

УДК 629.78

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОВОРОТОВ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА «АИСТ-2» НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МИНИМУМА УПРАВЛЕНИЯ

© 2015 В. Ф. Петрищев, М. Г. Шипов

АО «Ракетно-космический центр «Прогресс», г. Самара

Исследована эффективность применения принципа минимума управления в решении задачи синтеза системы управления пространственным поворотом космического аппарата на произвольно заданные углы до 180° . Тензор инерции аппарата имеет вид диагональной матрицы. В качестве исполнительных органов системы управления движением вокруг центра масс используются двигатели-маховики, роторы которых параллельны главным центральным осям инерции аппарата. Управляющий момент, развиваемый каждым двигателем-маховиком, пропорционален угловому ускорению его ротора. В качестве показателя оптимальности пространственного поворота приняты энергозатраты на управление, пропорциональные сумме модулей угловых ускорений роторов двигателей-маховиков. Для моделирования невозмущённого движения аппарата вокруг центра масс динамические уравнения Эйлера приведены к рекуррентным соотношениям в конечных разностях. Для использования принципа минимума управления, обеспечивающего минимизацию расхода ресурсов на управление, введена вспомогательная динамическая система, параметры которой выбраны исходя из решения поставленной задачи. Проведено математическое моделирование системы управления пространственным поворотом аппарата на примере малого космического аппарата «Аист-2». Результаты математического моделирования подтвердили эффективность предложенного принципа. По сравнению с традиционным методом управления (разгон, движение с постоянной угловой скоростью, торможение) получена двукратная экономия электроэнергии.

Малый космический аппарат, система управления движением, двигатели-маховики, закон управления.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-4-72-79

Введение

Решается задача приведения малого космического аппарата (МКА) из произвольного положения в начало координат. Управление угловым движением МКА осуществляется в процессе орбитального полёта для решения целевых задач: движение по заранее заданной траектории для проведения съёмки земной поверхности или стабилизация с целью поддержания энергобаланса. Выбор оптимальных законов управления при пространственном повороте становится актуальным при разработке МКА, для которых критическими являются такие параметры как масса, скорость углового движения и энергетические затраты. В работе [1] представлен краткий обзор посвящённых данной проблеме работ. До настоящего времени на основе принципа максимума аналитически решены лишь задача плоского дви-

жения (поворот вокруг одной из инерциальных осей) аппарата и задача движения тела, схожего по инерционным характеристикам со сферически симметричным телом, что редко встречается на практике при управлении угловым движением КА. Известен также подход к решению задачи синтеза оптимального управления с обратной связью, предложенный в [2]. Это, по сути, численный метод, и для своей реализации он требует больших объёмов памяти и быстродействия бортовой вычислительной системы (БВС). Поэтому при больших размерностях задачи он не может быть применён.

Ставится и решается задача определения оптимального закона управления пространственным движением «несферичного» МКА на произвольно заданные углы до 180° . За основу выбран метод, основанный на принципе минимума управления [3]. Данный метод применим к за-

дачам, определённым в произвольно заданном n -мерном пространстве. При постановке задачи вводятся дополнительные параметры исходя из характеристик проектируемого аппарата.

**Уравнения
углового движения МКА**

Угловое движение МКА, определяемое связанным с ним базисом – связанной системы координат (ССК), относительно опорного инерциального базиса ОХУZ описывается векторным дифференциальным уравнением второго порядка невозмущённого движения твёрдого тела вокруг центра масс [4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_x = \omega_x, \\ \dot{\varphi}_y = \omega_y, \\ \dot{\varphi}_z = \omega_z, \\ \dot{\omega}_x = -\frac{1}{J_1}(\omega_y\omega_z(J_3 - J_2) + \omega_y J_{D_3}\omega_{D_3} - \omega_z J_{D_2}\omega_{D_2}) + \frac{1}{J_1}J_{D_1}\varepsilon_{D_1}, \\ \dot{\omega}_y = -\frac{1}{J_2}(\omega_x\omega_z(J_1 - J_3) + \omega_x J_{D_1}\omega_{D_1} - \omega_x J_{D_3}\omega_{D_3}) + \frac{1}{J_2}J_{D_2}\varepsilon_{D_2}, \\ \dot{\omega}_z = -\frac{1}{J_3}(\omega_y\omega_x(J_2 - J_1) + \omega_x J_{D_2}\omega_{D_2} - \omega_y J_{D_1}\omega_{D_1}) + \frac{1}{J_3}J_{D_3}\varepsilon_{D_3}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – углы отклонения осей ССК относительно соответствующих осей ИСК, точкой сверху обозначены производные от этих углов по времени (угловых скоростей).

