

УДК 539.374

ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ИСПЫТАНИЙ ОБРАЗЦОВ ПРИ СЛОЖНОМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

© 2015 Ю. М. Темис¹, Д. А. Алхимов², А. Д. Мартынова¹¹Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова, г. Москва²Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ)

Соотношения инвариантной теории пластического течения применены к моделированию процессов испытаний тонкостенных трубчатых стальных образцов при сложном упругопластическом деформировании. Для модели с трансляционным и изотропным упрочнением, являющейся комбинацией моделей Кадашевича-Новожилова и Аругюняна-Вакуленко, разработан программный комплекс расчёта простых и сложных траекторий деформирования тонкостенных трубчатых образцов и проведения анализа полученных результатов. Погрешности, возникающие в ходе численного моделирования процесса деформирования за пределами упругой области, компенсирует алгоритм коррекции, позволяющий возвращаться на гиперповерхность нагружения на каждом шаге расчёта. Проведён ряд вычислительных экспериментов, в ходе которых рассмотрены процессы испытаний трубчатых образцов из стали 40Х16Н9Г2С. Подбор параметров модели осуществлялся по данным жёсткого циклического нагружения. Представлены результаты моделирования процессов циклического закручивания образцов, пропорционального нагружения, деформирования по сложным двухзвенным и многозвенным траекториям, а также процесса деформирования по криволинейной траектории в виде концентрических окружностей. На примере деформирования по двухзвенным траекториям с различными углами излома продемонстрировано соблюдение принципов запаздывания векторных и скалярных свойств. Результаты моделирования сопоставлены с результатами экспериментов.

Пластичность, пластическое течение, сложное деформирование, напряжённо-деформированное состояние, испытания, трубчатый образец.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-3-24-36

Введение

При расчёте напряжённо-деформированного состояния детали, работающей за пределом упругости, применяют соотношения теории пластического течения. Существует несколько вариантов теории пластического течения, предназначенных для описания деформирования по сложным траекториям изменения деформаций и напряжений. Адекватность математической модели теории пластичности определяется её способностью описывать эффекты и закономерности, наблюдаемые в экспериментах. В работе выполнен анализ возможности применения инвариантной теории пластического течения к описанию экспериментальных результатов при испытаниях тонкостенных трубчатых образцов по программам сложного нагружения.

Определяющие соотношения инвариантной теории пластичности

В рамках теории пластического течения будем считать, что упругие и пластические деформации являются независимыми и тензор приращения деформаций $d\varepsilon_{ij}$ можно представить как сумму тензора приращений упругих деформаций $d\varepsilon_{ij}^e$ и тензора приращений пластических деформаций $d\varepsilon_{ij}^p$:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (1)$$

Также будем считать материал однородным и начально изотропным. Изменение объёма материала происходит упруго, и пластические деформации образуют девиатор. Ограничимся случаем изотермического нагружения, для которого из [1,2] получим приведённые ниже упрощённые соотношения.

Тензор приращения упругих деформаций $d\varepsilon_{ij}^e$ связан с тензором приращения напряжений $d\sigma_{kl}$ и тензором напряжений σ_{kl} зависимостью обобщённого закона Гука для анизотропного материала [3]:

$$d\varepsilon_{ij}^e = A_{ijkl}d\sigma_{kl} + dA_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (2)$$

Здесь A_{ijkl} описывает упругую анизотропию материала и для упругого изотропного материала имеет вид

$$A_{ijkl} = \frac{1+\mu}{E}\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{\mu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl},$$

где E - модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона. Так как рассматривается изотермический процесс, то $dA_{ijkl} = 0$.

Для определения приращения пластических деформаций рассмотрим гиперповерхность пластического деформирования [1,2]:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi, \xi_{ij}) = 0. \quad (3)$$

Здесь χ - скалярный параметр, характеризующий историю пластического деформирования и определяемый как

$$d\chi = (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2},$$

ξ_{ij} - компоненты тензора, характеризующего анизотропию, приобретённую в процессе пластического деформирования, компоненты которого определяются соотношениями:

$$d\xi_{ij} = A(\chi, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\varepsilon_{ip}} d\chi,$$

где A - функция, определяемая экспериментально.

В соответствии с [1,3] рассмотрим систему инвариантов:

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_{ij}\delta_{ij}, & J_2 &= s_{ij}s_{ij}, & J_3 &= s_{ij}s_{jk}s_{ki}, \\ E_1 &= \varepsilon_{ij}^p\delta_{ij} = 0, & E_2 &= \varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p, & E_3 &= \varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{jk}^p\varepsilon_{ki}^p, \\ D_1 &= s_{ij}\varepsilon_{ij}^p, & D_2 &= s_{ij}\varepsilon_{jk}^p\varepsilon_{ki}^p, & D_3 &= s_{ij}s_{jk}\varepsilon_{ki}^p, \\ N_1 &= \xi_{ij}\xi_{ij}, & R_1 &= \xi_{ij}\varepsilon_{ij}^p, & \Pi_1 &= \xi_{ij}s_{ij}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}J_1\delta_{ij}$ - девиатор тензора напряжений, δ_{ij} - символ Кронекера.

Изменение пластических свойств материала происходит при изменении компонентов тензора напряжений σ_{ij} . Рассмотрим гиперповерхность нагружения [1,2]:

$$f_1 = f(\sigma_{ij}; \underbrace{\varepsilon_{ij}^p}_{const}, \chi, \xi_{ij}) = 0, \quad (5)$$

отделяющую области упругого и пластического деформирования и являющуюся подповерхностью гиперповерхности пластического деформирования при фиксированных значениях ε_{ij}^p , χ и ξ_{ij} . Скалярная функция f зависит от системы инвариантов (4). Принимая, что в упругой области $\dot{f}_1 \leq 0$, сформулируем критерии для определения типа нагружения (табл. 1).

Таблица 1. Определение типа нагружения

$(f_1 \leq 0 \wedge df_1 < 0) \vee (f_1 < 0 \wedge df_1 \geq 0)$	Разгрузка или нагрузка в упругой области
$f_1 = 0 \wedge df_1 = 0$	Нейтральное деформирование
$f_1 = 0 \wedge df_1 > 0$	Приращение пластических деформаций

Воспользуемся законом ассоциированного пластического течения [4]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (6)$$

где $d\lambda > 0$ - активное нагружение, $d\lambda = 0$ - разгрузка, нагрузка в упругой области, или нейтральное деформирование.

