

УДК 629.735.45 + 621.833.24

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ АВИАЦИОННЫХ ПРИВОДОВ

© 2015 Д. В. Калинин, Ю. М. Темис

Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова, г. Москва

Представлены результаты моделирования нелинейных параметрических колебаний в авиационных зубчатых передачах при проходе системы через резонанс с сопровождающимся размыканием зубьев. Для цилиндрических передач исследуется двухмассовая динамическая модель с упругодемпфирующей связью, параметры которой получены из результатов расчёта конечно-элементной модели в течение всей фазы зацепления. Исследуются параметрические колебания системы с кинематическим возбуждением за счёт переменной жёсткости зацепления и нелинейными эффектами, определяемыми моделированием условия потери контакта зубьев. Показано, что максимальный уровень динамических напряжений в зацеплении при проходе через резонанс не превышает определённого значения, обусловленного присутствием разрывных колебаний в системе. Подробное моделирование функции жёсткости зацепления с помощью метода конечных элементов позволяет оценивать влияние геометрических параметров профилей зубьев на динамическое возбуждение передачи. На основе разработанной модели произведена оценка влияния коэффициента перекрытия передачи на динамические нагрузки в зацеплении и продемонстрировано снижение динамических нагрузок в передачах с коэффициентом перекрытия больше двух. Показана качественная сходимость результатов моделирования динамической нагруженности зацепления с результатами эксперимента.

Зубчатые передачи, динамическая модель, параметрические колебания, метод конечных элементов.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-3-193-202

Введение

Динамические нагрузки на зубьях шестерён, возникающие при работе зубчатых передач, определяют их надёжность и долговечность, шумовые и вибрационные свойства механизма. Для качественной оценки динамического состояния высоконагруженных авиационных редукторов необходима разработка математических моделей зацепления колёс, позволяющая оценивать динамические процессы в зацеплении с учётом геометрических параметров профиля, погрешности монтажа деталей, податливости опор и элементов конструкции и других факторов, влияющих на возбуждение крутильных колебаний в трансмиссиях.

Теоретическое исследование динамических процессов в зубчатых передачах основывается на двух подходах, получивших название вибрационной и ударной теорий динамики зубчатых передач.

В ударном методе оценки динамических нагрузок, предложенном А.И. Петрусевичем и М.Д. Генкиным [1] и далее развитым и Б.Ф. Шорром [2,5], процесс

зацепления рассматривается как два независимых явления – кромошный и срединный удары, что характерно для передач с относительно небольшими скоростями вращения. Вибрационный метод расчёта динамических нагрузок в зацеплении, развитый в работах Н.А. Ковалёва [3], предполагает в качестве основного источника возбуждения периодическое изменение жёсткости зацепления в процессе пересопряжения зубьев и вследствие наличия кинематической погрешности зубьев шестерён. В зарубежных работах (наиболее известны исследования Кахрамана [6,8] и Паркера [7]) традиционно используются динамические модели со сосредоточенными параметрами [4], в которых зубчатое зацепление представляется в виде жёстких дисков, соединённых упругодемпфирующей связью.

Наибольшую сложность при динамическом моделировании зубчатого зацепления представляет оценка уровня динамических напряжений, возникающих в элементах передачи. Наиболее точно такое решение может быть получено чис-

ленным методом решения динамических задач теории упругости, например методом конечных элементов (МКЭ) в динамической постановке. Однако использование МКЭ эффективно лишь для простейшей модели одной зубчатой пары. Оценка динамических свойств всей трансмиссии обычно проводится посредством аналитических динамических моделей системы с сосредоточенными параметрами. Свойства каждой подсистемы такой модели для более точного результата получают путём динамического моделирования в МКЭ.

Динамическая модель зубчатого зацепления

Динамическое моделирование процесса зацепления на основе ударной теории рассматривает процесс кромочного удара и так называемого срединного контакта зубьев передач, вызываемого нерасчётным входом вершин зубьев в контакт вследствие ошибок окружного шага. Согласно этой теории модифицированные зубчатые передачи, изготовленные с высокой точностью, должны иметь незначительное динамическое возбуждение, заметно отличающееся от уровня динамических нагрузок в передачах, выполненных без модификации. Однако на практике динамическое возбуждение зубчатых колёс имеет отличное от данной гипотезы поведение. В ударной теории подробно не рассматривается реальный процесс деформации в вершине зуба,

имеющего отличную от средней в зацеплении жёсткость, радиус кривизны и направление силы в зацеплении зубьев, контактирующих вне теоретической линии зацепления. Кроме того, авиационные зубчатые колёса в настоящее время изготавливаются с 4-й степенью точности и выше, в связи с чем погрешности профиля и окружного шага таких зубчатых колёс на порядок ниже деформации зубьев под нагрузкой.

