УДК 629.78

УПРАВЛЕНИЕ ПЛОСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ОРБИТЫ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ДВИГАТЕЛЯ МАЛОЙ ТЯГИ

© 2015 В. В. Салмин, А. С. Четвериков

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Статья посвящена разработке алгоритмов управления параметрами орбиты стационарного космического аппарата с помощью двигателя малой тяги. Рассматривается управление только плоскими параметрами, определяющими положение геостационарного спутника в плоскости орбиты, а именно, периодом обращения, эксцентриситетом и долготой точки стояния. Сформулирована плоская задача терминального управления геостационарным космическим аппаратом. Принимается, что корректирующий манёвр реализуется за счёт создания малого трансверсального ускорения электрореактивным двигателем малой тяги, а вектор управления состоит из последовательности длительностей активных и пассивных участков. В связи с этим плоская задача терминального управления решается в дискретной постановке. Разработана дискретная модель движения геостационарного космического аппарата в плоскости орбиты под действием малого трансверсального ускорения. Решение поставленной задачи с помощью традиционного метода динамического программирования, основанного на использовании уравнения Беллмана, получить достаточно сложно, поскольку полученная дискретная модель движения аппарата представляет собой нелинейную систему уравнений. Поэтому предложена приближённая схема решения задачи на основе трёхшагового алгоритма терминального управления периодом обращения, эксцентриситетом и долготой точки стояния. В результате получено решение плоской задачи терминального управления в аналитическом виде. Получены аналитические выражения для оценки затрат характеристической скорости корректирующего манёвра, использующего трёхшаговый алгоритм терминального управления. При моделировании движения геостационарного космического аппарата под действием малого трансверсального ускорения алгоритм показал достаточно высокую точность решения задачи терминального управления.

Малая тяга, геостационарная орбита, терминальное управление, коррекция орбиты.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-4-92-101

Введение

Геостационарная орбита (ГСО) является одной из наиболее востребованных орбит для прикладных космических аппаратов (КА) различного назначения. Действие различного рода возмущений в течение продолжительного интервала времени на движение КА по орбите приводит к отклонению параметров орбиты от требуемых значений. В связи с этим необходимо постоянно проводить коррекцию орбиты. Применение электрореактивных двигателей (ЭРД) малой тяги позволяет существенно снизить расход рабочего тела при коррекции орбиты и тем самым увеличить время существования КА на орбите.

В работе [1] приведены численные алгоритмы управления КА на ГСО с помощью двигателей малой тяги. Однако они достаточно сложные и обладают плохой сходимостью.

Поэтому требуется разработать простые и надёжные алгоритмы коррекции орбиты геостационарного КА, позволяющие их использовать в автономном режиме полёта КА. В то же время параметры ГСО после проведения коррекции должны соответствовать требуемой точности.

Постановка задачи

Рассмотрим движение КА по ГСО в плоскости орбиты, то есть вектор состояния X будет включать в себя период об-

ращения КА на орбите T, эксцентриситет орбиты e и долготу точки стояния λ :

$$X = \{T, \lambda, e\}^T.$$

В результате действия различных возмущений будем иметь вектор отклонения состояния $\Delta X = {\Delta T, \Delta \lambda, \Delta e}^T$. Здесь $\Delta T = T - T_3$; $\Delta e = e - e_{\Gamma CO}$; $\Delta \lambda = \lambda - \lambda_P$; T, e, λ – текущие значения периода обращения, эксцентриситета и долготы точки стояния КА на орбите соответственно; T_3 – период обращения КА на ГСО, равный звёздным суткам $T_3 = 86164,09$ с; $e_{\Gamma CO} = 0$ – эксцентриситет геостационарной орбиты; λ_P – долгота рабочей точки стояния КА.

После проведения корректирующего манёвра вектор ΔX переходит в вектор $\Delta X_K = \{\Delta T_K, \ \Delta \lambda_K, \ \Delta e_K\}^T$. Тогда задача управления формулируется как задача оптимального управления с функционалом

$$I = \Delta X_{\kappa}^{T} \Lambda \Delta X_{\kappa} \to \min, \qquad (1)$$

где Λ – матрица постоянных коэффициентов.

Примем, что корректирующий манёвр реализуется за счёт создания малого трансверсального ускорения a_T . Вектор управления состоит из последовательности длительностей τ активных (1,...,k) и пассивных $(\Pi 1,...,\Pi k)$ участков $u = \{\tau_1,...,\tau_k, t_{\Pi 1},...,t_{\Pi k}\}^T$.

