

МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ УГЛОВОГО УСКОРЕНИЯ ПО ТАНГАЖУ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ИЗМЕРЕНИЙ УГЛА И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ТАНГАЖА

© 2024

О. Н. Корсун доктор технических наук, профессор, руководитель научно-образовательного центра;
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, Москва;
доктор технических наук, профессор,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);
marmotto@rambler.ru

С. Горо аспирант;
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);
gorosekoi@gmail.com

М. Х. Ом докторант, кандидат технических наук;
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);
mounghtangom50@gmail.com

Предлагается алгоритм для оценивания углового ускорения по тангажу при наличии шумов измерений. Угловые скорости и углы Эйлера, фиксируемые навигационной системой, интерполируются при помощи Эрмитовых сплайнов третьего порядка, дифференцирование которых позволяет найти оценки углового ускорения по тангажу. В данной работе для сравнения анализируется известный метод численного дифференцирования – метод Поплавского аппроксимации первой производной, основанный на полиномиальной регрессии. Результаты моделирования, полученные с помощью предложенного алгоритма, сравниваются с результатами, полученными с использованием метода Поплавского. Результаты показывают, что предложенный в работе алгоритм оценки углового ускорения по тангажу обеспечивает более высокую точность, в том числе при наличии шумов измерений, за счёт комплексирования информации от двух различных датчиков, измеряющих угол тангажа и угловую скорость по тангажу.

Метод численного дифференцирования; ускорение по тангажу; сплайн Эрмита; метод дифференцирования Поплавского; полётные данные; сглаживание сигналов

Цитирование: Корсун О.Н., Горо С., Ом М.Х. Метод оценивания углового ускорения по тангажу на основе анализа измерений угла и угловой скорости тангажа // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2024. Т. 23, № 3. С. 58-68. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-3-58-68

Введение

Оценивание аэродинамических коэффициентов имеет большое значение для проектирования систем управления и моделирования лётно-технических характеристик самолёта [1; 2]. При этом необходимо точно оценить угловое ускорение по тангажу. Традиционно угловое ускорение по тангажу может быть оценено путём дифференцирования угловой скорости по тангажу с использованием известных традиционных методов численного дифференцирования. Но выходные сигналы датчиков содержат шумы, то есть случайные погрешности измерений. Метод, предлагаемый в настоящей статье, предполагает измерение двух величин: угла тангажа одним датчиком и угловой скорости другим датчиком. Анализ этих двух измерений может значительно повысить точность и надёжность оценки углового ускорения.

Преимущество такого подхода заключается в повышении точности расчётов ускорения по тангажу, снижении влияния шумов измерений и более точном описании

всей динамики самолёта. Вместе с тем у этого метода есть некоторые ограничения, связанные с повышением вычислительной сложности и необходимости тщательного подбора узлов сплайна.

В целях фильтрации шумов измерений и оценки производных широко используются, например, методы численного дифференцирования, фильтры Калмана и сплайн-аппроксимация [3 – 5].

В задаче численного дифференцирования хорошие результаты даёт известный метод Поплавского [4]. Этот метод обладает способностью к значительному сглаживанию зашумлённых сигналов.

Традиционно методы численного дифференцирования становятся неэффективными при наличии шумов измерений [5; 6]. Метод Поплавского превосходит их в аппроксимации производных при наличии шумов измерений, поскольку использует сглаживание на «скользящем» интервале (окне). Увеличение ширины окна повышает степень сглаживания и подавляет влияние шумов, хотя и искажает в некоторой степени динамические свойства сигнала.

Различные варианты фильтра Калмана в целом дают хорошие результаты, однако как показано в работе [7], простая аппроксимация сплайнами во многих случаях оказывается более эффективной, чем относительно сложный фильтр Калмана. В предлагаемом алгоритме, как и в работе [7], используются преимущества сплайн-аппроксимации, прежде всего свойства Эрмитовых сплайнов третьего порядка.