Введём обозначения для углов и их производных по времени:

$$x_1 = \varphi_x, x_2 = \varphi_y, x_3 = \varphi_z, x_4 = \dot{\varphi}_x, \\ x_5 = \dot{\varphi}_y, x_6 = \dot{\varphi}_z$$

и угловых ускорений роторов ДМ:

$$u_1 = \varepsilon_{D_1}, u_2 = \varepsilon_{D_2}, u_3 = \varepsilon_{D_3}.$$

С учётом этих обозначений запишем систему (2) в линейной по состоянию и управлению форме:

$$J \frac{d\bar{\omega}}{dt} + \bar{\omega} \times (J\bar{\omega} + \sum_{j=1}^3 J_{Dj}\omega_{Dj}) - \sum_{j=1}^3 J_{Dj} \frac{d\omega_{Dj}}{dt} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\bar{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}^T$ – вектор абсолютной угловой скорости движения МКА в проекциях на его связанные оси;

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} - \text{тензор инерции МКА;}$$

J_{Dj} – момент инерции j -го двигателя-маховика (ДМ) в системе из трёх ДМ;

ω_{Dj} – угловая скорость вращения ротора j -го ДМ.

Уравнение (1) может быть представлено в виде системы шести дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = F \cdot X + G \cdot U, \quad (3)$$

где

$$\dot{X} = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{J_{D_1}}{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_{D_2}}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{D_3}}{J_3} \end{bmatrix};$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{45} & f_{46} \\ 0 & 0 & 0 & f_{54} & 0 & f_{56} \\ 0 & 0 & 0 & f_{64} & f_{65} & 0 \end{bmatrix};$$

$$f_{45} = -\frac{J_3 - J_2}{2J_1} x_6 - \frac{K_{D3}}{J_1};$$

$$f_{46} = -\frac{J_3 - J_2}{2J_1} x_5 + \frac{K_{D2}}{J_1};$$

$$f_{54} = -\frac{J_1 - J_3}{2J_2} x_6 + \frac{K_{D3}}{J_2};$$

$$f_{56} = -\frac{J_1 - J_3}{2J_2} x_4 - \frac{D}{J_2};$$

$$f_{64} = -\frac{J_2 - J_1}{2J_3} x_5 - \frac{K_{D2}}{J_3};$$

$$f_{65} = -\frac{J_2 - J_1}{2J_3} x_6 + \frac{K_{D1}}{J_3};$$

$$K_{Dj} = J_j \omega_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Интегрируя (3) по формуле Коши [3] на интервале $\Delta t = 0,1$ с от i до $i+1$, получим систему в разностной форме:

$$X_{i+1} = A_i \cdot X_i + B_i \cdot U_i, \quad (4)$$

где с точностью до членов второго порядка малости имеем

$$A_i = F \cdot \Delta t + E,$$

$$B_i = \int_t^{t+\Delta t} A_i(\tau) \cdot G d\tau,$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f_{45}\Delta t & f_{46}\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & f_{54}\Delta t & 1 & f_{56}\Delta t \\ 0 & 0 & 0 & f_{64}\Delta t & f_{65}\Delta t & 1 \end{bmatrix};$$

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{J_{D1}}{2J_1} \Delta t^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_{D2}}{J_2} \Delta t^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{D3}}{J_3} \Delta t^2 \\ \frac{J_{D1}}{J_1} \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_{D2}}{J_2} \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_{D3}}{J_3} \Delta t \end{bmatrix}.$$

К системе уравнений (4) добавляются три соотношения для учёта изменения кинетического момента двигателей-

маховиков на каждом шаге интегрирования Δt :

$$K_{Dj+1} = K_{Dj} + J \cdot \varepsilon_{Dj} \cdot \Delta t, \quad j = 1, 2, 3. \quad (5)$$

где ε_{Dj} – ускорение, сообщённое j -му ротору двигателей-маховиков.

Полученные соотношения (4) и (5) используются в программе математического моделирования задачи пространственного разворота космического аппарата.

В соответствии с принципом минимума управления закон управления с обратной связью записывается в виде

$$U_{i+1} = U_i + P_{i+1}(\tilde{X}_{i+1} - \xi_{i+1}), \quad (6)$$

где $\tilde{X}_i = X_i + e_i$, X_i – истинное значение вектора состояния, e_i – вектор случайных погрешностей измерений компонентов вектора X_i типа дискретного белого шума с диагональной ковариационной матрицей шумов K_e . Диагональные элементы матрицы суть дисперсии погрешностей измерений элементов вектора состояния.