Особенности поведения зубчатого зацепления вблизи зоны резонанса хорошо описываются с помощью теории нелинейных параметрических колебаний. Для описания параметрических крутильных колебаний в системе используют динамические модели с сосредоточенными параметрами, в качестве источника возбуждения в которых рассматривается периодически изменяющаяся жёсткость зацепления [9].

Для оценки поведения нелинейной системы зубчатых колёс рассмотрим двухмассовую систему с сосредоточенными присоединёнными массами (рис. 1), в которой зубчатая пара представляется в виде двух дисков массой m_1 и m_2 и моментами инерции J_1 и J_2 соответственно [10]. Оба диска соединены упруго-демпфирующей связью, направленной вдоль линии зацепления зубьев. Система уравновешена приложенными в противоположных направлениях к колёсам крутящими моментами M_1 и M_2 соответственно (рис. 1).

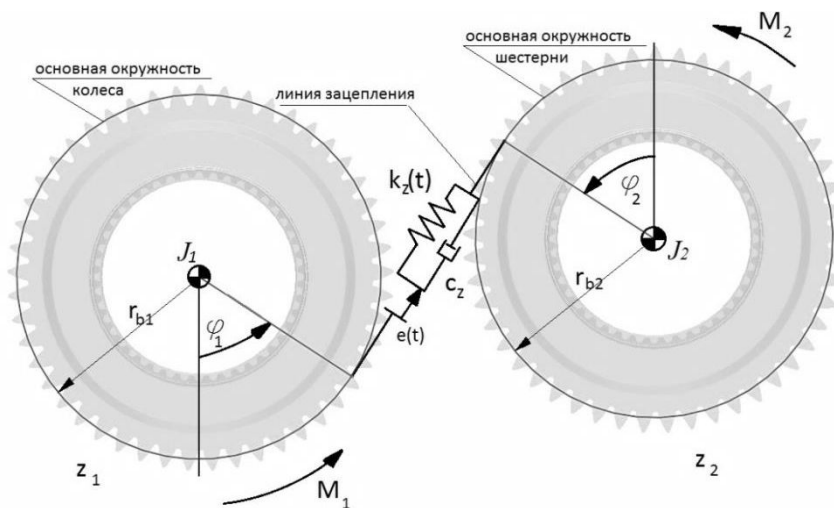


Рис. 1. Динамическая модель зацепления пары колёс

Записав для системы уравнения Лагранжа с обобщёнными координатами φ_1 и φ_2 , соответствующими угловым перемещениям тел зубчатых колёс, имеем:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + r_{b1} k_z(t) [r_{b1} \varphi_1 + r_{b2} \varphi_2 + e(t)] + \\ + r_{b1} c_z [r_{b1} \dot{\varphi}_1 + r_{b2} \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] = M_1(t), \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + r_{b2} k_z(t) [r_{b1} \varphi_1 + r_{b2} \varphi_2 + e(t)] + \\ + r_{b2} c_z [r_{b1} \dot{\varphi}_1 + r_{b2} \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] = M_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ – угловые ускорения и угловые скорости вращения колеса и шестерни соответственно; $k_z(t)$ – функция жёсткости зацепления; c_z – коэффициент демпфирования (выбирается на основе результатов экспериментов); r_{b1}, r_{b2} – радиусы основных окружностей зубчатых колёс; $e(t)$ – функция кинематической погрешности зацепления, задающая дополнительное перемещение профилей зубьев друг относительно друга. На практике отклонение окружного шага отличается для каждого зуба, поэтому данная функция изменяется с роторной частотой. В исследовании рассматривались варианты погрешности профиля через ошибки окружного шага по гармоническому закону с амплитудой, соответствующей степени точности изготовления колёс, либо кинематическая погрешность принималась постоянной для каждого зуба, что допустимо при высказанном выше предположении малого влияния данного источника возбуждения для колёс с высокой степенью точности.

Жёсткость зацепления $k_z(t, M)$ является функцией времени и нагрузки и зависит, в первую очередь, от числа находящихся в зацеплении в данный момент времени зубьев. Обычно в моделях используют пульсирующий сигнал для функции жёсткости зацепления с вычислением минимального и максимального значений как при помощи аналитических зависимостей, так и с помощью решения контактной задачи в МКЭ. Однако, исходя из предположения определяющего влияния на динамическое поведение передачи параметров зацепления через параметрическое возбуждение переменной жёсткости $k_z(t, M)$, необходимо подробное