После преобразований [1,2] с учётом (4) и (5) зависимость (6) принимает вид:

$$d\varepsilon_{ij}^p = C_{ijkl}^p d\sigma_{kl}, \quad (7)$$

$$\text{где } C_{ijkl}^p = -\frac{1}{\phi} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0, \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{\partial f_1}{\partial J_m} \frac{\partial J_m}{\partial S_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial D_s} \frac{\partial D_s}{\partial S_{ij}} + \frac{\partial f_1}{\partial \Pi_1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial S_{ij}}.$$

ϕ - функция упрочнения [1,2], имеющая вид:

$$\phi = n \frac{\partial f}{\partial E_n} D_{n-1}^0 + \frac{\partial f}{\partial D_s} \tilde{D}_s + \frac{\partial f}{\partial \chi} \chi^0 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial f}{\partial \bar{\Pi}_1} \bar{\Pi}_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{N}_1} \bar{N}_1 + \frac{\partial f}{\partial \bar{R}_1} \bar{R}_1, \\
 \text{где } & D_1^0 = \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^p, \quad D_2^0 = \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{jk}^p \varepsilon_{ki}^p, \\
 & \tilde{D}_1 = s_{ij} \sigma_{ij}^0, \quad \tilde{D}_2 = 2s_{ij} \sigma_{jk}^0 \varepsilon_{ki}^p, \quad \tilde{D}_3 = s_{ij} s_{jk} \sigma_{ij}^0, \\
 & \chi^0 = (\sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0)^{1/2}, \quad \bar{\Pi}_1 = \Psi_\nu s_{ij} \sigma_{ij}^0, \\
 & \bar{N}_1 = 2\Psi_\nu s_{ij} \sigma_{ij}^0, \quad \bar{R}_1 = \Psi_\nu \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^p + \xi_{ij} \sigma_{ij}^0, \\
 & \Psi_\nu = A(\chi, \sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай уравнения (4):

$$\begin{aligned}
 f = J_2 + a_1^2 E_2 + a_2^2 N_1 + 2a_1 a_2 R_1 - \\
 - 2a_1 D_1 - 2a_2 \Pi_1 - (\sigma_T^0)^2 = 0, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где $a_1 = a_1(E_2)$, $a_2 = a_2(\chi)$, $\sigma_T^0 = \sigma_T^0(\chi)$ - функции, определяемые экспериментально. При таком выборе f функции a_1 и a_2 отвечают за смещение центра гиперповерхности пластического деформирования, а σ_T^0 - за её радиус. В этом случае

$$\sigma_{ij}^0 = 2(s_{ij} - \rho_{ij}), \quad (10)$$

где $\rho_{ij} = a_1 \varepsilon_{ij}^p + a_2 \xi_{ij}$ - компоненты тензора микронапряжений, а (9) принимает вид

$$J_2^0 - 4(\sigma_T^0(\chi))^2 = 0. \quad (11)$$

Функция упрочнения в данном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \phi = -J_2^0(a_1 + a_2 \Psi_\nu) - 2 \frac{\partial a_1}{\partial E_2} (D_1^0)^2 - \\
 - \left(\frac{\partial a_2}{\partial \chi} \frac{\bar{N}_1}{2\Psi_\nu} + 2\sigma_T^0 \frac{\partial \sigma_T^0}{\partial \chi} \right) (J_2^0)^{1/2}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где $J_2^0 = \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0$.

Запишем условие активного нагружения:

$$\sigma_{ij}^0 ds_{ij} > 0 \wedge \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 4(\sigma_T^0(\chi))^2. \quad (13)$$

При различном подборе параметров a_1 , a_2 и σ_T^0 соотношения (7) - (12) могут представлять собой определяющие соотношения для модели с изотропным упрочнением при $a_1 = a_2 \equiv 0$, модели с трансляционным упрочнением Кадашевича-Новожилова при $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, модели Арутюняна-Вакуленко при $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ либо для комбинации моделей [1,2].

Особенности численного моделирования процесса испытания образцов при сложном нагружении

Рассмотрим процесс сложного нагружения, в котором либо вектор $\bar{\sigma}$ («мягкое нагружение»), либо вектор $\bar{\varepsilon}$ («жёсткое нагружение») изменяются по заданным законам. Процесс моделирования заключается в определении изменения либо вектора $\bar{\varepsilon}$, либо вектора $\bar{\sigma}$ в зависимости от выбранного типа нагружения.

В такой постановке задача моделирования сводится к начальной задаче Коши, в которой текущие значения векторов определяются суммированием их приращений по шагам.

Для удобства проведения численного моделирования процесса нагружения перейдём от тензорного вида к матричному виду, воспользовавшись симметрией тензоров деформаций и напряжений. Этот переход позволяет представить тензорные соотношения (1), (2) и (7) в виде зависимостей для приращений векторов на шаге нагружения:

$$\begin{aligned}
 d\bar{\varepsilon} &= d\bar{\varepsilon}^e + d\bar{\varepsilon}^p, \\
 d\bar{\varepsilon}^p &= [C^p] d\bar{\sigma}, \\
 d\bar{\varepsilon}^e &= [A] d\bar{\sigma}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Зависимости (14) нелинейны и на каждом шаге расчёта приходится проводить линеаризацию матрицы $[C^p]$. В общем случае матрица $[C^p]$ зависит от пластических деформаций, напряжений, накопленных пластических деформаций и структурного тензора. В качестве параметра нагружения можно рассматривать либо изменение вектора $d\bar{\sigma}$, либо вектора $d\bar{\varepsilon}$. Вычисление матрицы $[C^p]$ в начале шага приводит к накоплению погрешности и отклонению вычисленной по текущим напряжениям и деформациям левой части зависимости (5) от нуля.

Для компенсации этого отклонения рассмотрим задачу коррекции погрешности на примере моделирования жёсткого нагружения.

Для решения системы (14) воспользуемся явным методом Эйлера с коррекцией погрешности [4]. Тогда на $(k+1)$ -ом шаге система примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1} &= ([A] + [C^p(\bar{\varepsilon}_k^p, \bar{\sigma}_k, \chi_k, \bar{\xi}_k)]) \Delta \bar{\sigma}_{k+1}, \\ \bar{\varepsilon}_{k+1} &= \bar{\varepsilon}_k + \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}, \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p &= [C^p(\bar{\varepsilon}_k^p, \bar{\sigma}_k, \chi_k, \bar{\xi}_k)] \Delta \bar{\sigma}_{k+1}, \\ \bar{\varepsilon}_{k+1}^p &= \bar{\varepsilon}_k^p + \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p. \end{aligned}$$

Здесь индекс k обозначает векторы, вычисленные к концу k -го шага.