Математическая модель движения КА при малом трансверсальном ускорении

Уравнения движения КА при малом трансверсальном ускорении *a*_T в равноденственных элементах имеют вид:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{h^2}{1 + e_x \cos F + e_y \sin F} a_T,$$

$$\frac{de_x}{dt} = h \cdot a_T \left(e_x + 2\cos F + e_x \cos^2 F + e_y \sin F \cos F \right),$$
(2)
$$\frac{de_y}{dt} = h \cdot a_T \left(e_y + 2\sin F + e_y \sin^2 F + e_x \sin F \cos F \right),$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\left(1 + e_x \cos F + e_y \sin F \right)^2}{h^3 \mu},$$

где
$$h = \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \qquad e_x = e \cdot \cos(\Omega + \omega);$$

 $e_y = e \cdot \sin(\Omega + \omega);$ $F = \vartheta + \Omega + \omega;$ $p - \phi$ окальный параметр; ϑ – истинная аномалия; Ω – долгота восходящего узла; ω – аргумент перицентра; μ – гравитационный параметр Земли.

Учитывая малое значение эксцентриситета, пренебрежём малыми членами в уравнениях системы (2) и, решив эту систему дифференциальных уравнений, получим выражение для изменения эксцентриситета на активном участке

$$e = \sqrt{\left|e_0^2 + 16\mu^2 a_T^2 h_0^8 \sin^2\left(\frac{\tau}{2\mu h_0^3}\right) + 8\mu a_T h_0^4 \sin\left(\frac{\tau}{2\mu h_0^3}\right) \cdot e_0 \cos\left(F_0 + \frac{\tau}{2\mu h_0^3} - \arccos\left(\frac{e_{x0}}{e_0}\right)\right)\right|}$$

Переходя от равноденственных к оскулирующим элементам, получим

$$e = \sqrt{\left|e_0^2 + 4\frac{T_0^2}{\pi^2}a_T^2\left(\frac{T_0}{2\pi\cdot\mu}\right)^{2/3}\sin^2\left(\frac{\pi}{T_0}\tau\right) + 4a_T\frac{T_0}{\pi}\left(\frac{T_0}{2\pi\cdot\mu}\right)^{1/3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{T_0}\tau\right)\cdot e_0\cos\left(\theta_0 + \frac{\pi}{T_0}\tau\right)\right|},$$

где e_0 , T_0 , ϑ_0 – соответственно эксцентриситет орбиты, период обращения и истинная аномалия в начальный момент времени; τ – длительность активного участка.

Из полученного выражения для эксцентриситета следует, что максимальное уменьшение эксцентриситета имеет место, если включение ЭРД будет в точке, где истинная аномалия удовлетворяет условию:

$$\theta_0 = \pi - \frac{\pi}{T_0} \tau + 2\pi m, \quad \text{при } a_T > 0,$$
(3)

$$\mathcal{G}_0 = 2\pi - \frac{\pi}{T_0} \tau + 2\pi m$$
 при $a_T > 0,$ (4)

где $m \in Z$.

Если предположить, что ЭРД включается только в момент времени, когда истинная аномалия принимает значение, определяемое выражением (3) или (4), и учитывая, что продолжительность активного участка τ имеет малую величину по сравнению с величиной периода обращения в начальный момент включения двигателя T_0 , то выражение для эксцентриситета в этом случае имеет вид

$$e \cong \left| e_0 - 2 \cdot a_{\mathrm{T}} \frac{T_0}{\pi} \left(\frac{T_0}{2\pi \cdot \mu} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\pi}{T_0} \tau \right) \right| = \left| e_0 - 2 \cdot a_{\mathrm{T}} \left(\frac{T_0}{2\pi \cdot \mu} \right)^{1/3} \tau \right|$$

или в дискретном виде

$$\Delta e(k+1) = \left| \Delta e(k) - 2 \cdot a_T \left(\frac{T_3 + \Delta T(k)}{2\pi \cdot \mu} \right)^{1/3} \tau(k) \right|,\$$

 $k = 0, \dots, N-1,$ (5)

где N – число шагов коррекции орбиты, а шаг представляет собой последовательность пассивного и активного участков.