моделирование процесса зацепления, учитывающее влияние геометрии зацепляющихся зубьев на характер кинематической погрешности зацепления. В программном комплексе Ansys Workbench с помощью модуля Transient Structural моделировался процесс зацепления зубьев для объёмной модели пары зубчатых колёс. Конечно-элементная модель с картиной напряжённого состояния (НДС) в произвольный момент времени показана на рис. 2. Модели колёс закреплялись на шарнирах, разрешающих угловые перемещения (revolute joint); для шарнира ведущего колеса задавался закон изменения угловой скорости, обеспечивающий плавный разгон передачи; к ведомому колесу прикладывался внешний крутящий момент по направлению, обратному вращению ведомого колеса. Решалась контактная задача с трением, имитирующим коэффициент трения в масле $f=0,02$, учитывалось демпфирование в материале; шаг интегрирования выбирался равным 1×10^{-5} с. Для устранения влияния динамической составляющей процесс зацепления моделировался при скорости вращения ведущей шестерни 5 об/мин. Вычислялись угловые перемещения тел зубчатых колёс φ_1 и φ_2 , из которых находилось относительное перемещение точек рабочих поверхностей зубьев вдоль линии зацепления, и далее определялась жёсткость зацепления.

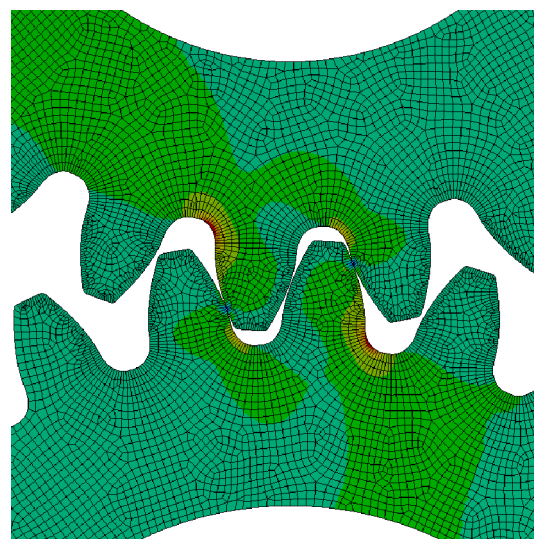


Рис. 2. Конечно-элементная модель зубчатой передачи с картиной НДС по первым главным напряжениям

Для сравнения с результатами экспериментального исследования зубчатых колёс на стенде в ЦИАМ параметры зубчатого зацепления модели выбирались соответствующими параметрам испытываемых колёс ($m = 4$ мм, $z_1 = 49$, $z_2 = 51$, $b=18$

мм, $M_{кр}=2000$ Нм). Испытательный стенд имеет механически замкнутую схему с созданием крутящего момента через предзагрузку с помощью закрутки одного из валов гидравлическим нагружающим устройством [11].

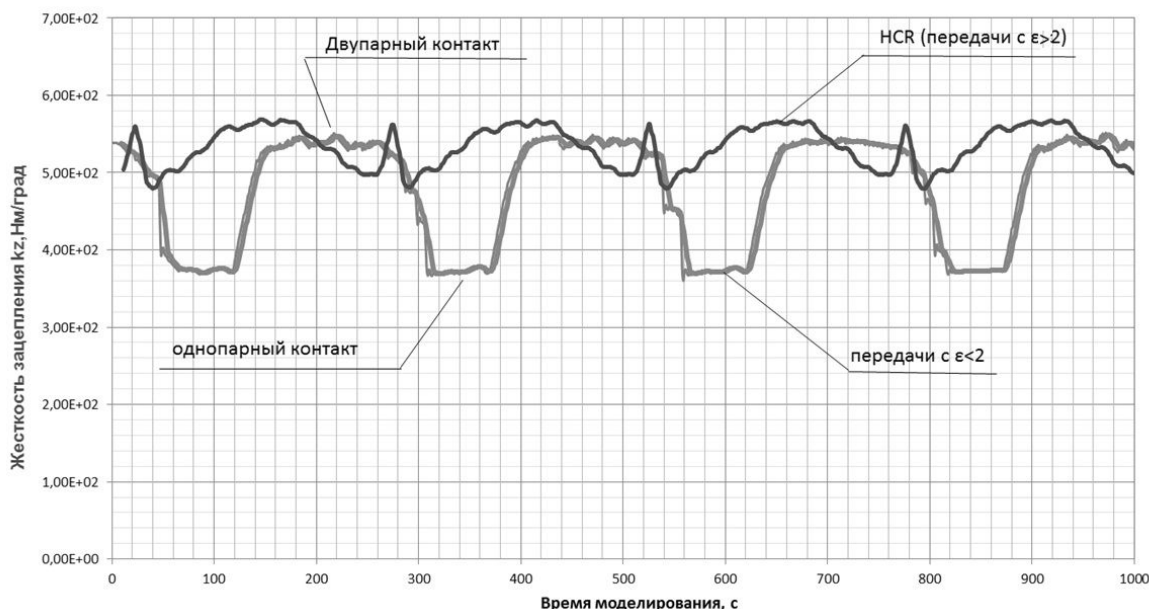


Рис. 3. Жёсткость зацепления для передач с $\epsilon < 2$ и $\epsilon > 2$ (HCR), полученная расчётом в МКЭ