Описание метода Поплавского

Задача оценивания производных угловой скорости возникла в практике обработки данных лётных испытаний в связи с необходимостью определения аэродинамических моментов, действующих на летательный аппарат в полёте, которые пропорциональны производным соответствующих угловых скоростей летательного аппарата, измеряемых в полёте. Опыт практического определения производных угловых скоростей с использованием алгоритма Поплавского показал, что рациональный выбор длительности «скользящего» интервала («скользящего» окна) обеспечивает компромисс между хорошим сглаживанием шумов и удовлетворительным уровнем динамических погрешностей при аппроксимации сигнала [8; 9]. В формуле Поплавского при оценке первой производной функции $y(t)$ используются сглаживающие полиномы:

$$S = \sum_{j=-m}^m b_j y(t_j) , \quad (1)$$

где $b_j = \frac{5[5(3m^4 + 6m^3 - 3m + 1)j - 7(3m^2 + 3m - 1)j^3]}{h(m^2 - 1)m(m + 2)(4m^2 - 1)(2m + 3)}$; b_j – коэффициенты сглаживающего полинома; m – число, определяющее количество отсчётов в «скользящем» окне;

$h = t_{i+1} - t_i$ интервал дискретизации, c .

Общее число обрабатываемых точек (отсчётов) на «скользящем» интервале $2m + 1$, а длина «скользящего» интервала во времени $2mh$.

Алгоритм аппроксимации кубическим сплайном Эрмита

Для того, чтобы применить формулы Эрмитова сплайна третьего порядка, необходимо сгенерировать узлы в соответствии с интервалом времени обработки и длиной исходного сигнала. Для удобства обычно выбирают узлы таким образом, чтобы интервал между двумя узлами был постоянным [10 – 13].

Пусть требуется аппроксимировать некоторую скалярную функцию $f(x)$, определённую на интервале $x \in [x_1, x_M]$. Пусть на этом интервале заданы M значений $x_j, j = 1, 2, \dots, M$, которые называются узлами сплайна. Тогда для точки, принадлежащей отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, значение аппроксимирующего сплайна рассчитывается по формуле [10; 14]:

$$S(x) = \varphi_1(t)f_i + \varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)h_i f'_i + \varphi_4(t)h_i f'_{i+1}, \quad (2)$$

где $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$, $f'_{i+1} = f'(x_{i+1})$,

$$\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t), \varphi_2(t) = t^2(3-2t), \varphi_3(t) = t(1-t)^2,$$

$$\varphi_4(t) = -t^2(1-t), h_i = x_{i+1} - x_i, t = (x - x_i)/h_i.$$

Такой сплайн на всем отрезке $x \in [x_1, x_M]$ является непрерывной скалярной функцией, и имеет непрерывную первую производную [14 – 17]. Этим выбором определяются свойства гладкости формируемых управлений. Значения аппроксимируемой функции и её производной в узлах сплайна формируют вектор априорно неизвестных параметров, однозначно описывающих сплайн [18; 19].

Постановка задачи

Из общей математической модели движения летательного аппарата [20] выбраны следующие уравнения, которые описывают движение в каналах тангажа и крена:

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_y(t) \sin \gamma(t) + \omega_z(t) \cos \gamma(t), \quad (3)$$

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega_x(t) - \operatorname{tg} \vartheta(t) [\omega_y(t) \cos \gamma(t) - \omega_z(t) \sin \gamma(t)], \quad (4)$$

$$X(t) = [\vartheta(t), \gamma(t)]^T,$$

$$U(t) = [\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)]^T,$$

где $X(t)$ – вектор состояния; $\vartheta(t), \gamma(t)$ – угол тангажа и угол крена; $U(t)$ – вектор параметров управления; $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ – угловая скорость по крену, угловая скорость по рысканию и угловая скорость по тангажу, соответственно.

Для применения предлагаемого метода определения производной угла тангажа допустим, что боковое движение пренебрежимо мало, то есть угол крена и угловые скорости крена и рыскания в уравнениях (3) и (4) равны нулю. Тогда модель объекта принимает следующий вид:

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = \omega_z(t), \quad (5)$$

$$X(t) = \vartheta(t),$$

$$U(t) = \omega_z(t).$$

На рис. 1 представлены сигналы, использованные в данном исследовании для оценивания углового ускорения по тангажу по предложенному алгоритму. Используются как угол тангажа, так и угловая скорость по тангажу при условии наличия шумов измерений. Следует отметить, что для оценивания углового ускорения по тангажу методом Поплавского требуется только угловая скорость по тангажу также при наличии шумов измерений.