Оптимальное значение весовой матрицы P_i определяется соотношением:

$$P_{i+1} = -K_{U,i}(B_i - D_i)^T [A_i K_{X,i} A_i^T + C_i K_{\xi,i} C_i^T + (B_i - D_i) K_{U,i} (B_i - D_i)^T + K_e]^{-1}. \quad (7)$$

Выражение для ковариационной матрицы управления, уточнённое на текущем шаге с учётом полученного оптимального значения весовой матрицы на этом шаге, имеет вид:

$$K_{U,i+1} = [P_{i+1}(B_i - D_i) + E] K_{U,i}. \quad (8)$$

Для построения оптимального управления (6)-(8) в соответствии с принципом минимума управления используется вспомогательная система

$$\xi_{i+1} = C_i \cdot \xi_i + D_i \cdot U_i \quad (9)$$

той же размерности, что и заданная система (4). Вспомогательная система

управляется тем же вектором управления U_i , что и заданная система, её начальное значение ξ_0 совпадает с начальным значением заданной системы X_0 , матрица $D_i = -B_i$, а матрица C_i выбирается из условия обеспечения асимптотической устойчивости в целом невозмущённого движения вспомогательной системы.

Считаем известными начальное значение ковариационной матрицы управления $K_{U,0}$, а также значения ковариационных матриц состояний заданной и вспомогательной систем:

$$K_{X,i} = M(X_i \cdot X_i^T), \quad K_{\xi,i} = M(\xi_i \cdot \xi_i^T).$$

Результаты математического моделирования оптимального пространственного поворота

Численное решение проводится на примере МКА «Аист-2», который обладает динамическими характеристиками, приведёнными в табл. 1, 2.

Случайные погрешности измерений чувствительных элементов представляют собой дискретный белый шум со среднеквадратичными отклонениями:

$\sigma_\omega = 7 \cdot 10^{-6}$ рад/с – по угловым скоростям;
 $\sigma_{\varphi_x}, \sigma_{\varphi_y} = 1,5 \cdot 10^{-4}$ рад, $\sigma_{\varphi_z} = 3,4 \cdot 10^{-5}$ рад – по углам.

$$X_0 = \xi_0 = \{-22^0; -15^0; -12^0; -0.0015^0 / c; 0.003^0 / c; -0.060165^0 / c\}^T.$$

Эти векторы содержат вектор эйлеровых углов отклонений осей ССК относительно осей ИСК и вектор абсолютной угловой скорости движения МКА в проекциях на его связанные оси в начальный момент времени. Начальные значения угловой скорости по каналам X, Y соответствуют погрешности системы стабилизации, а по каналу Z – орбитальной скорости стабилизации.

Начальные ускорения двигателей-маховиков выбраны нулевыми: $U_0 = 0$.

Матрица D_i выбирается из условия $D_i = -B_i$.

Ковариационные матрицы K_X, K_ξ приняты постоянными. Их значения и

Таблица 1. Моменты инерции МКА

Наименование (состояние МКА)	Осевые моменты инерции, кг·м ²		
	J _X	J _Y	J _Z
МКА на рабочей орбите, солнечные батареи раскрыты	175	200	285

Таблица 2. Характеристики двигателей-маховиков

Наименование параметра	Значение
Кинетический момент, Н·м·с	±18,9
Момент инерции ротора, кг·м ²	0,03415
Максимальный управляющий момент, Н·м	0,2

Исходными данными для расчёта параметров углового движения МКА относительно заданного начала координат являются начальное угловое положение и начальная угловая скорость.

В качестве примера рассматривается поворот ССК МКА из развёрнутого относительно инерциальной системы координат (ИСК) положения в положение, в котором ССК совпадает с ИСК.