Продолжительность пассивных участков в этом случае определяется следующими выражениями:

$$t_{\Pi} = \frac{T_0}{2} (1 + 2m) - \frac{\tau}{2} - \frac{9_0 T_0}{2\pi} \text{ при } a_T > 0, \quad (6)$$

$$t_{\rm II} = T_0(1+m) - \frac{\tau}{2} - \frac{9_0 T_0}{2\pi}$$
 при $a_T < 0.$ (7)

В вектор состояния X помимо эксцентриситета входят ещё период обращения КА T и долгота точки стояния λ .

Период обращения КА на орбите через равноденственные элементы определяется выражением

$$T = 2\pi\mu h^3. \tag{8}$$

Из (8), учитывая малость трансверсального ускорения и продолжительность его действия, получим в дискретном виде уравнение, описывающее изменение периода обращения КА при действии на него малого трансверсального ускорения a_T в течение времени т:

$$\Delta T(k+1) = \Delta T(k) +$$

+3 \cdot a_r \left(T_3 + \Delta T(k)\right) \cdot \sqrt{\frac{T_3 + \Delta T(k)}{2\pi \cdot \mmu}} \cdot \tau(k) \cdot \text{.}

Изменение средней долготы в дискретном виде будет описываться следующим уравнением:

$$\Delta\lambda(k+1) = \Delta\lambda(k) + \left(\frac{2\pi}{T_3 + \Delta T(k)} - \omega_3\right) \cdot \left(t_{\pi}(k) + \tau(k)\right).$$

Таким образом, дискретная модель плоского движения геостационарного КА под действием малого трансверсального ускорения имеет вид:

$$\Delta T(k+1) = \Delta T(k) + 3 \cdot a_{\mathrm{T}} \left(T_3 + \Delta T(k) \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_3 + \Delta T(k)}{2\pi \cdot \mu}} \cdot \tau(k) ,$$

$$\Delta \lambda(k+1) = \Delta \lambda(k) + \left(\frac{2\pi}{T_3 + \Delta T(k)} - \omega_3 \right) \cdot \left(t_{\mathrm{T}}(k) + \tau(k) \right) ,$$

$$\Delta e(k+1) = \left| \Delta e(k) - 2 \cdot a_T \left(\frac{T_3 + \Delta T(k)}{2\pi \cdot \mu} \right)^{1/3} \tau(k) \right| , \qquad k = 0, \dots, N-1,$$
(9)

где $t_{\Pi}(k)$ определяется из (6) или (7).

Решение задачи терминального управления

Для модели движения (9) необходимо решить задачу оптимального управления с функционалом (1).

Примем, что структура управления состоит из трёх активных участков AB, CD, EO (рис. 1) соответственно продолжительностью τ_0 , τ_1 , τ_2 и двух пассивных участков соответственно продолжительностью $t_{\Pi 1}$ и $t_{\Pi 2}$. На участке AB происходит уменьшение эксцентриситета до нуля, на участке CD эксцентриситет увеличивается до некоторого значения e', затем на участке EO эксцентриситет снова уменьшается до нуля. Такая структура управления позволяет гарантированно привести КА с двигателем малой тяги в заданную точку ГСО с требуемой точностью по периоду, долготе и эксцентриситету.



Учитывая выбранную структуру управления и используя при решении задачи подход, основанный на методе динамического программирования, получим аналитическое решение задачи терминального управления для дискретной модели движения КА (9) в виде

Для найденного решения представлены фазовые траектории КА для двух случаев: начальное отклонение периода положительное ($\Delta T_0 > 0$) (рис. 2) и начальное отклонение периода отрицательное ($\Delta T_0 < 0$) (рис. 3).

Как видно из рис. 2, 3, если отклонение периода обращения ΔT_C от звёздных суток T_3 в точке *C* имеет знак, отличный от начального отклонения периода ΔT_0 , то направление трансверсального ускорения a_T меняется на противоположное. На рис. 4, 5 представлен пример моделирования коррекции орбиты геостационарного КА с помощью ЭРД малой тяги. При этом продолжительности активных и пассивных участков равны: $\tau_0 = 7758$ с, $\tau_1 = 1997$ с, $\tau_2 = 1998$ с, $t_{n1} = 260200$ с \approx 3 суток, $t_{n2} = 40170$ с $\approx 0,46$ суток.

Конечные отклонения параметров орбиты: периода орбиты $\Delta T_K = 1,3$ с, долготы точки стояния $\Delta \lambda_K = 0,15^0$, эксцентриситета $\Delta e_K = 1 \times 10^{-4}$.