На рис. 3 представлены результаты моделирования с помощью МКЭ жёсткости зацепления зубчатой пары с коэффициентом перекрытия $\epsilon < 2$ и высоким коэффициентом перекрытия $\epsilon > 2$ передачи (HCR – англ. high contact ratio) с аналогичными параметрами профиля зубьев. Как видно из рисунка, передачи с высоким коэффициентом перекрытия имеют меньший размах колебаний функции жёсткости и закон изменения, близкий к гармоническому, в отличие от пульсирующего у передач с $\epsilon < 2$. Переменная составляющая жёсткости зацепления для передач с $\epsilon < 2$ составляет 22-38%, для передач HCR 9-17%. Полученная с помощью МКЭ периодическая функция жёсткости $k_z(t)$ может быть использована при решении системы уравнений (1) как аппроксимация через разложение функции в ряд Фурье:

$$k_z(t) = k_0 + \sum_{n=1}^N k_n \cdot \cos(n\omega_z t + \gamma_n), \quad (2)$$

где ω_z – частота пересопряжения зубьев (количество входов в зацепление зубьев за единицу времени).

Экспериментальные исследования динамики зубчатых передач показывают, что на резонансных режимах работы зубчатой передачи динамические нагрузки возрастают в 2÷4 раза, а работа передачи может сопровождаться размыканием зубьев. Возможность размыкания зубьев в модели учитывается условием потери упругой и демпфирующей связей в зацеплении в момент отрицательного значения разности взаимных перемещений зубьев до выборки бокового зазора $j_{n \min}$, после чего восстанавливается контакт передачи между нерабочими боковыми поверхностями зубьев [8]:

$$F_{\text{дин}}(t, \varphi_1, \varphi_2) = \begin{cases} k_z(t) \cdot (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) + c_z \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot r_{b1} + \dot{\varphi}_2 \cdot r_{b2}), & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) > 0, \\ 0, & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) \leq 0 \\ & \text{и } |(\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2})| \leq j_{n \min}; \\ k_z(t) \cdot (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2} - j_{n \min}) + c_z \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot r_{b1} + \dot{\varphi}_2 \cdot r_{b2}), & \text{если } (\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2}) \leq 0 \\ & \text{и } |(\varphi_1 \cdot r_{b1} + \varphi_2 \cdot r_{b2})| \geq j_{n \min}. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, задача динамики зубчатого зацепления сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых связаны условиями потери контакта зубьев (3). В общем случае, при постоянных значениях крутящих моментов ($M_1(t) = \text{const}$ и $M_2(t) = \text{const}$) и использовании разложения функции жёсткости в ряд Фурье (2), система дифференциальных уравнений (1) может быть сведена к одному уравнению Матье, описывающему систему с параметрическими колебаниями. Однако известное решение уравнения Матье усложняется наличием условия потери контакта зубьев (3), определяющим нелинейное поведение системы. Поэтому необходимо применение численных методов для поиска решений системы дифференциальных уравнений (1).

Результаты моделирования. Сравнение с экспериментом

Для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений с ограничениями использован пакет Matlab Simulink с построением математической модели, описывающей динамику зацепления в виде блочной схемы, и численным решением системы уравнений на основе одношаговых явных методов Рунге-Кутты 4-го и 5-го порядка.

Применение пакета Matlab Simulink позволяет анализировать полученные результаты широким набором инструментов,

таким как построение амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) системы в реальном времени, проведение спектрального анализа и др.

Результаты решения системы уравнений (1) показывают присутствие параметрического резонанса на зубцовой частоте f_z , который имеет вид, характерный для нелинейных систем с плавным нарастанием динамической составляющей при проходе в сторону снижения оборотов системы и ступенчатым ростом амплитуд при нарастании оборотов, что говорит о неустойчивом характере колебаний системы в зоне резонанса [3,7]. Экспериментально показано [3,5,7], что резонансные явления в зубчатых передачах проявляются в основном на частотах, кратных 0.5, 1, 1.5, 2 основного резонанса, а присутствие «половинных» гармоник является следствием параметрического характера резонансных колебаний в системе. В результате динамического моделирования зацепления также получен рост амплитуды крутильных колебаний на половинной и кратной зубцовой гармонике частотах. На рис. 4 показаны результаты численного моделирования крутильных колебаний с помощью разработанной аналитической модели с проходом системы через собственную и кратные ей частоты для коэффициента динамической нагрузки в зацеплении K_{FV} с моделированием условия разрыва контакта зубьев и без учёта потери контакта.