Из-за возникающей погрешности уравнение поверхности пластического деформирования на k -ом шаге не выполняется и

$$f(\bar{\sigma}_k, \bar{\varepsilon}_k^p, \chi_k, \bar{\xi}_k) = f_k \neq 0.$$

Рассмотрим f_{k+1} , если f имеет вид (9):

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (s_{k,ij} + \Delta s_{k,ij} - a_1(\varepsilon_{k,ij}^p + \Delta \varepsilon_{k,ij}^p) - \\ &- a_2(\xi_{k,ij} + \Delta \xi_{k,ij}))(s_{k,ij} + \Delta s_{k,ij} - a_1(\varepsilon_{k,ij}^p + \Delta \varepsilon_{k,ij}^p) - \\ &- a_2(\xi_{k,ij} + \Delta \xi_{k,ij})) - (\sigma_0^T(\chi_k + \Delta \chi_k))^2 = 0. \end{aligned}$$

Раскладываем в ряд Тейлора функцию $(\sigma_0^T(\chi_k + \Delta \chi_k))^2$ в точке χ_k и раскрываем скобки, пренебрегая членами второго порядка малости:

$$\begin{aligned} (s_{k,ij} - a_1 \varepsilon_{k,ij}^p - a_2 \xi_{k,ij})(s_{k,ij} - a_1 \varepsilon_{k,ij}^p - a_2 \xi_{k,ij}) + \\ + 2(\Delta s_{k,ij} - a_1 \Delta \varepsilon_{k,ij}^p - a_2 \Delta \xi_{k,ij})(s_{k,ij} - a_1 \varepsilon_{k,ij}^p - \\ - a_2 \xi_{k,ij}) - (\sigma_0^T(\chi_k))^2 - 2\sigma_0^T(\chi_k) \frac{\partial \sigma_0^T}{\partial \chi} \Delta \chi_k = 0. \end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые заменяем на f_k , переносим слагаемые с Δs_{ij} влево, а остальные вправо, переходим от Δs_{ij} к $\Delta \sigma_{ij}$ и получаем дополнительное уравнение, связывающее изменение компонент тензора напряжений и тензора пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}(s_{k,ij} - a_1 \varepsilon_{k,ij}^p - a_2 \xi_{k,ij}) &= -\frac{f_k}{2} + \\ + (a_1 \Delta \varepsilon_{ij}^p + a_2 \Delta \xi_{ij})(s_{k,ij} - a_1 \varepsilon_{k,ij}^p - a_2 \xi_{k,ij}) &+ \\ + \sigma_0^T(\chi_k) \frac{\partial \sigma_0^T}{\partial \chi} \Delta \chi_k. & \quad (15) \end{aligned}$$

Дополнительное условие, накладываемое на решение системы (14), учитываем методом множителей Лагранжа. Для этого условие (15) записываем в виде:

$$L \Delta \bar{\sigma}_{k+1} = b,$$

$$\text{где } L = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{11}^0}{2} & \frac{\sigma_{22}^0}{2} & \frac{\sigma_{33}^0}{2} & \sigma_{23}^0 & \sigma_{13}^0 & \sigma_{12}^0 \end{pmatrix},$$

$$b = -\frac{f_k - (a_1 \Delta \varepsilon_{ij}^p + a_2 \Delta \xi_{ij}) \sigma_{ij}^0}{2} + \sigma_0^T \frac{\partial \sigma_0^T}{\partial \chi} \Delta \chi$$

и на каждом шаге решаем модифицированную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \Delta \bar{\varepsilon}_{k+1}^p \\ b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C^p & L^T \\ L & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{\sigma}_{k+1} \\ \lambda \end{pmatrix},$$

где λ - множитель Лагранжа.

Такой метод коррекции позволяет компенсировать погрешности при активном нагружении и на каждом шаге возвращаться на гиперповерхность пластического деформирования. При разгрузке и нейтральном деформировании тензор $[C^p] \equiv 0$ и погрешность не накапливается.

Оценка точности алгоритма и сравнение результатов расчётов с результатами экспериментов

Анализ точности алгоритма и моделей проводился при сравнении результатов моделирования с результатами экспериментов для простых и сложных траекторий деформирования трубчатых образцов из стали 40X16H9Г2С [5]. Подбор параметров моделей осуществлялся по данным жёсткого циклического деформирования материала [5].

Полагая $a_2 = 0$, определяем параметры a_1 и σ_T^0 . Рассматривая кривую деформирования материала при растяжении до пластической деформации ε_1^p и кривую деформирования при последующем сжатии, находим напряжения σ^+ , соответствующие ε_1^p при растяжении, и напряжения σ^- , при которых начинается обратное пластическое деформирование. Из уравнения поверхности пластического деформирования (9) находим $a_1(E_2)$ и $\sigma_T^0(\chi)$ [2]. Параметр $A(J_2)$ определяем как изменения касательного модуля кри-

вой деформирования на первом полуцикле, а параметр $a_2(\chi)$ - как отношение площадей под кривой деформирования на каждом полуцикле к площади под кривой деформирования на первом полуцикле. Для определения параметров модели с гиперповерхностью пластического деформирования вида (9) проводим моделирование жёсткого циклического нагружения,

заменяя $a_1(E_2)$ и $a_2(\chi)$ на $\beta a_1(E_2)$ и $(1-\beta)a_2(\chi)$. β выбираем из диапазона $[0,1]$ таким образом, чтобы обеспечивать наилучшее приближение результатов расчёта к экспериментальным данным. Графики изменения параметров приведены на рис. 1,2.

