

## ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРНОГО ДВИЖЕНИЯ ПЕРВОЙ СТУПЕНИ АВИАЦИОННО-КОСМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© 2024

**А. А. Храмов** кандидат технических наук, доцент кафедры динамики полёта и систем управления;  
Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королёва;  
[khramov@ssau.ru](mailto:khramov@ssau.ru)

Рассматриваются задачи оптимизации траекторного движения первой ступени авиационно-космической системы по критерию максимума конечной массы. Управлением является угол атаки и тяга двигателей. Оптимизация управления проводится на участке траектории от точки приведения первой ступени в район запуска до достижения требуемых для отделения космической ступени параметров движения. Для определения оптимальных программ управления используется принцип максимума Понтрягина. Решение задачи без ограничений на режимы движения проведено на примере разгона и набора высоты первой ступени авиационно-космической системы RASCAL. Предложена методика определения приближённо-оптимального управления в задаче с ограничением на высотный диапазон работы двигателей с раздельной оптимизацией активного и пассивного участков и поиском оптимальной точки их сопряжения. Обсуждаются изменения программы управления, траектории движения и затрат топлива при ограничении максимальной высоты полёта на активном участке.

*Воздушный старт; авиационно-космическая система; оптимальное управление; тяга двигателя; угол атаки; принцип максимума Понтрягина*

---

**Цитирование:** Храмов А.А. Оптимизация траекторного движения первой ступени авиационно-космической системы // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2024. Т. 23, № 1. С. 80-92. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-1-80-92

### Введение

На протяжении уже нескольких десятилетий в качестве перспективных средств выведения космических аппаратов на околоземную орбиту рассматриваются многоразовые авиационно-космические системы (АКС), различные концепции которых существуют как в России, так и за рубежом [1 – 3]. АКС включает самолёт-носитель, задача которого заключается в доставке космической ступени на заданную высоту с заданной скоростью и углом наклона траектории. Космическая ступень после отделения выводит полезную нагрузку на околоземную орбиту. Среди преимуществ использования АКС можно выделить снижение стоимости запуска полезной нагрузки за счёт энергетически выгодных траекторий выведения, расширение возможных географических координат точек старта, что обеспечит широкий диапазон наклонений орбит. Использование в составе космической ступени крылатого аэрокосмического аппарата позволит реализовать его многоразовое применение.

Возможность выведения космических аппаратов с использованием АКС делает актуальной задачу оптимизации движения самолёта-носителя, в качестве которого может использоваться либо модернизированный дозвуковой или сверхзвуковой самолёт, либо специально созданный аппарат [3]. Задача оптимизации может заключаться в максимизации конечной массы при наборе заданной высоты и скорости с заданным углом наклона траектории. Так как полёт самолёта-носителя проходит на трансатмосферных высотах с достижением сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей, то при оптимизации движения необходимо учитывать ограничения на высотно-скоростной диапазон работы его двигателей.

Результаты решения задач оптимизации траекторного движения летательных аппаратов (ЛА) в атмосфере обобщены и систематизированы в работе [3]. Отдельные результаты получены сотрудниками Самарского университета. В работах [4; 5] проводится оптимизация разгона ЛА до гиперзвуковых скоростей в предположении, что двигатель самолёта-разгонщика работает без выключений. Оптимизация пассивного движения ЛА при наборе высоты проведено в работах [6 – 8].

В общем случае траектория полёта первой ступени АКС может включать как активные, так и пассивные участки. В данной работе, являющейся продолжением исследований [6; 7], рассматривается задача оптимизации траектории полёта первой ступени АКС RASCAL [1; 2] до достижения требуемых для отделения космической ступени параметров движения при минимальных затратах топлива. Оптимизационные расчёты начинаются с точки приведения АКС в район запуска с заданными параметрами.