Рис. 2. Фазовые траектории КА при $\Delta T_0 > 0$:

$$\begin{split} &a - \Delta T_C > 0 \;,\; \Delta \lambda_B > 0 \;,\; \Delta \lambda_C > 0 \; \text{ м } \Delta \lambda_C < \Delta \lambda_B \;; \\ &\delta - \Delta T_C > 0 \;,\; \Delta \lambda_B < 0 \;,\; \Delta \lambda_C < 0 \;;\; \\ &\epsilon - \Delta T_C > 0 \;,\; \Delta \lambda_B < 0 \;,\; \Delta \lambda_C < 0 \;;\; \\ &\epsilon - \Delta T_C < 0 \;,\; \Delta \lambda_B < 0 \;,\; \Delta \lambda_C < 0 \;;\; \\ &\delta - \Delta T_C < 0 \;,\; \Delta \lambda_B < 0 \;;\; \\ &\delta - \Delta T_C < 0 \;,\; \Delta \lambda_B < 0 \;;\; \\ &\delta - \Delta T_C < 0 \;,\; \\ &\Delta \lambda_B < 0 \;;\; \\ &\delta - \Delta T_C < 0 \;,\; \\ &\Delta \lambda_B > 0 \end{split}$$







Рис. 3. Фазовые траектории КА при $\Delta T_0 < 0$: $a - \Delta T_C < 0, \ \Delta \lambda_B < 0, \ \Delta \lambda_C < 0 \ \mbox{i} \ \left| \Delta \lambda_C \right| < \left| \Delta \lambda_B \right|;$ $\delta - \Delta T_C < 0, \ \Delta \lambda_B < 0 \ \mbox{i} \ \left| \Delta \lambda_B \right| < \left| \Delta \lambda_C \right|;$ $s - \Delta T_C < 0, \ \Delta \lambda_B > 0, \ \Delta \lambda_B > \Delta \lambda_C;$ $z - \Delta T_C > 0, \ \Delta \lambda_B > 0, \ \Delta \lambda_C > 0 \ \mbox{i} \ \Delta \lambda_C < \Delta \lambda_B;$ $\partial - \Delta T_C > 0, \ \Delta \lambda_B > 0 \ \mbox{i} \ \Delta \lambda_C < 0;$ $e - \Delta T_C > 0, \ \Delta \lambda_B < 0$



Рис. 4. Фазовая траектория движения геостационарного КА при коррекции орбиты с помощью ЭРД малой тяги (a₀ = 0,001 м/c², $\Delta T_0 = 1000$ с, $e_0 = 0,005$, $\Delta \lambda_0 = 0,087$ рад)



Рис. 5. Изменение эксцентриситета орбиты геостационарного КА при проведении коррекции орбиты с помощью ЭРД малой тяги (a₀ = 0,001 м/c², ΔT₀ = 1000 с, e₀ = 0,005, Δλ₀ = 0,087 рад)

Оценка затрат характеристической скорости

Получим выражение для оценки затрат характеристической скорости при коррекции ГСО на основе трёхшагового алгоритма терминального управления как функции начальных граничных условий.

Затраты характеристической скорости определяются выражением

$$\Delta V_{XK} = \left| a_{\mathrm{T}} \right| \cdot \left(\tau_0 + \tau_1 + \tau_2 \right). \tag{11}$$

Подставляя (10) в (11) и произведя преобразования, получим выражение для оценки затрат характеристической скорости в виде функции от начальных граничных условий (T_0 , e_0):

$$\Delta V_{XK} = \left(\frac{T_0}{2\pi \cdot \mu}\right)^{-1/3} \cdot \left(\frac{\Delta e_0}{2} \pm \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{\Delta e_0}{2} - \frac{T_3}{T_0} \left(1 + \frac{\Delta e_0}{2}\right)^4\right)\right) \quad \text{при } \Delta T_0 > 0,$$

где знак «+» при $T_0 \left(1 - 3\frac{\Delta e_0}{2} \right) - T_3 > 0$, знак «-» при $T_0 \left(1 - 3\frac{\Delta e_0}{2} \right) - T_3 < 0$;

$$\Delta V_{XK} = \left(\frac{T_0}{2\pi \cdot \mu}\right)^{-1/3} \cdot \left(\frac{\Delta e_0}{2} \pm \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{\Delta e_0}{2} - \frac{T_3}{T_0} \left(1 - \frac{\Delta e_0}{2}\right)^4\right)\right) \quad \text{при } \Delta T_0 < 0,$$

где знак «+» при $T_0\left(1+3\frac{\Delta e_0}{2}\right) - T_3 > 0$, знак «-» при $T_0\left(1+3\frac{\Delta e_0}{2}\right) - T_3 < 0$.



