

УДК 517.9+621.436

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ГОРЮЧИХ СПРЕЯХ

© 2011 С. С. Сажин<sup>1</sup>, В. А. Соболев<sup>2</sup>, Е. А. Щепаккина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Университет Брайтона, Великобритания

<sup>2</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)

Предлагается новая концепция положительно (отрицательно) инвариантных многообразий дифференциальных систем с нелипшицевыми нелинейностями. Применение данной концепции позволяет понизить порядок таких систем. Показано, что сингулярно возмущённая система трех уравнений (радиус капле, температура газа, концентрация горючего), описывающая испарение и воспламенение монодисперсного спрея, имеет притягивающее инвариантное многообразие. Это позволяет привести данную систему к системе из двух уравнений, описывающих температуру газа и концентрацию горючего, когда процесс испарения капле завершён. Дополнительное уравнение описывает уменьшение радиуса капле, когда изменения температуры газа и концентрации горючего предполагаются малыми.

*Инвариантные многообразия, негладкие нелинейности, редукция, дизельный двигатель, горючий спрей.*

### Модель воспламенения в дизельном двигателе

Процесс воспламенения рассматривается в предположении об одностадийной химической реакции согласно закону Аррениуса с постоянным предэкспоненциальным фактором. Это допустимо, если концентрация горючего настолько мала, что изменение процентной концентрации расходуемого кислорода можно не учитывать. При таком подходе не принимаются во внимание некоторые важные эффекты, свойственные процессу самовоспламенения, такие как формирование холодных пламен, но в то же время можно адекватно описывать общий баланс энергии. Следуя работам [1, 2], в модель включаем уравнения баланса энергии, радиуса капли и концентрации горючего газа, которые в безразмерной форме имеют вид

$$g(1 + bq)^{-1} \frac{dq}{dt} = H_R(q, h) - H_L(q, h); \quad (1)$$

$$\frac{dr^3}{dt} = -e_2 H_L(q, h); \quad (2)$$

$$\frac{dh}{dt} = -H_R(q, h) + \psi H_L(q, h), \quad (3)$$

где  $H_R(q, h) = h \exp\left(\frac{q}{1 + bq}\right)$

$H_L(q, h) = e_1 r [q(1 + bq)^{1/2} + e_3 r ((1 + bq)^4 - 1)]$ ;

$q$  – безразмерная температура газа;  $h$  – безразмерная концентрация горючего газа;  $r$  – безразмерный радиус капле;  $b, g$  – традиционные параметры в теории теплового взрыва Семёнова;  $b$  – приведённая начальная температура по отношению к так называемой температуре активации;  $g$  представляет конечную безразмерную адиабатическую температуру термически изолированной системы после взрыва. Характерные значения этих параметров малы по отношению к единице для типичных газовых смесей благодаря высокой экзотермичности химической реакции и высокой энергии активации [1]. Параметры  $e_1, e_2$  характеризуют взаимодействие между газовой и жидкой фазами, а параметр  $e_3$  характеризует влияние тепловой радиации и представляет собой отношение коэффициентов лучевой и конвективной теплопередачи. Характерные значения  $\psi$  лежат в диапазоне 10-100 и выше [1].

Начальные условия для уравнений (1)–(3) имеют вид

$$q(0) = q_0, \quad h(0) = h_0, \quad r(0) = 1. \quad (4)$$

Интеграл энергии для уравнений (1)–(3) может быть представлен следующим образом:

$$h = h_0 - \frac{g}{b} \ln \left( \frac{1 + bq}{1 + bq_0} \right) + \frac{Y-1}{e_2} (1 - r^3). \quad (5)$$

Уравнения (1)–(3) позволяют найти условия равновесия. Естественно ожидать, что завершение процессов испарения и горения приводит к равенствам  $r = 0, h = 0$ . Это позволило найти выражение для температуры в конце процессов:

$$q_{final} = \frac{1}{b} \left( \exp \left( \frac{b}{g} \left[ h_0 + \frac{Y-1}{e_2} \right] + \ln(1 + bq_0) \right) - 1 \right).$$

### Редукция системы

Метод интегральных многообразий обычно применяется для исследования систем дифференциальных уравнений с достаточно гладкими правыми частями, хотя есть примеры успешного применения этого метода даже для редукции (понижения размерности) систем с разрывными правыми частями [3]. В данной работе обсуждается вопрос о возможности редукции систем с негладкими, более того, с нелипшицевыми нелинейностями. Напомним, что векторная функция  $F(z)$  называется липшицевой или, более точно, удовлетворяющей условию Липшица с константой  $L$  в некоторой области изменения векторного аргумента  $z$ , если имеет место неравенство  $|F(z_1) - F(z_2)| \leq L |z_1 - z_2|$  для любых  $z_1, z_2$  из этой области.