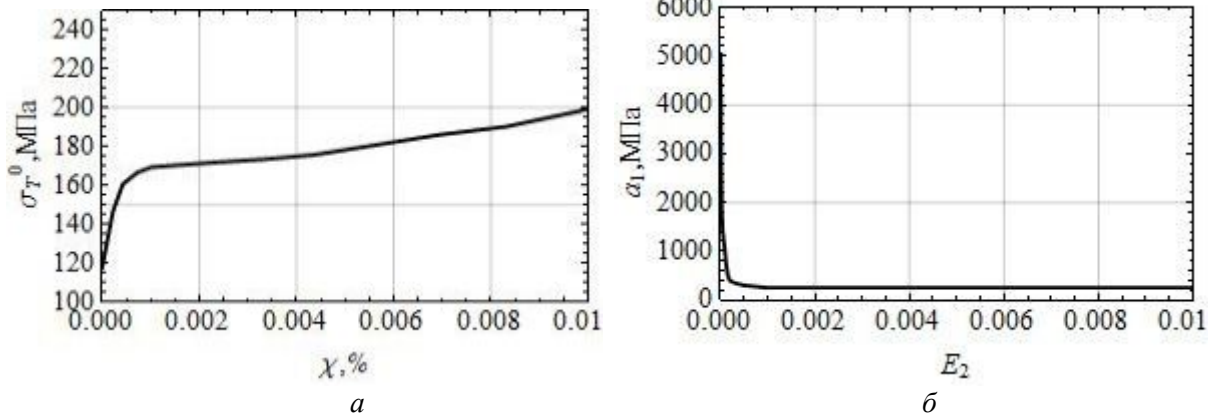


Рис. 1. Графики изменения параметров: а) $\sigma_T^0(\chi)$; б) $a_1(E_2)$

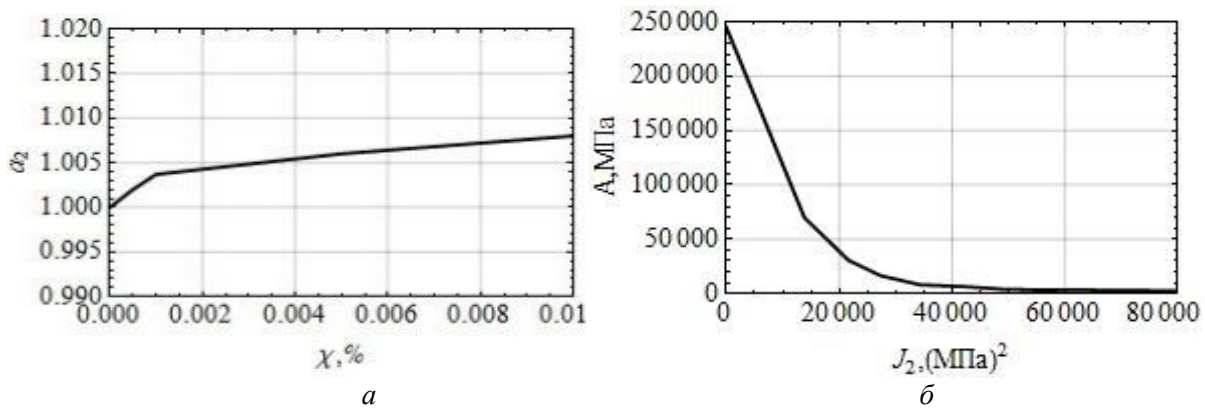


Рис. 2. Графики изменения параметров: а) $a_2(\chi)$; б) $A(J_2)$

Применение коррекции продемонстрировано на примере численного моделирования нагружения по двухзвенной ломаной траектории с углом излома 90°

(рис. 3, а). $\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_{11}$, $\mathcal{E}_3 = \sqrt{2}e_{12}$ - координаты вектора деформаций Ильюшина [5,6], где e_{11} , e_{12} - компоненты девиатора тензора деформаций. График зависимости значения f_k от номера шага приведён на рис. 3, б (режим без коррекции). В зоне упругости (I) f_k принимает отрицательные значения, тогда как в зоне активного

нагружения (II, III) f_k первоначально близко к нулю, но с некоторого момента в связи с увеличением погрешностей растёт.

На рис. 4, а представлен график зависимости значения f_k от номера шага (режим с коррекцией). На каждом шаге расчёта, в том случае, если f_k достигает некоторого заданного значения, происходит расчёт с коррекцией, что позволяет удерживать значение f_k вблизи нуля. Расхождение по пластическим деформациям в плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ продемонстрировано на рис. 4, б.

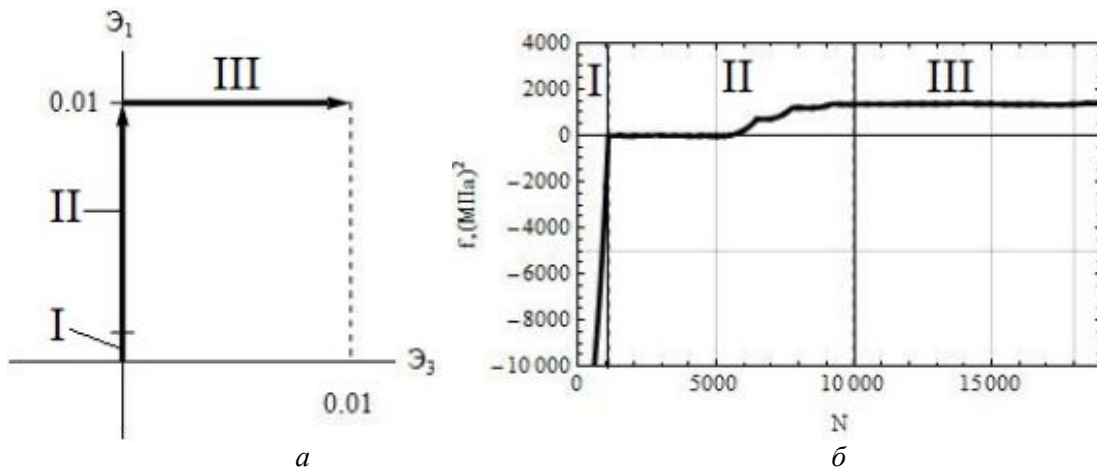


Рис.3. Траектория деформирования (а) и график зависимости значения f_k от номера шага, режим без коррекции (б); I – растяжение, упругое деформирование, II – растяжение, упругопластическое деформирование, III – кручение, упругопластическое деформирование

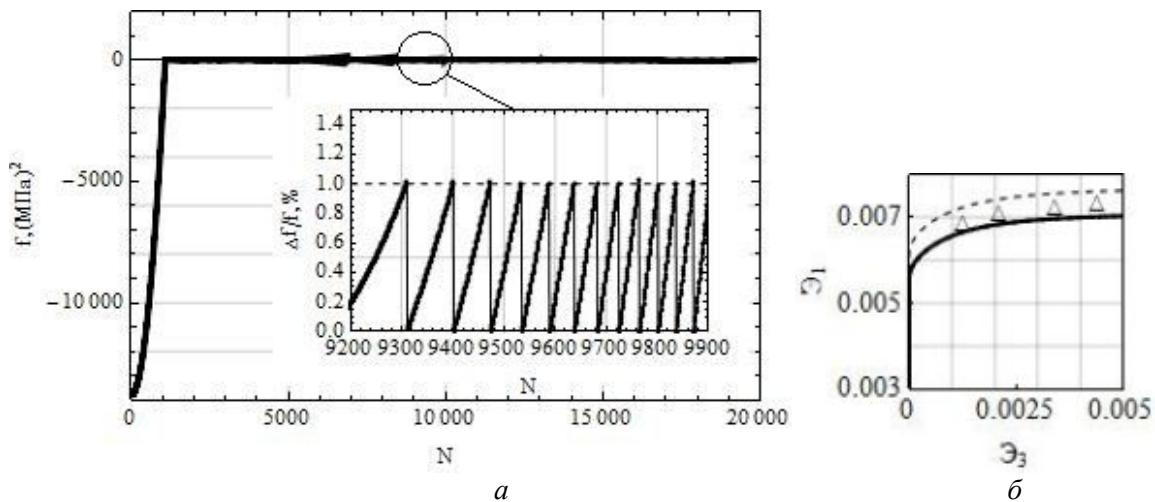


Рис.4. График зависимости значения f_k от номера шага (режим с коррекцией) (а) и расхождение по пластическим деформациям (б): штриховая линия – режим без коррекции, сплошная линия – режим с коррекцией, точки – эксперимент

На рис. 5, а, б представлены графики ответных реакций и графики уравнений гиперповерхности нагружения в четырёх состояниях (1-4) в плоскости $S_1 - S_3$ без коррекции и с коррекцией соответственно. Маркеры на рис. 5, а, б соответствуют положениям изображающей точки в тех же четырёх состояниях гиперповерхности нагружения (\diamond -1, ∇ -2, \circ -3, \square -4). При выключенном режиме коррекции изображающая точка находится вне гиперповерхности нагружения (рис. 5, а), тогда как при работающей коррекции точки расчёта ложатся на гиперповерхности нагружения, соответствующие им (рис. 5, б).