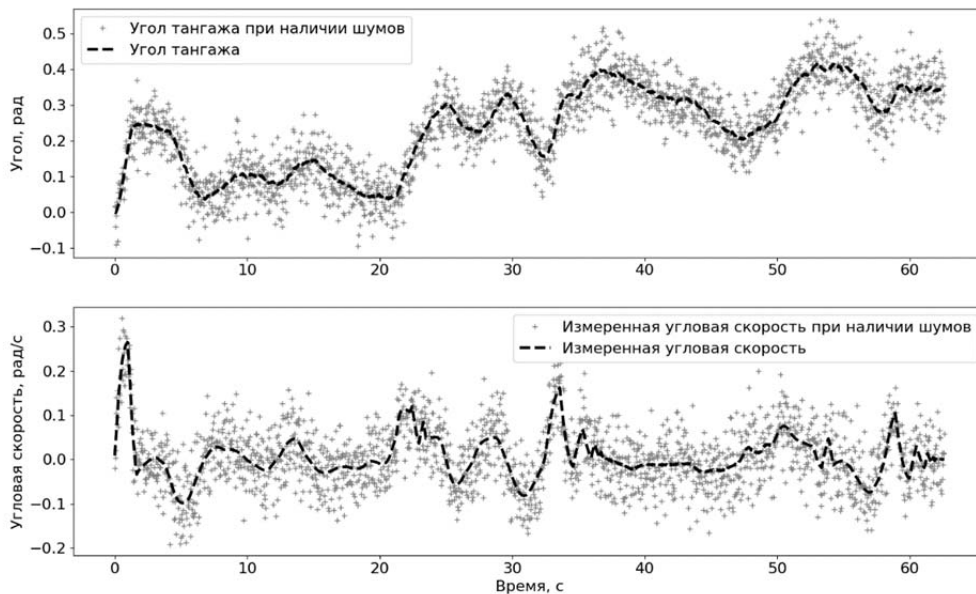


Рис. 1. Сигналы, необходимые для оценивания углового ускорения по тангажу

Алгоритм оценивания углового ускорения по тангажу

Вывод расчётных формул предложенного алгоритма осуществлялся с учётом формулы (2), используемой для интерполяции сигнала тангажа Эрмитовым сплайном 3-го порядка. С учётом (1) был предложен алгоритм оценивания первой и второй производных, где исходный угол тангажа на участке между рассматриваемыми узлами обозначен f_i и f_{i+1} , а угловая скорость тангажа f'_i и f'_{i+1} . Угловое ускорение $y''(x)$ по тангажу оценивается с помощью следующих формул:

$$y(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{(x-x_i)}{h_i} + \alpha_2 \frac{(x-x_i)^2}{h_i^2} + \alpha_3 \frac{(x-x_i)^3}{h_i^3}, \quad (7)$$

$$y'(x) = \frac{\alpha_1}{h_i} + 2\alpha_2 \frac{(x-x_i)}{h_i^2} + 3\alpha_3 \frac{(x-x_i)^2}{h_i^3}, \quad (8)$$

$$y''(x) = \frac{2\alpha_2}{h_i^2} + 6\alpha_3 \frac{(x-x_i)}{h_i^3}, \quad (9)$$

где $\alpha_0 = f_i$; $\alpha_1 = f'_i h_i$; $\alpha_2 = -3f_i + 3f_{i+1} - 2f'_i h_i - f'_{i+1} h_i$; $\alpha_3 = 2f_i - 2f_{i+1} + f'_i h_i + f'_{i+1} h_i$;
 $y''(x)$ – оценка углового ускорения по тангажу.

Для оценивания углового ускорения по тангажу моделировался участок полёта длительностью 64 с при частоте дискретизации 16 Гц. Для сплайн-аппроксимации задавались 120 узлов. Случайные погрешности по тангажу и угловой скорости моделировались гауссовским случайным процессом с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическими отклонением соответственно 0,05 рад и 0,05 рад/с. Сравнение выполнялось для трёх наборов экспериментальных результатов путём изменения длительности «скользящего» окна при использовании метода Поплавского.

Экспериментальные результаты

Задача 1

Результаты, полученные при оценивании углового ускорения по тангажу, представлены на рис. 2. Здесь параметр «скользящего» окна, используемого в методе Поплавского, $m = 11$, что соответствует длительности окна $T_{\text{окна}} = 2mh = 2 \cdot 11(1/16) \approx 1,4$ с.