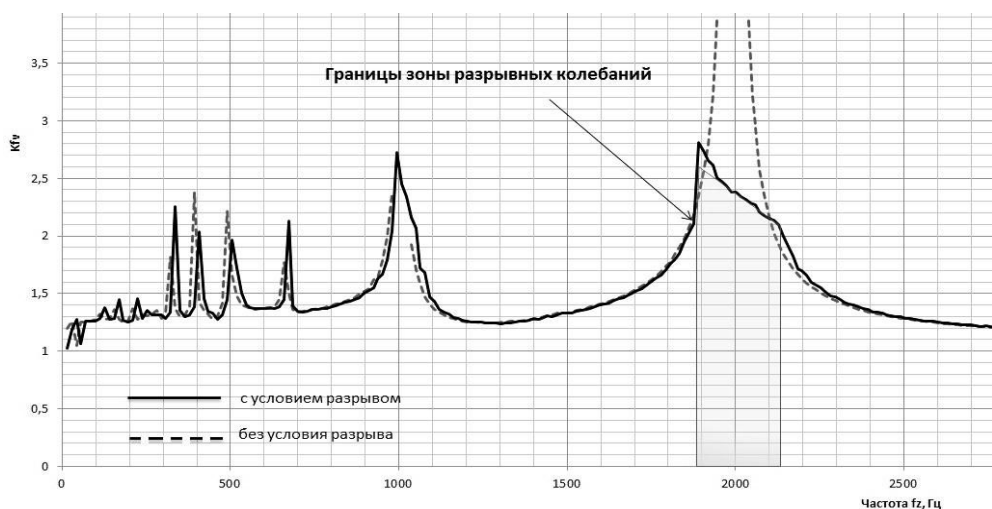


Рис. 4. Зависимость коэффициента динамической нагрузки от частоты вращения

Для системы уравнений с моделированием разрыва контакта зубьев характерно ярко выраженное нелинейное поведение в определённом диапазоне, за пределами которого поведение зацепления описывается так же, как и для системы без учёта условия размыкания зубьев. При увеличении частоты вращения на проходе через резонанс динамические нагрузки скачкообразно возрастают до максимального значения, а затем снижаются по двум разным зависимостям. При этом максимальное значение динамической нагрузки определяется не уровнем демпфирования в системе (которое оказывает очень слабое влияние на динамику передачи), а моментом начала размыкания зубьев при приближении частоты системы к резонансной. АЧХ для системы (1) без

учёта разрыва контакта зубьев (3) имеет линейный характер, а максимальные значения динамических нагрузок в этом случае имеют значения, на порядок превышающие существующие уровни в зубчатых передачах с высокой виброактивностью.

На рис. 5 показано сравнение динамического отклика системы при уменьшении a и увеличении b частоты вращения зубчатых колёс. При снижении оборотов динамические нагрузки в системе продолжают расти и после прохода резонансной частоты до определённого значения, определяемого, в том числе, скоростью изменения частоты вращения, после чего система скачком переходит в устойчивое состояние.

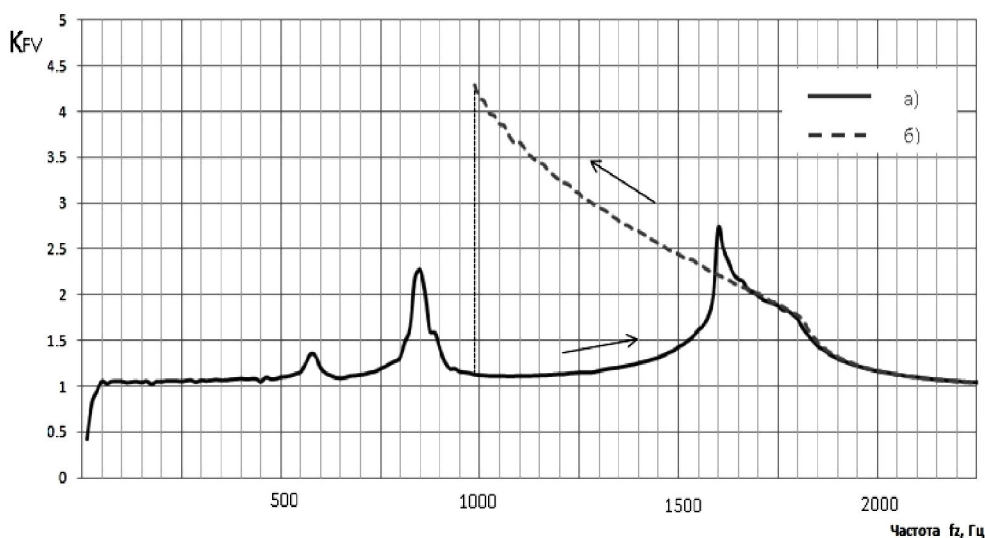


Рис. 5. Динамический отклик системы при проходе с увеличением оборотом (а) и снижении (б)