### Постановка задачи

**Модель движения.** Рассматривается движение ЛА под действием силы тяготения Земли, форма которой принимается сферической, аэродинамической силы и силы тяги двигателей (на активных участках траектории). Математическая модель движения в траекторной системе координат без учёта сил инерции имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\sigma_x \rho V^2 - g \sin \theta + \frac{P}{m} \cos \alpha, & \frac{dR}{dt} &= V \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sigma_y \rho V + \left( \frac{V}{R} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta + \frac{P}{Vm} \sin \alpha, & \frac{dm}{dt} &= -\beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $V$  – скорость ЛА относительно Земли;  $\theta$  – угол наклона траектории;  $R$  – величина радиус-вектора ЛА;  $m$  – масса ЛА;  $\rho$  – плотность атмосферы;  $g = \mu / R^2$  – гравитационное ускорение;  $\mu = 398600,44 \text{ км}^3/\text{с}^2$  – гравитационная постоянная Земли,  $\beta = \frac{P}{I_{yd} g_0}$  – секундный массовый расход,  $P$  – сила тяги двигателей,  $I_{yd}$  – удельный импульс тяги;  $g_0 = 9,80665 \text{ м}/\text{с}^2$  – среднее гравитационное ускорение на поверхности Земли;  $\alpha$  – угол атаки;  $\sigma_x = \frac{c_{xa} S}{2m}$  – баллистический коэффициент;  $\sigma_y = \frac{c_{ya} S}{2m}$  – коэффициент планирования;  $c_{xa}$ ,  $c_{ya}$  – коэффициенты лобового сопротивления и подъёмной силы;  $S$  – характерная площадь ЛА.

Плотность атмосферы задаётся экспоненциальным законом:

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta_h h),$$

где  $h = R - R_{cp}$  – текущая высота полёта ЛА;  $R_{cp} = 6371,22 \text{ км}$  – средний радиус Земли;  $\rho_0 = 1,225 \text{ кг}/\text{м}^3$  – плотность атмосферы у поверхности Земли;  $\beta_h = 0,141 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$  – логарифмический градиент плотности атмосферы.

**Граничные условия движения.** Для определения оптимальной траектории должны быть заданы начальные условия движения ЛА в момент времени  $t_0$ :

$$t_0 = 0, V = V_0, \theta = \theta_0, R = R_0, m = m_0. \quad (2)$$

В конечный момент времени  $t_k$  аппарат должен достичь заданных значений скорости полёта, угла наклона траектории и высоты:

$$t = t_k, V = V_k, \theta = \theta_k, h = h_k. \quad (3)$$

**Управление.** Параметрами управления траекторным движением ЛА являются угол атаки  $\alpha$  и тяга двигателей  $P$ . На угол атаки  $\alpha$  вводятся ограничения:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}, \quad (4)$$

где  $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$  – минимальный и максимальный углы атаки.

**Аэродинамические характеристики.** Коэффициенты подъёмной силы и лобового сопротивления представляются соотношениями, соответствующими квадратичной поляре:

$$c_{ya} = c_{ya \min} + c_{ya}^{\alpha} \alpha, \\ c_{xa} = c_{xa0} + A c_{ya}^2.$$

Здесь  $c_{ya}^{\alpha} = \frac{c_{ya \max} - c_{ya \min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}$  – производная коэффициента подъёмной силы по углу атаки;

$c_{ya \min}$  и  $c_{ya \max}$  – коэффициенты подъёмной силы, соответствующие минимальному  $\alpha_{\min}$  и максимальному  $\alpha_{\max}$  углам атаки;  $c_{xa0}$  – коэффициент лобового сопротивления при нулевом угле атаки,  $A$  – коэффициент отвала поляры.

Аэродинамические характеристики зависят от числа Маха  $M = \frac{V}{a}$ , где  $a$  – скорость звука в текущей точке траектории, связанная с температурой атмосферы  $T_a$  соотношением:

$$a = 20,046796 \sqrt{T_a}.$$

Температура атмосферы  $T_a$  определяется согласно ГОСТ 4401-81 [10].