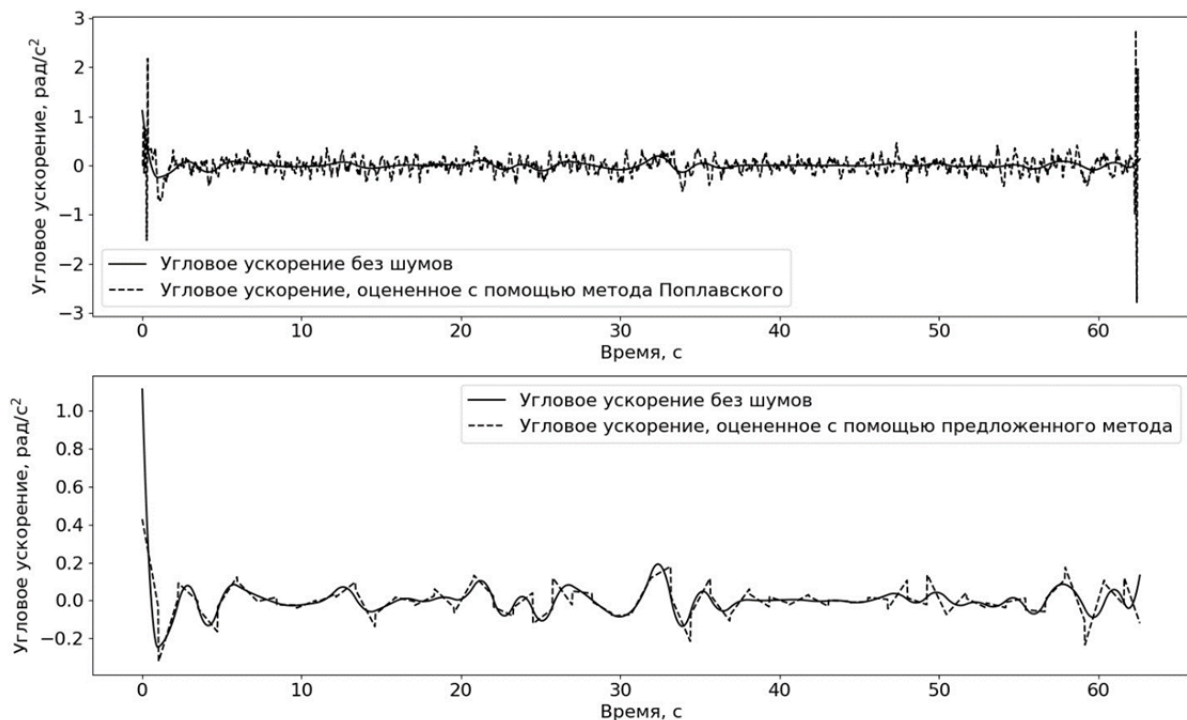


Рис. 2. Истинные значения углового ускорения по тангажу и оценки, полученные предложенным методом и методом Поплавского

Значения среднеквадратического отклонения (СКО), оценивающие эффективность предложенного метода и метода Поплавского, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и расчётными сигналами

$m = 11$		
№	Описание параметра	СКО (рад/с ²)
1.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым предложенным методом	0,0667
2.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым методом Поплавского	0,1641

Согласно результатам, представленным в табл. 1, очевидно, что предложенный метод проявляет лучшую эффективность, чем метод Поплавского. Следует отметить, что среднеквадратические отклонения оценённого углового ускорения по тангажу при применении предложенного метода, представленные в табл. 1, рассчитаны с использованием всего интервала обработки. Согласно рис. 1, очевидно, что метод Поплавского недостаточно эффективен для получения точных производных в граничных точках. Предлагается при расчёте среднеквадратических отклонений обрезать левую и правую границы скользящего окна в соответствии с его размером.

Задача 2

В задаче 2 длительность «скользящего» окна, используемого в методе Поплавского, равна примерно 2 с, что соответствует значению параметра $m = 15$. Оценённые угловые ускорения по тангажу представлены на рис. 3.