В последние годы появились статьи, посвященные исследованию моделей химической кинетики с нелипшицевыми нелинейностями (см., например, [1]). К сожалению, в этих работах сначала излагаются общеизвестные результаты теории интегральных многообразий сингулярно возмущённых систем с гладкими правыми частями, а затем рассматриваются физические задачи, к которым эти результаты

неприменимы. Следует отметить, что можно ввести понятие положительно (отрицательно) инвариантного множества, т.е. множества, обладающего следующим свойством: если точка траектории принадлежит этому множеству в некоторый момент времени  $t=t_0$ , то соответствующая положительная ( $t \geq t_0$ ) (отрицательная ( $t \leq t_0$ )) полутраектория принадлежит этому множеству целиком. Если множество является и положительно и отрицательно инвариантным, то оно инвариантно. Для систем с липшицевыми правыми частями эти три понятия эквивалентны. Ясно, что притягивающие положительно инвариантные множества могут использоваться для понижения размерности моделей, но обоснование такой возможности выходит за рамки теории метода интегральных многообразий и требует применения другого математического аппарата.

Введение новых переменных

$$p = \ln(1 + bq), \quad q = r^3, \quad s = \frac{Yr^3}{e_2} + h \quad \text{при-}$$

водит систему (1)–(3) к виду

$$\frac{g}{b} \frac{dp}{dt} = G(s, p, q) - e_1 q^{1/3} F(p, q); \quad (6)$$

$$\frac{1}{e_2} \frac{dq}{dt} = -e_1 q^{1/3} F(p, q); \quad (7)$$

$$\frac{ds}{dt} = -G(s, p, q), \quad (8)$$

$$\text{где } G(s, p, q) = \left( s - \frac{Y}{e_2} q \right) \exp \left( \frac{e^p - 1}{be^p} \right);$$

$$F(p, q) = \left( \frac{e^p - 1}{b} \right) e^{p/2} + e_3 q^{1/3} (e^{4p} - 1).$$

Типичные значения параметров в случае дизельного двигателя подчиняются неравенствам  $1/e_2 \ll g/b < 1$  (для значений параметров, которые будут обсуждаться ниже  $g/b = 0,268$ ,  $1/e_2 = 0,0058$  при начальной температуре на поверхности капель 600 К и  $1/e_2 = 0,0084$  при 300 К). Это даёт возможность различать характерные значения величин  $1/e_2$ ,  $g/b$  в системе (6)–(8), вводя ие-

пархию переменных: переменная  $q$  является быстрой, переменная  $p$  – более медленная и переменная  $s$  – самая медленная. Таким образом, система (6)–(8) может рассматриваться как сингулярно возмущённая с малым параметром  $\epsilon = 1/e_2$ .

Полагая  $\epsilon = 0$ , из уравнения (7) для быстрой переменной получаем уравнение медленной поверхности  $0 = -e_1 q^{1/3} F(p, q)$ . Заметим, что функция  $F(p, q)$  принимает положительные значения, следовательно, данное уравнение даёт единственное решение  $q=0$ , описывающее медленную поверхность системы (6)–(8). Плоскость  $q=0$  представляет собой притягивающее положительно инвариантное множество дифференциальной системы (6)–(8).

Нетрудно заметить, что функция  $F(p, q)$  в окрестности нуля не удовлетворяет условию Липшица по переменной  $q$ . Нарушение этого условия ведёт к тому, что не выполняется теорема о существовании интегрального многообразия [4, 5] и сам метод нахождения многообразия в виде разложения по степеням  $\epsilon$  неприменим. Именно на данном этапе наблюдаются разногласия в теории и её применении в статье [1].

Для обоснования допустимости перехода от полной системы (1)–(3) к системе меньшей размерности на плоскости  $q=0$  покажем, что эта плоскость является притягивающим положительно инвариантным множеством. Для этого достаточно проверить, что положение равновесия  $q=0$  так называемого присоединённого уравнения

$$\frac{dq}{ds} = -A q^{1/3} - B q^{2/3}$$

асимптотически устойчиво [4, 5]. Для проверки рассмотрим функцию Ляпунова  $V(q) = 1/2 q^2$ , производная которой в силу присоединённого уравнения

$$\frac{dV}{ds} = -A q^{4/3} - B q^{5/3}, \quad (q \geq 0)$$

отрицательно определена, что и означает выпол-

нение требования асимптотической устойчивости.

Можно выделить два этапа в динамике химической системы. Первый отвечает процессу испарения и траектории системы (6)–(8), соответствующие этому этапу химической реакции, за очень короткий отрезок времени выходят на плоскость  $q=0$ . При этом значения переменной  $q$  изменяются очень быстро на фоне почти неизменных значений  $p$  и  $s$ . После окончания процесса испарения (в данном случае при  $q=0$ , или в исходных переменных при  $r=0$ ) порядок системы (1)–(3) может быть понижен и можно переходить к исследованию зависимости между переменными  $q$  и  $h$ .