Разработанная аналитическая модель в сочетании с моделированием процесса зацепления колёс в МКЭ позволяет оценивать влияние геометрии профиля зубьев через подробное моделирование кинематической погрешности зацепления, определяемой деформацией зубьев под нагрузкой. Для оценки влияния коэффициента перекрытия передачи на уровень динамических нагрузок с помощью МКЭ были получены графики изменения жёсткости зацеплений для передачи с $\epsilon < 2$ и передачи с высоким коэффициентом перекрытия $\epsilon > 2$ (рис.3), которые далее пе-

редавались в решатель для системы уравнений (1). Результаты моделирования представлены на рис. 6.

Как видно из рис. 6, динамические нагрузки в передачах с коэффициентом перекрытия $\epsilon = 2,08$ в 1,3 раза ниже в сравнении с нагрузками в передачах со стандартными параметрами профиля и коэффициентом перекрытия $\epsilon = 1,68$. Резонансная частота колебаний повышается для передач с $\epsilon > 2$ из-за увеличения средней жёсткости зацепления в результате постоянного нахождения в контакте двух пар зубьев. При этом диапазон частот с

присутствием разрывных колебаний и неустойчивым поведением системы значительно уже для таких передач, а величина

коэффициента динамичности на до- и зарезонансных режимах близка к 1.

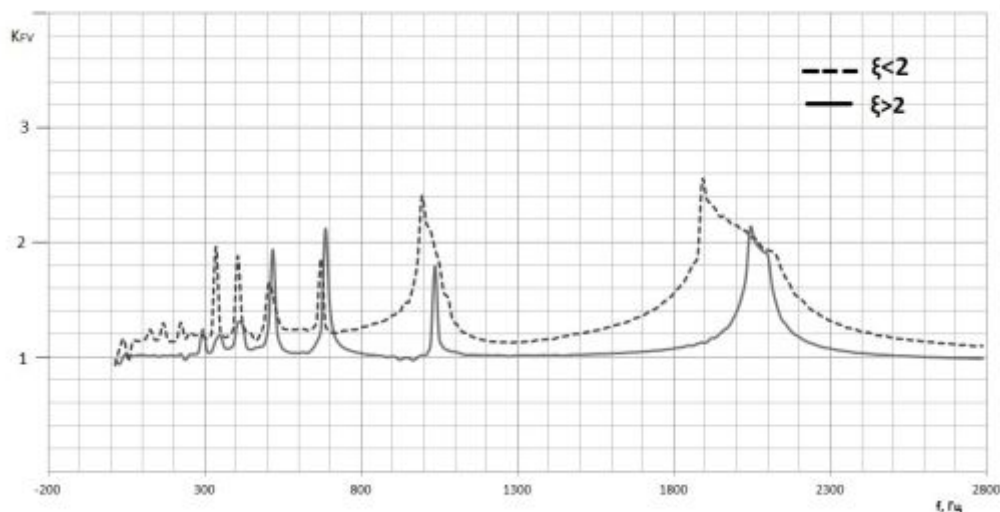


Рис. 6. Сравнение уровней динамических нагрузок для передач с различным коэффициентом перекрытия

Стоит отметить, что важным результатом моделирования является подтверждение существования разрывных колебаний в передаче при проходе через резонансные частоты, неоднократно обнаруженных в ходе экспериментов. На рис. 6 показано сравнение результатов моделирования зубчатой пары $z_1 = 49$ и $z_2 = 51$, используемой на экспериментальном стенде ЦИАМ [11], с результатами измерений динамических напряжений этой

зубчатой пары на всём рабочем диапазоне. Оценка коэффициента динамичности в ходе эксперимента проводилась на основе результатов тензометрирования по впадинам зубьев экспериментальных колёс на механически замкнутом стенде для диапазона частот вращения $n = 500 \div 6000$ об/мин с шагом 200 об/мин. Частоты вращения зубчатых колёс и пересопряжения зубьев определялись с помощью индукционных датчиков угла поворота.