Моделирование процессов деформирования при пропорциональном нагружении

На рис. 6 сплошными линиями показаны кривые деформирования в интенсивностях, полученные в результате моделирования процессов циклического изменения компонента ϵ_3 вектора деформирования с амплитудой 0.0113, представляющего собой знакопеременное закручивание образца, а также пропорционального нагружения с наклоном вектора деформирования в 45° с амплитудой 0.008. Точками показаны результаты экспериментов, приведённых в [5].

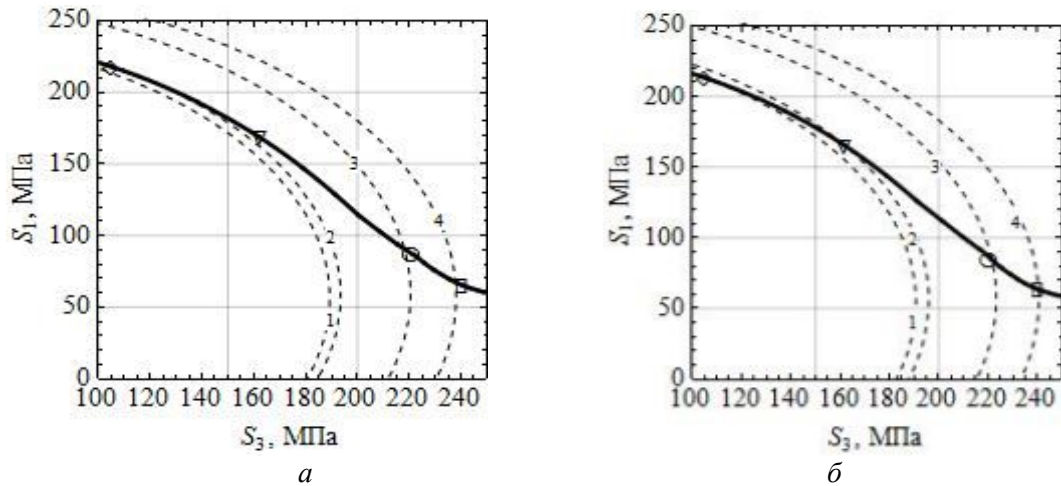


Рис. 5. Ответная реакция напряжений (сплошная линия) и гиперповерхности нагружения (штриховая линия): режим без коррекции (а), режим с коррекцией (б)

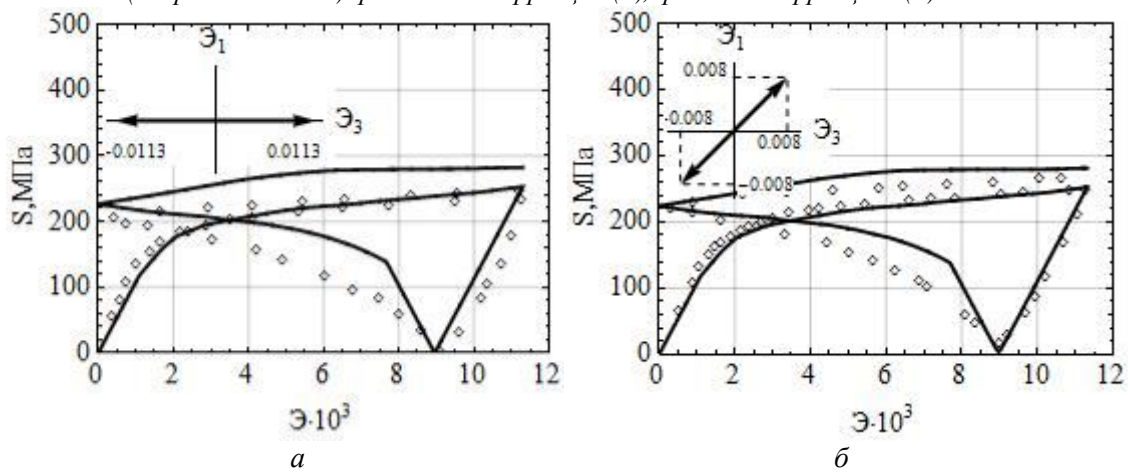


Рис. 6. Кривые деформирования при кручении с амплитудой 0.0113 (а) и при пропорциональном нагружении с амплитудой 0.008 (б): сплошная линия – расчёт, точки – эксперимент

Моделирование процессов деформирования по двухзвенным траекториям

Выполнено численное моделирование нагружения по двухзвенным траекториям, представляющим два отрезка под некоторым углом излома.

Экспериментальные исследования показывают, что после излома траектории по истечению некоторой длины второго звена, след запаздывания вектор напряжений практически ложится на касательную к траектории деформирования. Таким образом, угол сближения, характеризующий векторные свойства, становится достаточно малым [5].

Угол сближения вычисляется по формуле:

$$\theta = \arccos \frac{(\bar{S} \cdot \bar{\epsilon})}{|\bar{S}| |\bar{\epsilon}|},$$

где \bar{S} и $\bar{\epsilon}$ - векторы напряжений и деформаций, соответствующие векторному представлению Ильюшина [5,6].

На рис. 7, а приведены зависимости угла сближения от длины траектории деформирования для различных углов излома траектории, построенные на основе соотношений модели (7 - 12). На основе полученных зависимостей был построен график зависимости следа запаздывания от угла излома траектории (рис. 7, б). Согласно расчётам, след запаздывания векторных свойств материала существенно зависит от угла излома траектории и не является универсальной характеристикой материала, что подтверждается экспериментально [5].

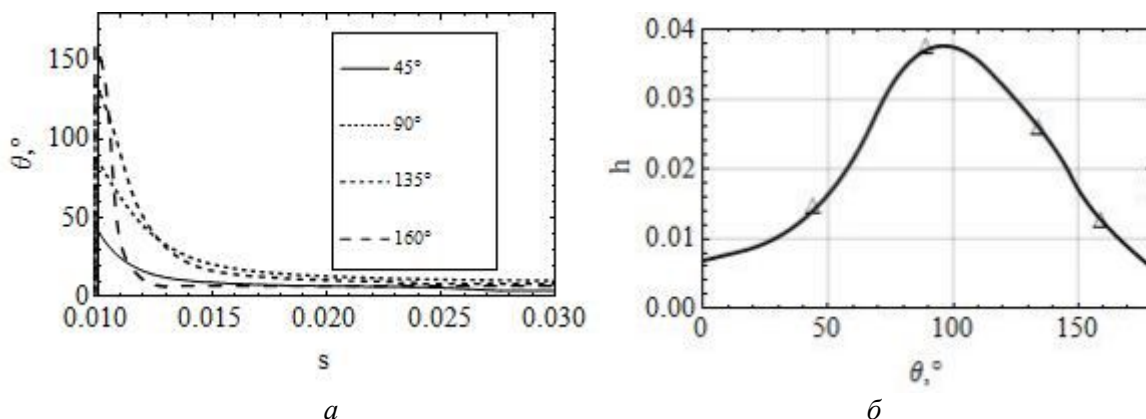


Рис. 7. Зависимости угла сближения от длины траектории деформирования (а) и следа запаздывания от угла излома траектории (б)

Также экспериментальные исследования показали, что после излома траектории происходит нырок кривой деформирования, а затем по исчерпанию следа запаздывания кривая скалярных свойств может приближаться к единой кривой материала [5].