Зададим начальное состояние заданной (а также вспомогательной) системы управления поворотами:

начальное значение ковариационной функции $K_{U,0}$ приняты диагональными и равными:

$$K_X = K_\xi = 0.001 \cdot E \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{\omega 1}^2, \text{ рад}^2 / c^2 \\ \sigma_{\omega 2}^2, \text{ рад}^2 / c^2 \\ \sigma_{\omega 3}^2, \text{ рад}^2 / c^2 \\ \sigma_{\varphi 1}^2, \text{ рад}^2 \\ \sigma_{\varphi 2}^2, \text{ рад}^2 \\ \sigma_{\varphi 3}^2, \text{ рад}^2 \end{bmatrix};$$

$$K_{U,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ рад} / c^2.$$

Элементы матрицы C_i вспомогательной системы выбраны из условия обеспечения асимптотической устойчиво-

сти в целом невозмущённого движения вспомогательной системы:

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta t \\ c1 & 0 & 0 & c2 & 0 & 0 \\ 0 & c1 & 0 & 0 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & c1 & 0 & 0 & c2 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$c1 = -a_1 * (1 + a_2 * i);$$

$$c2 = 1 - a_2 * (1 + a_3 * i);$$

$$a_1 = 0.00002; a_2 = 0.005; a_3 = 0.000025.$$

Асимптотическая устойчивость в целом вспомогательной системы проверяется численным расчётом вспомогательной функции Ляпунова

$$\vartheta_{C,i} = (C_i \cdot \xi_i)^T \cdot (C_i \cdot \xi_i)$$

на траектории движения вспомогательной системы. При этом согласно теореме Ляпунова необходимым условием асимптотической устойчивости в целом является отрицательная определённость приращения функции Ляпунова на каждом шаге управления.

График изменения этой функции (рис. 1) представляет собою асимптотически убывающую функцию номера шага дискретности. Из графика следует, что необходимое условие теоремы Ляпунова оказывается выполненным, поскольку приращение этой функции на каждом шаге отрицательно. Таким образом, вспомогательная система асимптотически устойчива в целом.

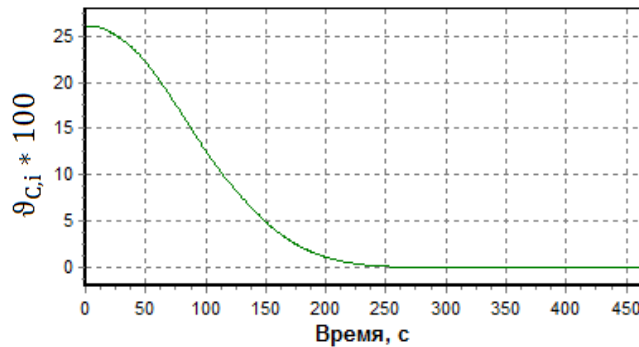


Рис. 1. Изменение функции Ляпунова при оптимальном движении МКА

Сравнительные результаты применения принципа минимума управления в дискретной системе управления ориентацией МКА «Аист-2» при совершении им пространственного поворота и штатно реализованной в этой системе логики управления представлены на приведённых ниже рис. 2-5. Графики изменения углового положения ССК в ИСК представлены на рис. 2, 3; графики изменения угловой

скорости – на рис.4, 5. На рис. 6, 7 представлены графики изменения управляющих ускорений двигателей-маховиков при совершении пространственного разворота.

Сравнительную оценку эффективности управления получим, вычисляя значение показателя качества системы управления на траектории движения:

$$H = \sum_i [(\varepsilon_{Dj})^T \cdot \varepsilon_{Dj}].$$

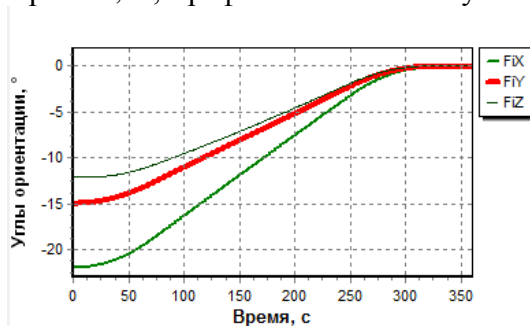


Рис. 2. Изменение углов ориентации при штатном движении МКА

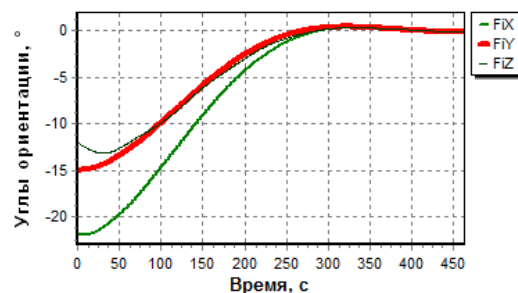


Рис. 3. Изменение углов ориентации при оптимальном движении МКА

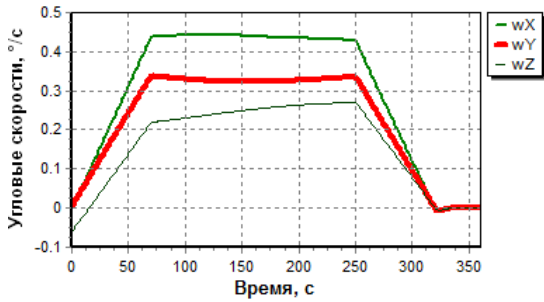


Рис. 4. Изменения угловых скоростей при штатном движении МКА

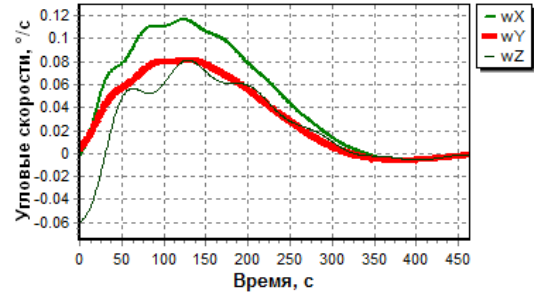


Рис. 5. Изменения угловых скоростей при оптимальном движении МКА

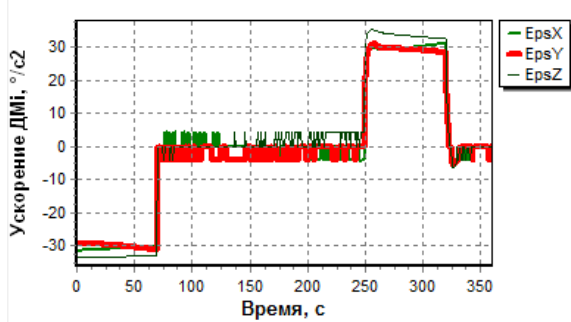


Рис. 6. Изменение управляющих ускорений ДМ при штатном движении МКА

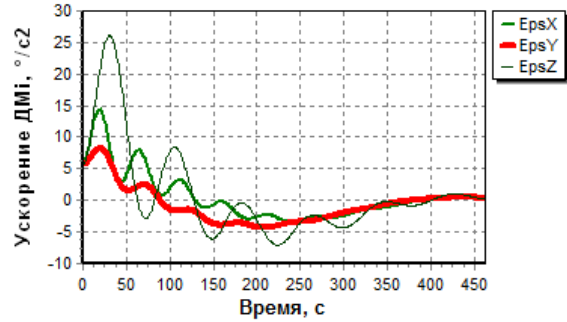


Рис. 7. Изменение управляющих ускорений ДМ при оптимальном движении МКА

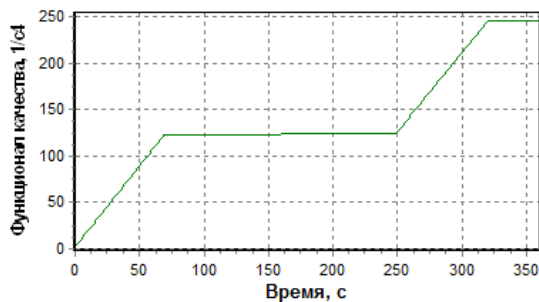


Рис. 8. Изменение показателя качества при штатном движении МКА

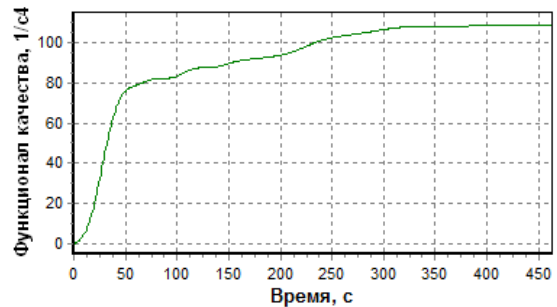


Рис. 9. Изменение показателя качества при оптимальном движении МКА

Из графиков (рис.8, 9) следует, что для штатного углового движения показатель качества равен $246.39 (1/c)^4$, а для оптимального движения он меньше и равен $108.34 (1/c)^4$. Таким образом, энергетические затраты на совершение оптимального пространственного поворота сокращаются более чем в два раза по сравнению с затратами при использовании штатной системы.

Заключение

На основе принципа минимума управления решена задача синтеза оптимального закона управления МКА при со-

вершении им пространственного поворота из одного заданного углового положения в другое. Показателем эффективности решения задачи является величина затрачиваемых на управление энергоресурсов. Задача решена при отсутствии ограничений на управляющие параметры.