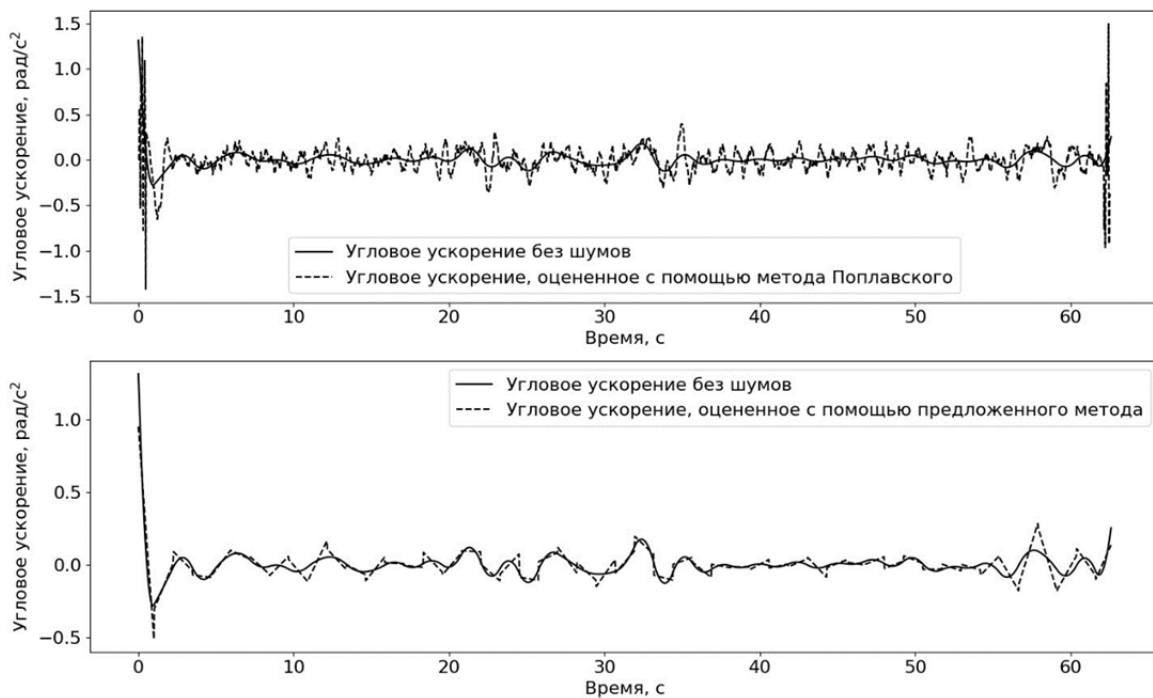


Рис. 3. Истинные значения углового ускорения по тангажу и оценки, полученные предложенным методом и методом Поплавского

Значения среднеквадратического отклонения, оценивающие эффективность предложенного метода и метода Поплавского, представлены в табл. 2.

Таблица 2. Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и расчётными сигналами

$m = 15$		
№	Описание параметра	СКО (рад/с ²)
1.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым предложенным методом	0,0664
2.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым методом Поплавского	0,1251

Согласно результатам, представленным на рис. 3 и в табл. 2, очевидно, что метод Поплавского сглаживает зашумлённый сигнал лучше благодаря увеличению размера «скользящего» окна ($m=15$), однако предложенный метод сохраняет преимущество.

Задача 3

Для значения «скользящего» окна в методе Поплавского $T_{\text{окна}} = 2mh = 2 \cdot 30(1/16) \approx 4$ с (соответствует параметру $m=30$) оценённые угловые ускорения по тангажу представлены на рис. 4.