### Испарение капель

Капли топлива, введённые в горячий воздух, воспламеняются не мгновенно. При воспламенении процесс испарения проходит более интенсивно за счёт высокой температуры в процессе сгорания. Одновременно с ускорением испарения в этот момент происходит некоторое замедление, так как появляются продукты сгорания, затрудняющие подвод кислорода воздуха к испаряющемуся топливу. Это обстоятельство обуславливает необходимость вести рабочий процесс в дизеле с некоторым избытком воздуха.

На процесс испарения капли влияют различные факторы: свойства топлива, температура газа, окружающего каплю, диаметр (радиус) капли. Топливо представляет собой смесь многих фракций; при нагревании капли вначале испаряются лёгкие фракции, в уменьшающейся капле остаются фракции более тяжёлые, поэтому температура капли в процессе горения нарастает. Однако если испарение капли происходит очень быстро, диффузионные процессы выравнивания состава внутри капли практически отсутствуют и можно считать, что испаряется жидкость одного, среднего состава, а температура капли в процессе испарения остаётся постоянной, равной температуре кипения. При этом

считается, что теплообмен между пламенем и каплей осуществляется за счёт конвекции.

Используя замену переменной  $t = n\bar{t}$  в (6)–(8), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{g}{b} \frac{dp}{dt} &= n [G(s, p, q) - e_1 q^{1/3} F(p, q)]; \\ \frac{dq}{dt} &= -e_1 q^{1/3} F(p, q); \\ \frac{ds}{dt} &= -n G(s, p, q). \end{aligned}$$

Полагая малый параметр  $n$  равным нулю, из последней системы имеем  $\frac{dp}{dt} = \frac{ds}{dt} = 0$  и, в соответствии с начальными условиями (4), получаем  $p \equiv \ln(1 + bq_0)$ ;  $s \equiv nu + h_0$ .

С физической точки зрения это означает, что переменные  $p$  и  $s$  на этапе процессов нагревания, испарения и на начальной стадии горения принимают значения, близкие к начальным. При этом уравнение (7) имеет вид

$$n \frac{dq}{dt} = -A q^{1/3} - B q^{2/3}, \quad (9)$$

где  $A = e_1 q_0 (1 + bq_0)^{1/2}$ ;

$B = e_1 e_3 ((1 + bq_0)^4 - 1)$ ;  $q(0) = 1$ .

Уравнение (9) можно представить в виде

$$n \frac{dr^3}{dt} = -A r - B r^2.$$

Непосредственное интегрирование этого уравнения с учетом (4) даёт

$$t = \frac{3}{e_2 B} \left( 1 - r(t) - \frac{A}{B} \ln \left| \frac{A+B}{A+Br(t)} \right| \right).$$

Исходя из полученной взаимосвязи между безразмерными временем и радиусом каплей, можно вычислить время испарения  $t = t_{evap}$ , полагая  $r(t_{evap}) = 0$ :

$$t_{evap} = \frac{3}{e_2 B} \left( 1 - \frac{A}{B} \ln \left| \frac{A+B}{A} \right| \right). \quad (10)$$

Этот параметр играет важную роль. Имея аналитическое выражение для его подсчёта и варьируя начальные данные

системы, можно изменять параметр  $t_{evap}$ , что часто является целью технологического процесса. Например, увеличив время испарения, при прочих выгодных условиях можно понизить число так называемых «тяжёлых» углеводородов, которые замедляют процесс горения, несколько ухудшая работоспособность, мешая бездымному сгоранию топлива, понижая производительность двигателя.

### Воспламенение газовой смеси

На данном этапе происходит прогрев горючей смеси до температуры воспламенения и собственно горение смеси. Установившееся горение характеризуется двумя взаимосвязанными процессами: испарением горючего за счёт теплоты, получаемой от пламени, и горением смеси воздуха и паров топлива на некотором расстоянии от поверхности капли; при этом скорость испарения и скорость горения смеси одинаковы. Другими словами, скорость горения жидкой капли понимается как скорость исчезновения жидкой фазы или как скорость испарения.