На рис. 8, а представлен фрагмент кривой деформирования в интенсивностях после излома траектории с углом излома

90°. Точка 1 соответствует моменту излома, точка 2 – нижняя точка кривой деформирования при нырке, точка 3 соответствует достижению модулем вектора напряжений \bar{S} значения, равного значению \bar{S} в точке 1. На рис. 8, б показана ответная реакция напряжений при нырке кривой деформирования.

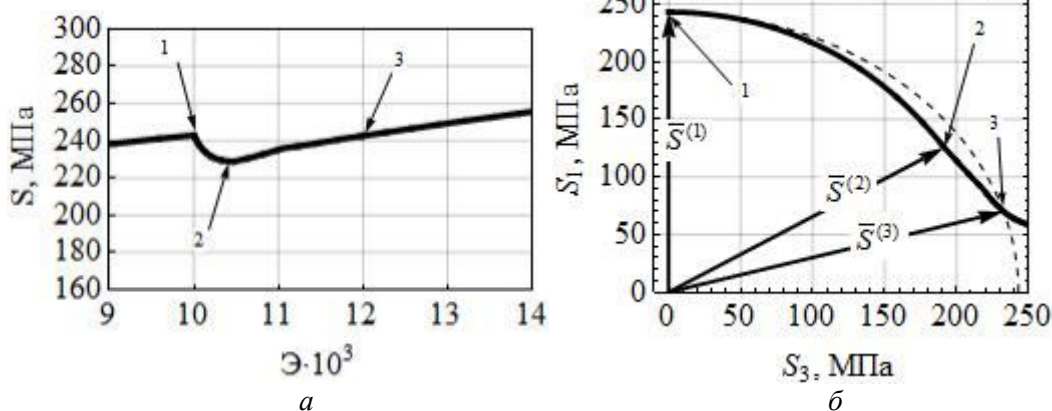


Рис.8. Нырок кривой деформирования (а) и ответная реакция напряжений при нырке (сплошная линия) (б) для двухзвенной траектории деформирования с углом излома 90°

Штриховой линией обозначен путь изображающей точки, в том случае, если бы длина вектора \bar{S} оставалась бы в процессе нагружения равной длине \bar{S} до нырка. Из графика видно, что на участке 1-3 модуль вектора \bar{S} меньше, чем модуль вектора $\bar{S}^{(1)}$, что и соответствует нырку кривой деформирования на участке 1-3 (рис. 8, а).

На рис. 9 приведены кривые деформирования и зависимости модуля вектора

напряжений от длины траектории деформирования для двухзвенных траекторий с углами излома 45, 90, 135 и 160°. На кривой деформирования, соответствующей углу излома в 45°, нырка не наблюдается. Это связано с тем, что после излома не происходит разгрузки в направлении $\bar{\epsilon}_1$, в отличие от остальных траекторий, а происходит пропорциональное нагружение с увеличением компонентов $\bar{\epsilon}_1$ и $\bar{\epsilon}_3$.

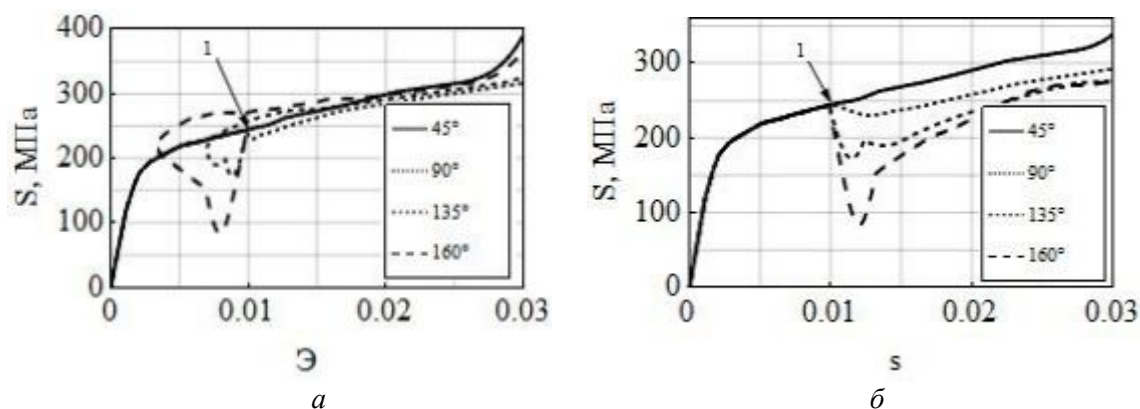


Рис.9. Кривые деформирования в интенсивностях (а) и зависимость модуля вектора напряжений от длины траектории деформирования (б) для двухзвенных траекторий деформирования с различными углами излома

Моделирование процесса деформирования по траектории деформирования в виде квадрата

На рис. 10 сплошными линиями показаны кривая деформирования в интенсивностях и ответные реакции в плоскости $S_1 - S_3$ соответственно, полученные в результате численного моделирования нагружения по многозвенной ломаной траектории, представляющей собой квадрат в плоскости $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$ со стороной 0.01, то есть последовательно выполняется растяжение – кручение в положительном направлении

и сжатие – кручение в отрицательном направлении.

На рис. 11 представлены графики зависимостей модуля вектора напряжений и угла сближения от длины траектории деформирования. Точками показаны результаты экспериментов, приведённые в [5].

По скалярным свойствам наблюдается существенное отличие от единой кривой деформирования, а угол сближения на каждой стороне близок к универсальной зависимости, что подтверждается экспериментально [5].