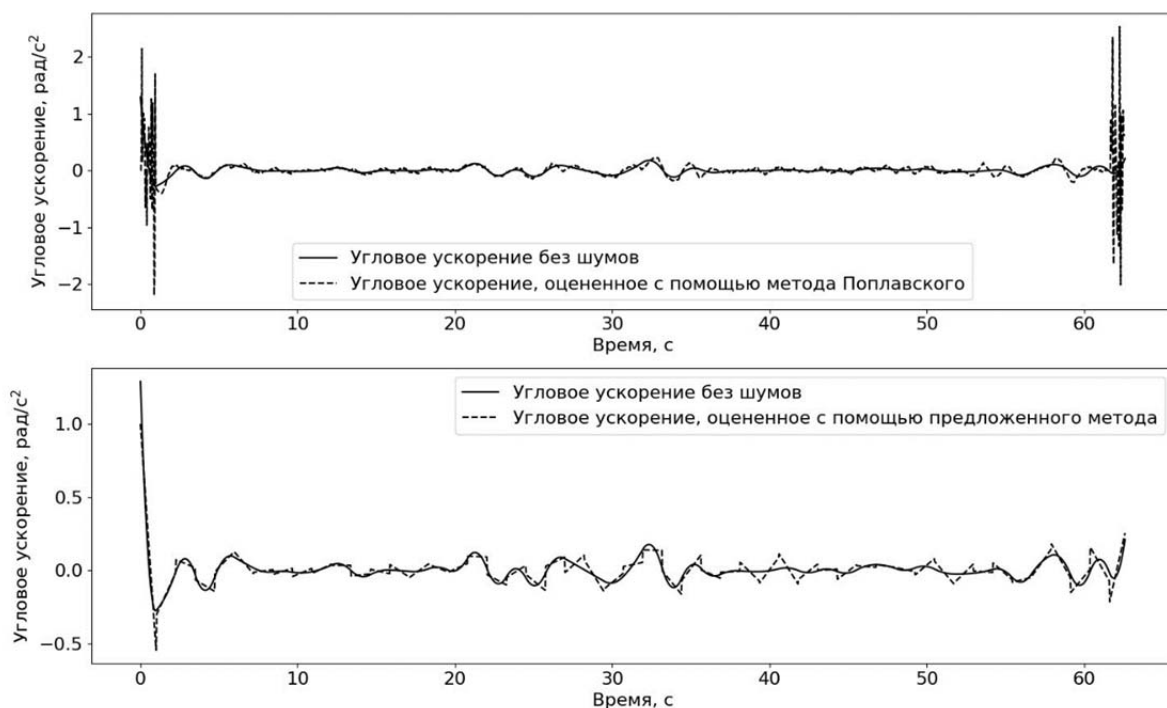


Рис. 4. Истинные значения углового ускорения по тангажу и оценки, полученные предложенным методом и методом Поплавского

Значения среднеквадратического отклонения, оценивающие эффективность предложенного метода и метода Поплавского, представлены в табл. 3.

Таблица 3. Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и расчётными сигналами

$m = 30$		
№	Описание параметра	СКО (рад/с ²)
1.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым предложенным методом	0,0675
2.	Среднеквадратическое отклонение между истинным сигналом и сигналом, оценённым методом Поплавского	0,0796

Из табл. 3 видно, что увеличение длительности «скользящего» окна в методе Поплавского (в Задаче 3 $m = 30$) обеспечивает снижение влияния шумов, хотя предложенный алгоритм по-прежнему сохраняет преимущество.

Заключение

В данной статье предложен новый алгоритм для оценивания углового ускорения по тангажу с использованием угла тангажа и угловой скорости по тангажу, который повышает точность при наличии случайных погрешностей. Результаты предложенного метода были сравнены с результатами, полученными с помощью известного метода Поплавского. Предложенный метод, основанный на Эрмитовых кубических сплайнах, обеспечивает значительно более точную оценку углового ускорения по тангажу без погрешностей в граничных точках. Погрешности оценивания в граничных точках появляются при использовании метода Поплавского и влияют на точность оценки углового ускорения. Предложенный метод, основанный на сплайнах Эрмита, использует угол тангажа и угловую скорость по тангажу, которые можно легко оценить или измерить с помощью датчиков. Предложенный в настоящей работе численный метод обеспечивает более точную оценку углового ускорения по тангажу.

Библиографический список

1. Ahmad M., Hussain Z.L., Shah S.I.A., Shams T.A. Estimation of stability parameters for wide body aircraft using computational techniques // Applied Sciences. 2021. V. 11, Iss. 5. DOI: 10.3390/app11052087
2. Mehra R.K., Stepner D.E., Tyler J.S. Maximum likelihood identification of aircraft stability and control derivatives // Journal of Aircraft. 1974. V. 11, Iss. 2. P. 81-89. DOI: 10.2514/3.60327
3. Sharifi M.A., Seif M.R., Hadi M.A. A comparison between numerical differentiation and Kalman filtering for a Leo satellite velocity determination // Artificial Satellites. 2013. V. 48, Iss. 3. P. 103-110. DOI: 10.2478/arsa-2013-0009
4. Васильченко К.К., Леонов В.А., Пашковский И.М., Поплавский Б.К. Лётные испытания самолётов. М.: Машиностроение, 1996. 719 с.
5. Cheng J., Jia X.Z., Wang Y.B. Numerical differentiation and its applications // Inverse Problems in Science and Engineering. 2007. V. 15, Iss. 4. P. 339-357. DOI: 10.1080/17415970600839093
6. Othmane A., Kiltz L., Rudolph J. Survey on algebraic numerical differentiation: historical developments, parametrization, examples, and applications // International Journal

of Systems Science. 2022. V. 53, Iss. 9. P. 1848-1887.
DOI: 10.1080/00207721.2022.2025948

7. Korsun O.N., Goro S., Om M.H. A comparison between filtering approach and spline approximation method in smoothing flight data // *Aerospace Systems*. 2023. V. 6. P. 473-480.
DOI: 10.1007/s42401-023-00201-0

8. Schum D.J. Noise reduction via signal processing // *The Hearing Journal*. 2003 V. 56, Iss. 5. P. 27-32. DOI: 10.1097/01.HJ.0000293885.26777.b5