Для определения аэродинамических характеристик использовались зависимости, приведённые в [2]. Коэффициенты  $c_{ya \min}, c_{ya \max}, c_{xa0}$  и  $A$  представлены в табл. 1. Значения коэффициентов между табличными числами Маха определяются линейной интерполяцией.

Таблица 1. Аэродинамические характеристики АКС RASCAL

$M$	0,8	1,2	2	2,4	3	4
$c_{ya \min}$	0,046667	0,066667	0	0	0	0
$c_{ya \max}$	1,38	1,2	0,87	0,68	0,52	0,42
$c_{xa0}$	0,02	0,042	0,05	0,04	0,013	0,013
$A$	0,25205	0,32083	0,36332	0,55147	0,69157	0,85034

**Высотно-скоростные характеристики двигательной установки.** На рассматриваемый ЛА установлены четыре двухконтурных турбореактивных двигателя (ТРДД) Pratt and Whitney F-100 со статической тягой на форсажном режиме работы 129 кН каждый. Суммарная тяга и удельный импульс двигателей аппроксимировались (рис. 1) в соответствии с данными работ [1; 2] полиномами четвертой и третьей степени числа Маха, соответственно; коэффициенты полиномов принимались в виде линейных функций высоты полёта:

$$P(h, M) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^1 p_{i,j} h^j M^i, \quad I_{уд}(h, M) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 I_{i,j} h^j M^i. \quad (5)$$

Для расширения высотно-скоростного диапазона работы ТРДД используется система дополнительной подачи кислорода и охлаждения двигателей МІРСС (Mass Injection Pre-Compressor Cooling), включающая баки с водой и жидким кислородом для впрыскивания в канал воздухозаборника. Поступающий воздух охлаждается водой и жидким кислородом, что позволяет двигателю работать при скоростях движения, превышающих проектные пределы обычных ТРДД (до 4 чисел Маха). Кроме того, вода и жидкий кислород увеличивают плотность входящего потока, расширяя высотный диапазон работы двигателя до 26,8 км.

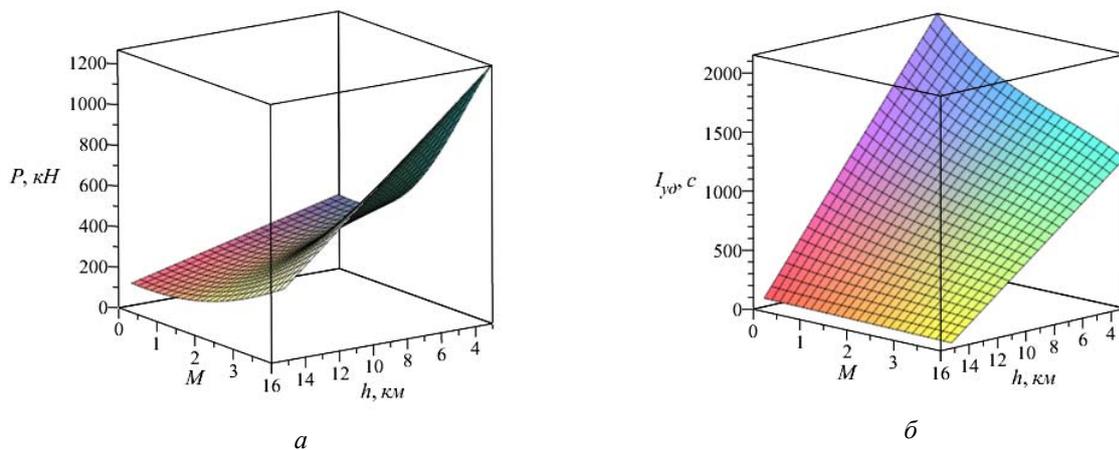


Рис. 1. Зависимости тяги (а) и удельного импульса (б) от числа Маха и высоты полёта

Для моделирования работы МІРСС вводятся понятия кажущейся высоты и кажущегося числа Маха [2]. Для перехода от действительных к кажущимся параметрам используются зависимости, представленные на рис. 2.

