@ukr.net](mailto:azarnikov@ukr.net). Area of Research: structural design of various products with preset thermal characteristics.