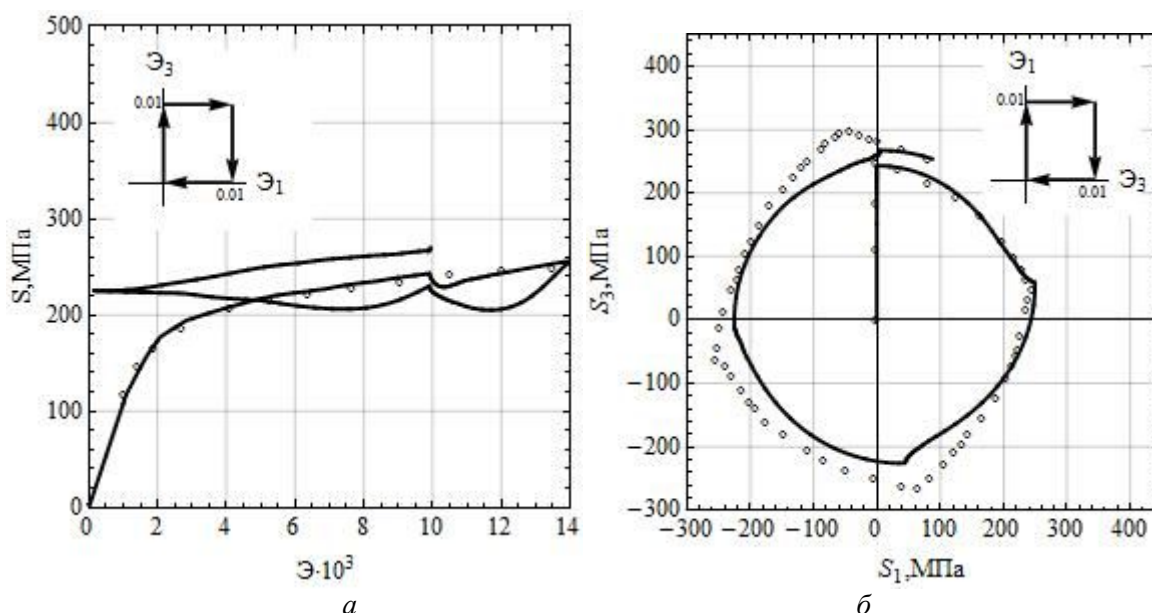


Рис. 10. Кривая деформирования (а) и ответная реакция напряжений (б) при нагружении по траектории деформирования в виде квадрата: сплошная линия – расчёт, точки – эксперимент

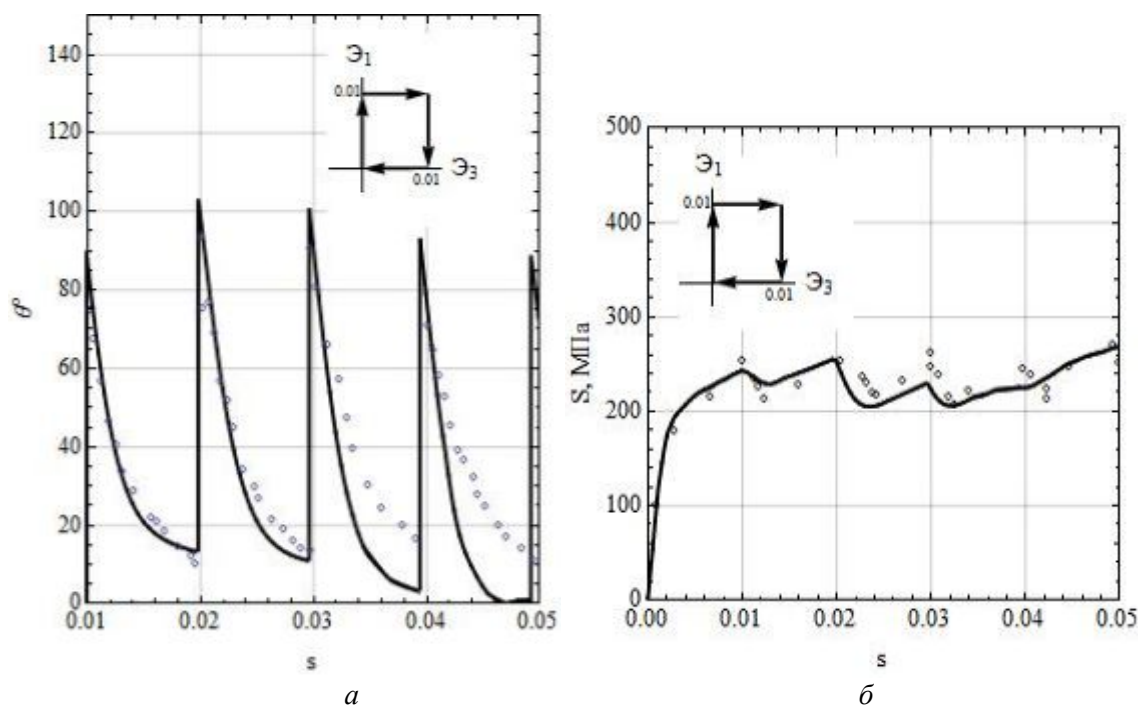


Рис. 11. Зависимости угла сближения от длины траектории деформирования (а) и модуля вектора напряжений от длины траектории деформирования (б) при траектории деформирования в виде квадрата: сплошная линия – расчёт, точки – эксперимент

Моделирование процессов деформирования по траектории деформирования в виде концентрических окружностей

На рис. 12 представлены кривая деформирования в интенсивностях и ответные реакции в плоскости $S_1 - S_3$ соответственно, полученные в ходе моделирования нагружения по траектории в виде двух

концентрических окружностей с общим центром, совпадающим с началом координат. Переход с одной окружности на другую осуществлялся по отрезку, совпадающему с началом координат. Радиус первой окружности составляет 0.0025, второй 0.005. Точками показаны экспериментальные результаты [5].

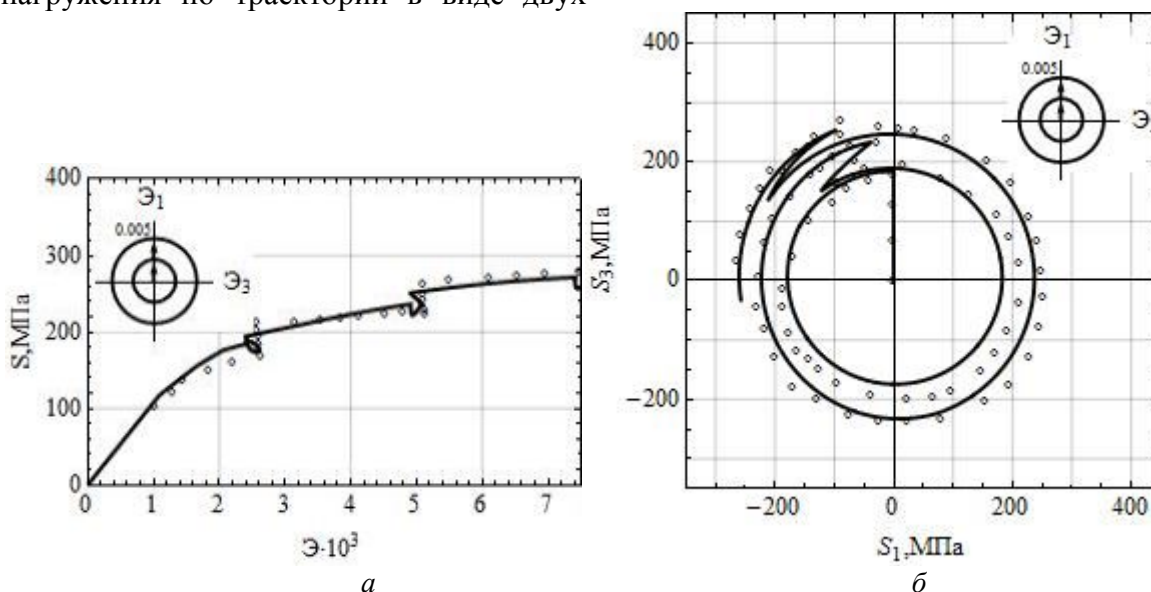


Рис. 12. Кривая деформирования (а) и ответная реакция напряжений (б) при нагружении по траектории деформирования в виде концентрических окружностей: сплошная линия – расчёт, точки – эксперимент