Дополнительный массовый расход воды и жидкого кислорода системы МІРСС определяется согласно [2] относительно расхода топлива двигателей при статической тяге на уровне моря (рис. 3).

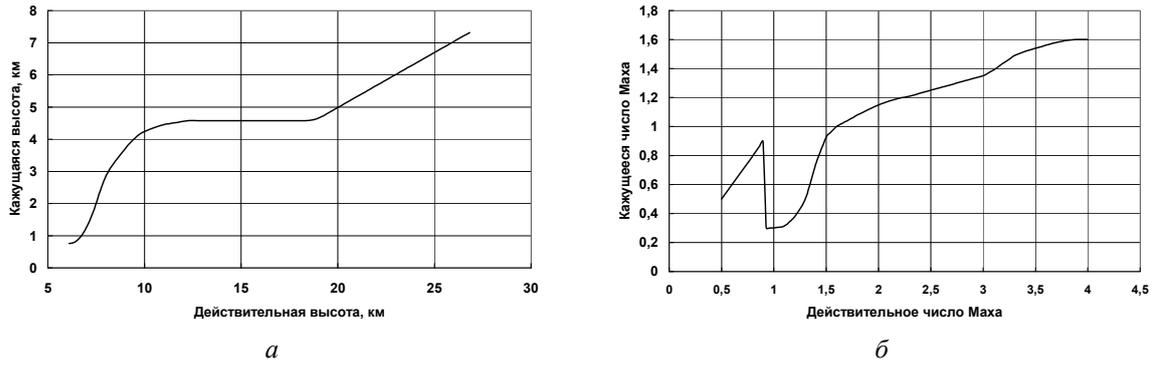


Рис. 2. Модели работы системы МIPCC по высоте (а) и числу Маха (б)

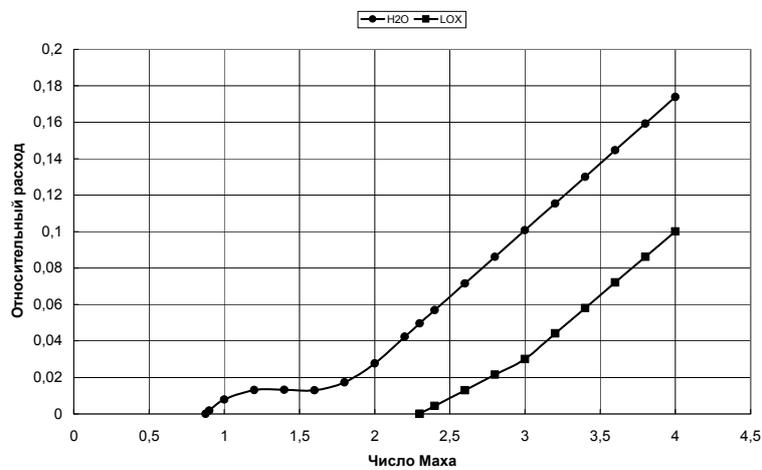


Рис. 3. Относительный расход воды ( $H_2O$ ) и жидкого кислорода ( $LOX$ ) системы МIPCC в зависимости от числа Маха

**Постановка задачи оптимизации.** Требуется найти оптимальные программы изменения угла атаки  $\alpha(t)$  и тяги двигателей  $P(t)$  при заданном ограничении (4), обеспечивающие достижение заданных конечных условий движения (3) с максимальной конечной массой ЛА.