9. Корсун О.Н., Стуловский А.В. Восстановление параметров движения летательного аппарата с использованием алгоритмов оптимального управления // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2023. № 1. С. 44-55. DOI: 10.31857/S0002338823010055

10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

11. Unser M. Splines: a perfect fit for signal and image processing // *IEEE Signal Processing Magazine*. 1999. V. 16, Iss. 6. P. 22-38. DOI: 10.1109/79.799930

12. Chan V., Tsui K.-W., Wei Y., Zhang Zh., Deng X. Efficient estimation of smoothing spline with exact shape constraints // *Statistical Theory and Related Fields*. 2021. V. 5, Iss. 1. P. 55-69. DOI: 10.1080/24754269.2020.1722604

13. Svoboda M., Matiu-Iovan L., Frigura-Iliasa F.M., Andea P. B-spline interpolation technique for digital signal processing // *International Conference on Information and Digital Technologies* (July, 07-09, 2015, Zilina, Slovakia). 2015. P. 366-371. DOI: 10.1109/DT.2015.7222998

14. Hou H., Andrews H. Cubic splines for image interpolation and digital filtering // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1978. V. 26, Iss. 6. P. 508-517. DOI: 10.1109/TASSP.1978.1163154

15. Гуторов А.С., Кукин А.Е. Алгоритм оценки данных траектории цели с применением сглаживающего сплайна // *Вестник науки и образования*. 2018. Т. 1, № 7(43). С. 11-14.

16. Mirzaev A., Khalilov S. Digital signal processing based on spline functions // *International Conference on Information Science and Communications Technologies* (November, 04-06, 2019, Tashkent, Uzbekistan). 2019. DOI: 10.1109/ICISCT47635.2019.9012038

17. Ezhov N., Neitzel F., Petrovic S. Spline approximation, Part 2: From polynomials in the monomial basis to B-splines—A derivation // *Mathematics*. 2021. V. 9, Iss. 18. DOI: 10.3390/math9182198

18. Mier Muth A.M., Willsky A.S. A sequential method for spline approximation with variable knots // *International Journal of Systems Science*. 1978. V. 9, Iss. 9. P. 1055-1067. DOI: 10.1080/00207727808941759

19. Elschner J. On spline approximation for singular integral equations on an interval // *Mathematische Nachrichten*. 1988. V. 139, Iss. 1. P. 309-319. DOI: 10.1002/mana.19881390128

20. Динамика полёта / под ред. Г.С. Бюшгенса. М.: Машиностроение, 2011. 775 с.

DEVELOPMENT OF THE NUMERICAL DIFFERENTIATION METHOD FOR APPROXIMATING PITCH ACCELERATION USING SENSOR FUSION APPROACH

© 2024

- O. N. Korsun** Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of the Scientific and Educational Center;
State Scientific Research Institute of Aviation, Moscow, Russian Federation;
Professor, Department of Design and Certification of Aircraft Engineering;
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow,
Russian Federation;
marmotto@rambler.ru
- S. Goro** Postgraduate Student, Department of Design and Certification
of Aircraft Engineering;
Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation;
gorosekoi@gmail.com
- M. H. Om** Candidate of Science (Engineering), Ph.D., Post-doctoral candidate,
Department of Design and Certification of Aircraft Engineering;
Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation;
mounhtangom50@gmail.com

In this paper, a novel algorithm is proposed to accurately estimate pitch acceleration that is crucial for moment coefficient estimation of the mathematical model of aircraft and control design in the presence of measurement noise. The angular velocity of the body as well as the Euler angles provided by the navigation system are used to interpolate the attitude trajectories using an algorithm based on the Hermite-spline polynomial. By differentiating the resultant trajectory function, the angular acceleration can be estimated accurately. This paper also analyzes a well-known method-Poplavski method based on polynomial regression, developed by the Russian scientist B.K. Poplavski to estimate derivatives. The simulation results obtained from the novel algorithm are compared with those obtained using the Poplavski method. The results verified that the novel algorithm that uses both pitch angle and angular velocity provides better accuracy in estimating pitch acceleration than the Poplavski method does, regardless of the sampling rate, which is very important in numerical differentiation and the noise level.