Для значений времени  $t > t_{evap}$  безразмерный радиус каплей равен нулю и система (1)–(3) принимает вид

$$g(1 + bq)^{-1} \frac{dq}{dt} = h \exp\left(\frac{q}{1 + bq}\right)$$

$$\frac{dh}{dt} = -h \exp\left(\frac{q}{1 + bq}\right).$$

Исключая переменную  $t$  из этой системы, приходим к уравнению

$$g(1 + bq)^{-1} \frac{dq}{dh} = -1.$$

Непосредственное интегрирование приводит к соотношению

$$q(t) = \frac{1}{b} \left[ (1 + b\bar{q}_0) \exp\left(\frac{b(\bar{h}_0 - h)}{g}\right) - 1 \right],$$

где  $\bar{q}_0 = q(t_{evap})$ ,  $\bar{h}_0 = h(t_{evap})$ . Следует отметить, что зависимость между  $q$  и  $h$  при  $t > t_{evap}$  может быть получена из (5) при  $r=0$ . Эта зависимость показывает, как бу-

дуг изменяться концентрация и температура газа во времени после испарения капель топлива. Изменяя начальные данные, можно получать наиболее оптимальные зависимости при прочих равных условиях, что весьма важно для данного процесса. Например, увеличив температуру газа, можно добиться ускорения сгорания топлива. Увеличивая же концентрацию, мы обогащаем смесь, тем самым увеличивая мощность двигателя.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-08-00154 а.

### Библиографический список

1. Sazhin, S.S. Thermal ignition analysis of a monodisperse spray with radiation [Text] / Sazhin S.S., Feng G., Heikal M.R. and others // Combustion and Flame. – 2001. – V. 124. – Issue 4. – P. 684–701.
2. Sazhin, S.S. Order reduction of a non-Lipschitzian model of monodisperse spray ignition [Text] / Sazhin S.S., Shchepakina E., Sobolev V. // Mathematical and Computer Modelling. – 2010. – V. 52 – Issues 3-4. – P.529-537.
3. Соболев, В.А. Декомпозиция разнотемповых систем с разрывными управлениями [Текст] / В.А. Соболев, Л.М. Фридман // Автоматика и телемеханика. – 1988. – № 3. – С. 29–34.
4. Singular perturbations and hysteresis [Text] / Eds. M.P. Mortell, R.E. O'Malley, A. Pokrovskii [et al.] – Philadelphia: SIAM, 2005. – 344 p.
5. Соболев, В.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике [Текст] / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. – М.: Физматлит, 2010. – 320 с.

## A NEW MATHEMATICAL TOOL FOR MODELLING THE PROCESSES IN FUEL SPRAYS

© 2011 S.S. Sazhin<sup>1</sup>, V.A. Sobolev<sup>2</sup>, E.A. Shchepakina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>University of Brighton, UK

<sup>2</sup>Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov  
(National Research University)

New concepts of positively (negatively) invariant manifolds for non-linear systems with non-Lipschitzian nonlinearities have been introduced. It is pointed out that the order reduction of these systems can be performed, using these new concepts. It is shown that the singularly perturbed system of three equations (droplet radii, gas temperature and fuel vapour concentration) describing evaporation and ignition of monodispersed sprays possesses the attractive positively invariant manifold. This allows us to reduce this system to the system of two equations describing gas temperature and fuel concentration when the droplet evaporation process has been completed. An additional equation describes the reduction of droplet radii when the variations of gas temperature and fuel vapour concentration can be considered small.

*Invariant manifolds, non-smooth nonlinearities, reduction, diesel engine, fuel spray.*

### Информация об авторах

**Сажин Сергей Степанович**, кандидат физико-математических наук, профессор Школы информатики, техники и математики, Университет Брайтона, Великобритания. Область научных интересов: моделирование процессов тепло- и массопередач в спреях, моделирование двигателей внутреннего сгорания. E-mail: [S.Sazhin@brighton.ac.uk](mailto:S.Sazhin@brighton.ac.uk).

**Соболев Владимир Андреевич**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика многотемповых управляемых систем, математическое моделирование. E-mail: [hsablem@yahoo.com](mailto:hsablem@yahoo.com).

**Щепакина Елена Анатольевна**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамические системы, математическое моделирование. E-mail: [shchepakina@yahoo.com](mailto:shchepakina@yahoo.com).

**Sazhin Sergei**, candidate of physical and mathematical sciences, professor of School of Computing, Engineering and Mathematics, University of Brighton, UK. Area of research: mathematical modelling of fluid dynamics, heat transfer and combustion processes in internal combustion engines. E-mail: [S.Sazhin@brighton.ac.uk](mailto:S.Sazhin@brighton.ac.uk).

**Sobolev Vladimir Andreevich**, doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). Area of research: dynamics of multi-scale control systems, mathematical modeling. E-mail: [hsablem@yahoo.com](mailto:hsablem@yahoo.com).

**Shchepakina Elena Anatolyevna**, doctor of physical and mathematical sciences, professor of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). Area of research: dynamical systems, mathematical modeling. E-mail: [shchepakina@yahoo.com](mailto:shchepakina@yahoo.com).