### Задача оптимизации

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [11] оптимальное управление для принятого критерия должно обеспечивать минимум функции Гамильтона системы (1) в каждой точке траектории:

$$\begin{aligned}
 H = \psi_V \frac{dV}{dt} + \psi_\theta \frac{d\theta}{dt} + \psi_R \frac{dR}{dt} + \psi_m \frac{dm}{dt} = & -\psi_V \left( \frac{c_{xa} S}{2m} \rho V^2 + \frac{\mu}{R^2} \sin \theta - \frac{P}{m} \cos \alpha \right) + \\
 & + \psi_\theta \left( \frac{c_{ya} S}{2m} \rho V + \left( \frac{V}{R} - \frac{\mu}{VR^2} \right) \cos \theta + \frac{P}{Vm} \sin \alpha \right) + \psi_R V \sin \theta - \psi_m \beta,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\psi_V, \psi_\theta, \psi_R, \psi_m$  – сопряжённые множители.

Программы оптимального управления определим из необходимых условий экстремума гамильтониана по искомым параметрам управления. Для угла атаки можно записать:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{\psi_V}{m} \left( \frac{S}{2} \rho V^2 \frac{\partial c_{xa}}{\partial \alpha} + P \sin \alpha \right) + \frac{\psi_\theta}{m} \left( \frac{S}{2} \rho V \frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha} + \frac{P}{V} \cos \alpha \right) = 0,$$

где  $\frac{\partial c_{xa}}{\partial \alpha} = 2Ac_{ya}^\alpha (c_{yamin} + c_{ya}^\alpha \alpha)$ ,  $\frac{\partial c_{ya}}{\partial \alpha} = c_{ya}^\alpha$ ,

откуда:

$$a \cos \alpha_{opt} - b \sin \alpha_{opt} - c \alpha_{opt} + d = 0. \quad (7)$$

Здесь  $a = \psi_\theta \frac{P}{V}$ ,  $b = \psi_V P$ ,  $c = \psi_V S \rho V^2 A (c_{ya}^\alpha)^2$ ,  $d = \frac{S}{2} \rho V c_{ya}^\alpha (\psi_\theta - 2\psi_V V A c_{yamin})$ .

На активных участках траектории для определения угла атаки необходимо решить трансцендентное уравнение (7), а на пассивных участках угол атаки определяется в явном виде:

$$c_{ya\ opt} = \left( \frac{\psi_\theta}{2A(M)V\psi_V} - c_{yamin} \right) / c_{ya}^\alpha. \quad (8)$$

Оптимальное значение тяги двигателей является релейной функцией:

$$\left. \begin{aligned} P_{opt} &= P_{max}, & \text{при } \frac{\psi_V}{m} \cos \alpha + \frac{\psi_\theta}{Vm} \sin \alpha - \frac{\psi_m}{I_{уд}g_0} < 0 \\ P_{opt} &= 0, & \text{при } \frac{\psi_V}{m} \cos \alpha + \frac{\psi_\theta}{Vm} \sin \alpha - \frac{\psi_m}{I_{уд}g_0} > 0 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где  $P_{max}$  – максимальная тяга двигателей, определяемая согласно (5).

Сопряжённая система уравнений записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_V}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V} = \psi_V \frac{S}{2m} \rho \left[ \frac{\partial c_{xa}}{\partial V} V^2 + 2Vc_{xa} \right] - \psi_\theta \left[ \frac{S}{2m} \rho \left( \frac{\partial c_{ya}}{\partial V} V + c_{ya} \right) + \left( \frac{1}{R} + \frac{\mu}{V^2 R^2} \right) \cos \theta \right] - \\ &- \psi_R \sin \theta + \frac{P}{m} \left[ \psi_V \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial V} - \frac{\psi_\theta}{V^2} \left( V \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial V} - \sin \alpha \right) \right] - \frac{\psi_V V^2 \cos \alpha + \psi_\theta \sin \alpha}{mV} \frac{\partial P}{\partial V} + \psi_m \frac{\partial \beta}{\partial V}, \\ \frac{d\psi_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \left( \frac{\mu}{R^2} \psi_V - V\psi_R \right) \cos \theta + \psi_\theta \left( \frac{V}{R} - \frac{\mu}{VR^2} \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d\psi_R}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial R} = -2\psi_V \frac{\mu}{R^3} \sin \theta - \psi_\theta \left( 2\frac{\mu}{VR^3} - \frac{V}{R^2} \right) \cos \theta - \frac{\psi_V V^2 \cos \alpha + \psi_\theta \sin \alpha}{mV} \frac{\partial P}{\partial h} + \psi_m \frac{\partial \beta}{\partial h} +$$