Рис. 6. Затраты характеристической скорости при коррекции ГСО с помощью ЭРД малой тяги на основе трёхшагового алгоритма терминального управления: сплошные линии – ΔT₀ > 0, пунктирные линии – ΔT₀ < 0

На рис. 6 представлена зависимость затрат характеристической скорости от начальных граничных условий ΔT_0 и e_0 при коррекции ГСО с помощью ЭРД на основе трёхшагового алгоритма терминального управления.

Заключение

Для поставленной задачи управления плоскими параметрами орбиты геостационарного КА с двигателем малой тяги получено приближённое аналитическое решение в виде трёхшагового алгоритма терминального управления периодом орбиты, долготой и эксцентриситетом. При моделировании движения КА под действием малого трансверсального ускорения алгоритм показал достаточно высокую точность. Так, при использовании предложенного трёхшагового алгоритма управления конечные отклонения по периоду составили 1-2 секунды, по долготе – 0,1-0,15⁰, по эксцентриситету – 10^{-4} . Продолжительность корректирующего манёвра при начальных значениях отклонения долготы стояния в пределах 5^{0} составила 5-10 суток, при больших значениях отклонения долготы стояния продолжительность может составлять до нескольких десятков суток.

Библиографический список

1. Чернявский Г.М., Бартенев В.А., Малышев В.А. Управление орбитой стационарного спутника. М.: Машиностроение, 1984. 144 с.

Информация об авторах

Салмин Вадим Викторович, доктор технических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Е-mail: <u>sputnik@ssau.ru</u>. Область научных интересов: оптимизация космических перелётов с двигателями малой тяги. Четвериков Алексей Сергеевич, кандидат технических наук, инженер кафедры космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Е-mail: chetverikov86@yandex.ru. Область научных интересов: оптимизация космических перелётов с двигателями малой тяги.

CONTROL OF IN-PLANE ORBIT PARAMETERS OF A GEOSTATIONARY LOW-THRUST SATELLITE

© 2015 V. V. Salmin, A. S. Chetverikov

Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

The article focuses on the development of algorithms for controlling the parameters of the orbit of a geostationary satellite with the help of a low- thrust engine. We consider only the control of two-dimensional parameters that define the position of the satellite in the orbital plane, namely, the orbit time, the eccentricity and the point longitude of satellite observation. A two-dimensional problem of geostationary spacecraft terminal control is formulated. It is assumed that the correction maneuver is carried out by creating low transversal acceleration with the help of low-thrust electric propulsion, and the control vector consists of a sequence of durations of powered and unpowered portions. In this regard, the two-dimensional terminal control problem is solved in a discrete setting. For this purpose, a discrete model of the motion of a geostationary spacecraft in the orbital plane under the influence of low transversal acceleration is developed. It is quite difficult to solve the problem posed by using the traditional method of dynamic programming based on the use of the Bellman equation since the resulting discrete model of the satellite motion is a non-linear system of equations. Therefore, an approximate pattern of solving the problem on the basis of a three-step algorithm of the terminal control of the orbit time, eccentricity and point longitude of satellite observation is proposed in the paper. As a result, the plane terminal control problem is solved in an analytical form. Analytical expressions for estimating the costs of characteristic velocity correction maneuver using a three-step algorithm of terminal control are obtained. In modeling the motion of a geostationary satellite under the influence of low transversal acceleration the algorithm showed sufficiently high accuracy.

Low thrust; geostationary orbit; terminal control; correction of the orbit.

References

1. Chernjavskiy G.M., Bartenev V.A., Malyshev V.A. *Upravlenie orbitoy statsionarnogo sputnika* [Control of the geostationary satellite orbit]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1984. 144 p.

About the authors

SalminVadimViktorovich, Doctor of Science (Engineering), Professor, Deputy Head of the Department of Space Engineering, Samara State Aerospace University, Russian Federation. E-mail: <u>sput-</u> <u>nik@ssau.ru</u>. Area of Research: optimization of low-thrust space missions. **Chetverikov Alexey Sergeevich**, Candidate of Science (Engineering), engineer of the Department of Space Engineering, Samara State Aerospace University, Russian Federation. E-mail: <u>chetverikov86@yandex.ru</u>. Area of Research: optimization of low-thrust space missions.