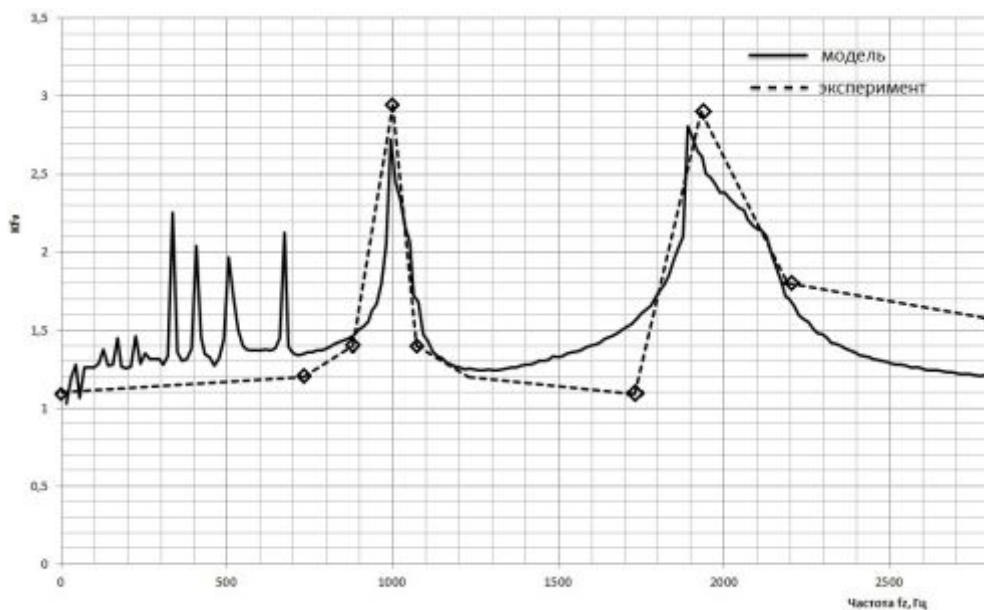


Рис. 7. Изменение коэффициента динамической нагрузки передачи в зависимости от оборотов. Сравнение результатов моделирования и эксперимента

Из рис. 7 видна удовлетворительная сходимость результатов моделирования динамики передачи и её экспериментального исследования. На частотах вращения 1000 об/мин и 1950 об/мин видно совпадение максимальных значений амплитуд коэффициента динамической нагруженности при моделировании и эксперименте.

Неустойчивое поведение динамической системы зубчатого зацепления вблизи резонансной частоты, подтверждённое математическим моделированием и экспериментом, создаёт неопределённость при определении динамической составляющей нагрузки в зоне частот вращения, близких к резонансной, и может приводить к нестабильной работе передачи. Очевидно, что при проектировании необходимо избегать работы зубчатой передачи вблизи зон неустойчивости и по возможности выводить режим работы передачи в зарезонансную зону.

Заключение

Результаты динамического моделирования зубчатого зацепления с помощью предложенной аналитической модели демонстрируют нелинейное поведение системы вблизи резонансных частот, которое при определённых условиях может сопровождаться потерей контакта зубьев. Также показано, что вблизи резонансных частот передача может иметь различный уровень динамических нагрузок, определяемый направлением изменения её частоты вращения. Подтверждено, что передачи с коэффициентом перекрытия больше двух имеют меньшую виброактивность в 1,3 раза в сравнении с передачами со стандартным профилем, а также имеют более устойчивое поведение вблизи резонансных частот. Результаты моделирования имеют удовлетворительную сходимость с экспериментом, проведённым на экспериментальном стенде в ЦИАМ.

Библиографический список

1. Петрусевиц А.И., Генкин М.Д., Гринкевич В.К. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами. М.: ИМАШ АН СССР, 1956. 134 с.
2. Шорр Б.Ф. К расчёту динамических нагрузок на зубьях прямозубых цилиндрических колёс // В сб.: Прочность и динамика авиационных двигателей. Вып. 5. М.: Машиностроение, 1969. С. 127-162.
3. Ковалёв Н.А. Колебания зубчатых передач при ступенчатом изменении жёсткости и постоянной ошибке шага зацепления // Известия АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. 1961. № 2. С. 92-101.
4. Вибрации в технике: справочник. В 6 т. Т. 3. Колебания машин, конструкций и их элементов / под ред. Ф. Диментерберга, К.С. Колесникова. М.: Машиностроение, 1980. 544 с.
5. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчёт на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
6. Kahraman, A., Blankenship G.W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 1997. V. 64, Iss. 1. P. 217-226. doi.org/10.1115/1.2787276
7. Parker R.G., Vijayakar S.M., Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons // Journal of Sound and Vibration. 2000. V. 273, Iss. 3. P. 435-455. doi.org/10.1006/jsvi.2000.3067
8. Kahraman A., Lim J., Ding H.A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction // 12th IFToMM World Congress, Besançon (France), June 18-21, 2007.
9. Singh R., Houser D.E. Non-Linear Dynamic Analysis of Geared Systems – Technical Report 90-C-020 AVSCOM, NASA, 1991.
10. Kalinin D.V., Temis Y.M. Non-linear dynamic of geared system // Materials of The

International conference MSM2014, Opole, Poland. 2014.