Заключение

Наблюдается удовлетворительное совпадение результатов математического моделирования нагружения по простым и сложным траекториям деформирования и результатов экспериментов. Результаты численного исследования нагружения по двухзвенным траекториям демонстрируют соблюдение принципов запаздывания векторных и скалярных свойств. На основе проведённого анализа можно сделать вывод о возможности использования инвариантной теории пластического течения для описания напряжённо-деформиро-

ванного состояния конструкций под действием сложного нагружения.

Следует отметить, что при численном моделировании в данной работе был использован достаточно простой вид поверхности нагружения и в дальнейшем можно рассматривать более сложные варианты.

Авторы благодарят профессора, д-ра физ.-мат. наук Бондаря В.С. за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-01-03073.

Библиографический список

1. Темис Ю.М. Теория неізотермического пластического течения с изотропным и анизотропным упрочнением. Машиностроение. Энциклопедия. Динамика и прочность машин. Теория механизмов и машин. Т. 1-3. В 2-х кн. Кн. 2. М.: Машиностроение, 1994. С. 227-231.

2. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теорий пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1975. № 5. С. 111-119.

3. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.

4. Темис Ю.М. Самокорректирующийся шаговый метод решения нелинейных задач упругости и пластичности // Труды ЦИАМ. 1980. № 918. 24 с.

5. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. 172 с.

6. Бондарь В.С., Даньшин В.В. Пластичность. Пропорциональные и непропорциональные нагружения. М.: Физматлит, 2008. 176 с.

Информация об авторах

Темис Юрий Моисеевич, доктор технических наук, профессор, начальник отдела, Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова. E-mail: tejoum@ciam.ru. Область научных интересов: прочность и динамика турбомашин, численные методы решения задач упругости, пластичности и ползучести, оптимальное проектирование, многодисциплинарное математическое моделирование газотурбинных двигателей.

Алхимов Дмитрий Александрович, аспирант кафедры «Теоретическая механика», Московский государственный

машиностроительный университет (МАМИ). E-mail: alhdmitrii@gmail.com. Область научных интересов: оптимальное проектирование, моделирование процессов непропорционального неізотермического деформирования.

Мартынова Анастасия Дмитриевна, инженер, Центральный институт авиационного моторостроения имени П.И. Баранова. E-mail: martynasty@yandex.ru. Область научных интересов: пластичность, математическое моделирование процессов сложного упругопластического деформирования.

APPLICATION OF THE INVARIANT PLASTIC FLOW THEORY FOR MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF TESTING SPECIMENS UNDER COMPLEX ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION

© 2015 Y. M. Temis¹, D. A. Alkhimov², A. D. Martynova¹

¹Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov, Moscow, Russian Federation

²Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI), Moscow, Russian Federation

The invariant plastic flow theory is applied for modeling the processes of testing thin-walled tubular steel specimens under complex elastic-plastic deformation. A software package for calculating simple and complex paths of deformation of thin-walled tubular specimens and analyzing the results obtained was developed for a model with translation and isotropic hardening, a combination of Kadashevich-Novozhilov and Arutyunyan-Vakulenko models. The errors arising in the course of numerical modeling of the deformation process beyond the elastic area are compensated by the correction algorithm that makes it possible to return to the loading hypersurface at each stage of calculation. A number of numerical experiments dealing with testing tubular steel 40X16H9Г2С specimens were conducted. The model parameters were chosen according to the data of repeated loading. The results of numerical stimulation of the processes of cyclical twist of the specimens, proportional loading, complex two-section and multi-section deformation paths, as well as the process of curvilinear deformation path in the form of concentric circles are presented. The observance of the principle of delay of vector and scalar properties is demonstrated, two-section deformation paths with different angles of fracture taken as an example. The numerical results are compared with the experimental data.

Plasticity, plastic flow, complex deformation, stress-strain state, mechanical tests, tubular specimen.

References

1. Temis Y.M. *Teoriya neizotermicheskogo plasticheskogo techeniya s izotropnym i anizotropnym uprochneniem. V kn.: Mashinostroenie. Entsiklopediya. Dinamika i prochnost' mashin. Teoriya mekhanizmov i mashin. T. 1-3. V 2-kh kn. Kn. 2* [Theory of non-isothermal plastic flow with isotropic and non-isotropic hardening. In the book: Mechanical engineering. Encyclopedia. Dynamics and strength of machines and mechanisms. V.1-3. In 2 books. Book 2. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1994. P. 227-231. (In Russ.)
2. Dem'yanushko I.V., Temis Y.M. To build theories of plastic flow with non-isotropic hardening for materials under the influence of physical fields. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela*. 1975. No. 5. P. 111-119. (In Russ.)
3. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1975. 400 p. (In Russ.)
4. Temis Y.M. Self-corrected proceedings method for solving non-linear problems of elasticity and plasticity. *Trudi CIAM*. 1980. No. 918. 24 p. (In Russ.)
5. Zhubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garanikov V.V. *Experimental'naya plastichnost'. Kniga 1. Processi slozhnogo deformirovaniya* [Experimental plasticity. Book 1. Processes of the complex deformation]. Tver: Tver State Technical University Publ., 2003. 172 p. (In Russ.)
6. Bondar V.S., Danshin V.V. *Plastichnost'. Proporcional'nye i neproporcional'nye nagruzheniya* [Plasticity. Proportional and disproportionate loading]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2008. 176 p. (In Russ.)

About the authors

Temis Yury Moiseevich, Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of the Department, Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov. E-mail: tejoum@ciam.ru. Area of Research: strength and dynamics of turbomachinery, numerical methods for solving problems of elasticity, plasticity and creep, optimal engineering, multidisciplinary mathematical modeling of gas turbine engines.

Alkhimov Dmitry Alexandrovich, postgraduate student of the Department of

Theoretical Mechanics, Moscow State University of Mechanical Engineering (MAMI). E-mail: alhdmitrii@gmail.com. Area of Research: optimal engineering, mathematical modeling of non-proportional non-isothermal deformation.

Martynova Anastasia Dmitrievna, engineer, Central Institute of Aviation Motors named after P.I. Baranov. E-mail: martynasty@yandex.ru. Area of Research: plasticity, mathematical modeling of the processes of elastic-plastic deformation.