Numerical differentiation method; pitch acceleration; Hermite-spline; Poplavski method; flight data; smoothing of signals

Citation: Korsun O.N., Goro S., Om M.H. Development of the numerical differentiation method for approximating pitch acceleration using sensor fusion approach. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2024. V. 23, no. 3. P. 58-68. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-3-58-68

References

1. Ahmad M., Hussain Z.L., Shah S.I.A., Shams T.A. Estimation of stability parameters for wide body aircraft using computational techniques. *Applied Sciences*. 2021. V. 11, Iss. 5. DOI: 10.3390/app11052087
2. Mehra R.K., Stepner D.E., Tyler J.S. Maximum likelihood identification of aircraft stability and control derivatives. *Journal of Aircraft*. 1974. V. 11, Iss. 2. P. 81-89. DOI: 10.2514/3.60327
3. Sharifi M.A., Seif M.R., Hadi M.A. A comparison between numerical differentiation and Kalman filtering for a Leo satellite velocity determination. *Artificial Satellites*. 2013. V. 48, Iss. 3. P. 103-110. DOI: 10.2478/arsa-2013-0009
4. Vasil'chenko K.K., Leonov V.A., Pashkovskiy I.M., Poplavskiy B.K. *Letnye ispytaniya samoletov* [Aircraft flight tests]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1996. 719 p.

5. Cheng J., Jia X.Z., Wang Y.B. Numerical differentiation and its applications. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2007. V. 15, Iss. 4. P. 339-357. DOI: 10.1080/17415970600839093
6. Othmane A., Kiltz L., Rudolph J. Survey on algebraic numerical differentiation: historical developments, parametrization, examples, and applications. *International Journal of Systems Science*. 2022. V. 53, Iss. 9. P. 1848-1887. DOI: 10.1080/00207721.2022.2025948
7. Korsun O.N., Goro S., Om M.H. A comparison between filtering approach and spline approximation method in smoothing flight data. *Aerospace Systems*. 2023. V. 6. P. 473-480. DOI: 10.1007/s42401-023-00201-0
8. Schum D.J. Noise reduction via signal processing. *The Hearing Journal*. 2003 V. 56, Iss. 5. P. 27-32. DOI: 10.1097/01.HJ.0000293885.26777.b5
9. Korsun O.N., Stulovsky A.V. Recovery of aircraft motion parameters using the optimal control algorithms. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2023. V. 62, Iss. 1. P. 61-72. DOI: 10.1134/S1064230723010057
10. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline-functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 352 p.
11. Unser M. Splines: a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal Processing Magazine*. 1999. V. 16, Iss. 6. P. 22-38. DOI: 10.1109/79.799930
12. Chan V., Tsui K.-W., Wei Y., Zhang Zh., Deng X. Efficient estimation of smoothing spline with exact shape constraints. *Statistical Theory and Related Fields*. 2021. V. 5, Iss. 1. P. 55-69. DOI: 10.1080/24754269.2020.1722604
13. Svoboda M., Matiu-Iovan L., Frigura-Iliasa F.M., Andea P. B-spline interpolation technique for digital signal processing. *International Conference on Information and Digital Technologies (July, 07-09, 2015, Zilina, Slovakia)*. 2015. P. 366-371. DOI: 10.1109/DT.2015.7222998
14. Hou H., Andrews H. Cubic splines for image interpolation and digital filtering. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1978. V. 26, Iss. 6. P. 508-517. DOI: 10.1109/TASSP.1978.1163154
15. Gutorov A.S., Kukin A.E. Algorithm of target trajectory data estimation using a smoothing spline. *Vestnik Nauki i Obrazovaniya*. 2018. V. 1, no. 7 (43). P. 11-14. (In Russ.)
16. Mirzaev A., Khalilov S. Digital signal processing based on spline functions. *International Conference on Information Science and Communications Technologies (November, 04-06, 2019, Tashkent, Uzbekistan)*. 2019. DOI: 10.1109/ICISCT47635.2019.9012038
17. Ezhov N., Neitzel F., Petrovic S. Spline approximation, Part 2: From polynomials in the monomial basis to B-splines—A derivation. *Mathematics*. 2021. V. 9, Iss. 18. DOI: 10.3390/math9182198
18. Mier Muth A.M., Willsky A.S. A sequential method for spline approximation with variable knots. *International Journal of Systems Science*. 1978. V. 9, Iss. 9. P. 1055-1067. DOI: 10.1080/00207727808941759
19. Elschner J. On spline approximation for singular integral equations on an interval. *Mathematische Nachrichten*. 1988. V. 139, Iss. 1. P. 309-319. DOI: 10.1002/mana.19881390128
20. *Dinamika poleta* [Flight dynamics / ed. by G.S. Byushgens]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 2011. 775 p.