Для оценки эффективности разработанного закона управления произведено математическое моделирование пространственного поворота на примере МКА «Аист-2» с исполнительными органами типа двигателей-маховиков, роторы которых параллельны главным центральным осям МКА. В процессе моделирования произведен сравнительный анализ затра-

чиваемых энергоресурсов на совершение пространственного поворота, как для случая оптимального поворота, так и для штатно реализуемого в системе управления движением МКА «Аист-2» с теми же граничными условиями.

Результаты моделирования позволяют сделать вывод об эффективности предложенного решения задачи синтеза оптимального управления.

Библиографический список

1. Левский М.В. Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 115-130.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Иностранная литература, 1960. 400 с.

3. Петрищев В.Ф. Принцип минимума управления в задаче синтеза дискретных систем // Материалы конференции

«Управление в морских и аэрокосмических системах» (УМАС-2014). Санкт-Петербург: ОАО «Концерн ЦНИИ «Электроприбор», 2014. С. 64-73.

4. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.

5. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1964. 402 с.

Информация об авторах

Петрищев Владимир Федорович, доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, АО «РКЦ «Прогресс», г. Самара. E-mail: Mail@samspace.ru. Область научных интересов: системы управления, системы автономной навигации, получение и обработка информации.

Шипов Максим Григорьевич, ведущий инженер-конструктор, АО «РКЦ «Прогресс», г. Самара. E-mail: maxim.shipov@gmail.com. Область научных интересов: проектирование систем управления движением космических аппаратов, математические методы и моделирование.

OPTIMIZATION OF SPATIAL TURNS OF «AIST-2» SMALL SPACECRAFT ON THE BASIS OF THE PRINCIPLE OF MINIMUM CONTROL

© 2015 V. F. Petrishchev, M. G. Shipov

JSC «Samara Space Center «Progress», Samara, Russian Federation

The efficiency of using the principle of minimum control in solving the task of synthesizing the system of controlling a spacecraft spatial turn by arbitrarily set angles up to 180 degrees is analyzed, with the “Aist-2” small spacecraft taken as an example. The tensor of inertia has the form of a diagonal matrix. Flywheels the rotors of which are parallel to the principal central axes of the spacecraft inertia are used as actuating devices of the system that controls motion round the center of masses. The control moment developed by each flywheel, is proportional to the angular acceleration of its rotor. The energy spent on the control, proportional to the sum of modules of angular accelerations of flywheel rotors is accepted as an index of the optimality of the spacecraft spatial turn. Euler dynamic equations are reduced to finite-difference recurrent relations to model unperturbed spacecraft motion around the center of masses. An auxiliary dynamic system is introduced the parameters of which are chosen on the basis of the solution of the task posed to use the principle of minimum control that ensures minimum costs of control. The results of mathematical modeling confirmed the efficiency of the proposed principle. In comparison with the traditional method of control (acceleration, motion at a constant angular velocity, braking) two-fold economy of electrical power is achieved.

Motion control system, control law, flywheel, matrix, small spacecraft.

References

1. Levskii M.V. A special case of spacecraft optimal attitude control. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2012. V. 51, Iss. 4. P. 587-601. doi: 10.1134/s1064230712020086
2. Bellman R. *Dinamicheskoe programmirovaniye* [Dynamic programming]. Moscow: Inostrannaya literatura Publ., 1960. 400 p.
3. Petrishchev V.F. Principle of minimum control in the problem of synthesis of discrete systems. *Proceedings of the conference «Control in marine and space systems» (UMAS-2014)*. St.-Petersburg: OAO «Kontsern TsNII «Elektropribor» Publ., 2014. P. 64-73. (In Russ.)
4. Raushenbah B.V., Tokar' E.N. *Upravleniye orientatsiyei kosmicheskikh apparatov* [Control of spacecraft orientation.]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 600 p.
5. Alekseev K.B., Bebenin G.G. *Upravleniye kosmicheskimi letatelnyimi apparatami* [Spacecraft control]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1964. 402 p.

About the authors

Petrishchev Vladimir Fedorovich, Doctor of Science (Engineering), Senior Research Scientist, SSC Progress, Samara, Russian Federation. E-mail: Mail@samspace.ru. Area of Research: control systems, systems of autonomous navigation, data acquisition and processing.

Shipov Maxim Grigorevich, leading design engineer, SSC Progress, Samara, Russian Federation. E-mail: maxim.shipov@gmail.com. Area of Research: designing spacecraft motion control systems, mathematical methods and modeling.