11. Калинин Д.В., Кожаринов Е.В., Панов С.А. Экспериментальное исследо-

вание бифуркационных процессов в зубчатых передачах // Сб. тезисов международного форума «Двигатель 2014». М.: 2014.

Информация об авторах

Калинин Дмитрий Владимирович, начальник сектора прочности и ресурса авиационных приводов, Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова, г. Москва. E-mail: kalinin@ciam.ru. Область научных интересов: конструкция, прочность и динамическое моделирование авиационных зубчатых передач.

Темис Юрий Моисеевич, доктор технических наук, начальник отдела математического моделирования, Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова, г. Москва. E-mail: tejoum@ciam.ru. Область научных интересов: многодисциплинарные исследования процессов в газотурбинных двигателях, модели пластичности материалов.

DYNAMIC MODELLING OF NON-LINEAR VIBRATIONS IN CYLINDRICAL TOOTH GEARING OF AIRCRAFT DRIVE SYSTEMS

© 2015 D. V. Kalinin, J. M. Temis

Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow, Russian Federation

The results of modeling nonlinear parametric vibrations in aircraft tooth gears are presented in the paper. Resonance vibration with loss of tooth contact is analyzed. A lumped-parameter dynamic model of cylindrical gears is investigated using the results of gear stiffness modeling obtained from a finite element model for simulating elastic-damping connection for each step during one phase of mesh. Parametric vibrations of a system with base excitation due to variable mesh stiffness and non-linear effects determined by modeling the conditions of loss of tooth contact are studied. It is shown that the maximal level of dynamic loads does not exceed a limit value determined by the presence of discontinuous vibrations in the system. A number of parametric studies are presented to demonstrate the influence of major gear contact ratio on the resultant dynamic behavior. The results obtained by the numerical simulation of steady-state responses of two different pairs of spur gears are in satisfactory agreement with the experimental results.

Geared pairs, dynamic model, parametric vibrations, finite element method.

References

1. Petrushevich A.I., Genkin M.D., Grinkevich V.K. *Dinamicheskie nagruzki v zubchatykh peredachakh s pryamozubymi kolesami* [Dynamic loads in cylindrical spur gears]. Moscow: IMASH, AS USSR Publ, 1956. 134 p.
2. Shorr B.F. Calculation of dynamic loads in teeth of spur gears. Strength and dynamic of aviation engines. *V sb.: Prochnost' i dinamika aviatsionnykh dvigateley*. Iss. 5. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969. P. 127-162. (In Russ.)
3. Kovalev N.A. Oscillations of spur gears with stepped stiffness variation and constant gear pitch error. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i mashinostroenie*. 1961. No. 2. P. 92-101. (In Russ.)
4. *Vibratsii v tekhnike: spravochnik. V 6-ti tomakh. T. 3. Kolebaniya mashin, konstruktsiy i ikh elementov* [Oscillations in

machinery: Reference book. V. 3. Vibration in machines, structures and their elements / ed. by F. Dimenterberg, K.S. Kolesnikov]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1980. 544 p.

5. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. *Raschet na prochnost' detaley mashin* [Strength calculation for machine parts]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1979. 702 p.

6. Kahraman A., Blankenship G.W. Experiments on nonlinear dynamic behavior of an oscillator with clearance and periodically time-varying parameters. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 1997. V. 64, Iss. 1. P. 217-226. doi.org/10.1115/1.2787276

7. Parker R.G., Vijayakar S.M., Imajo T. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental compari-

sons. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. V. 273, Iss. 3. P. 435-455. doi.org/10.1006/jsvi.2000.3067

8. Kahraman A., Lim J., Ding H. A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction. *12th IFTOMM World Congress*, Besançon (France), June 18-21, 2007.

9. Singh R., Houser D.E.: Non-Linear Dynamic Analysis of Geared Systems – Technical Report 90-C-020 AVSCOM, NASA, 1991.

10. Kalinin D.V., Temis Y.M. Non-linear dynamic of geared system. *Materials of The International conference MSM2014*, Opole, Poland. 2014.

11. Kalinin D.V., Kozharinov E.V., Panov S.A. Experimental search of bifurcation in aviation gears. *Abstract collection of International forum «Engine 2014»*. Moscow: 2014. (In Russ.)

About the Authors

Kalinin Dmitry Vladimirovich, Head of the Department of Aircraft Gear Strength and Service Life, Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow, Russian Federation. E-mail: kalinin@ciam.ru. Area of Research: design, strength and dynamic modeling of aviation transmission gears.

Temis Jury Moiseevich, Doctor of Science (Engineering), Professor of the Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, Head of the Department of Mathematical Modeling, Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow, Russian Federation. E-mail: tejoum@ciam.ru. Area of Research: multidisciplinary modeling of gas-turbine engine elements, models of plasticity.