$$+ \frac{S}{2m} V \left[ \psi_V V \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} c_{xa} + \rho \frac{\partial c_{xa}}{\partial h} \right) - \psi_\theta \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} c_{ya} + \rho \frac{\partial c_{ya}}{\partial h} \right) \right] + \frac{P}{m} \frac{\partial \alpha}{\partial h} \left[ \psi_V \sin \alpha - \frac{\psi_\theta}{V} \cos \alpha \right],$$

$$\frac{d\psi_m}{dt} = \frac{1}{m^2} \left[ \psi_V \left( P \cos \alpha - \frac{c_{xa} S}{2} \rho V^2 \right) + \psi_\theta \left( \frac{P}{V} \sin \alpha + \frac{c_{ya} S}{2} \rho V \right) \right].$$

Производные аэродинамических коэффициентов и угла атаки по скорости и высоте полёта, входящие в систему (10), при пассивном движении рассчитываются по соотношениям, приведённым в [7]. На активных участках траектории указанные производные, как и производные тяги и массового расхода по скорости и высоте, рассчитываются численно методом центральных разностей.

Системы уравнений (1) и (10) с управлением (7 – 9) определяют семейство оптимальных траекторий.

Рассмотрим граничные условия, которым должна удовлетворять искомая экстремаль. В начальной точке траектории значения фазовых переменных зафиксированы (2), в конечной точке заданы только скорость, угол наклона траектории и высота полёта (3), а время движения и масса ЛА (функционал) являются свободными. Тогда согласно работе [11] для конечного момента времени запишем:

$$t = t_k = \text{var}, V = V_k, \theta = \theta_k, h = h_k, \psi_m = -1, H = 0. \quad (11)$$

Расчёт траектории полёта заканчивается при условии достижения требуемой высоты  $h = h_k$ , которое используется для выхода из интегрирования.

Задача оптимизации заключается в определении начальных значений сопряжённых множителей  $\psi_{V0}, \psi_{\theta0}, \psi_{R0}, \psi_{m0}$ , обеспечивающих выполнение граничных условий (2) и (11). Невязками краевой задачи являются отклонения параметров  $V(t_k), \theta(t_k), H(t_k), \psi_m(t_k)$  от требуемых значений в конечный момент времени.

### Результаты решения задачи

Решение задачи оптимизации траекторного движения проведено на примере разгона и последующего набора высоты первой ступени АКС RASCAL [1; 2]. Краевая задача решалась модифицированным методом Ньютона [12].

Согласно [2] начальная масса ЛА равна 33385 кг, характерная площадь – 251 м<sup>2</sup>, граничные условия движения представлены в табл. 2.

Таблица 2. Граничные условия

$t$	$M$	$\theta, \text{град.}$	$h, \text{м}$
$t_0$	0,813	0	15000
$t_k$	2	20	63160

Ограничения на управление по углу атаки:  $\alpha_{\min} = 0, \alpha_{\max} = 20^0$ .

На рис. 4, 5 показаны зависимости параметров оптимальной траектории и параметров управления от времени. Пунктирной линией показан момент выключения двигателей.

Траектория содержит активный участок разгона и пассивный участок набора высоты за счёт набранной кинетической энергии (рис. 4). На активном участке реализуется манёвр «горка» с последующим рикошетирующим. Полученная рикошетирующая траектория характерна для оптимального движения при разгоне ЛА в атмосфере до сверхзвуковых скоростей [3]. В конце активного участка длительностью 154 секунды ЛА достигает высоты 34,5 км с наклоном траектории 48,9 градуса при скорости 3,2 числа Маха. Затраты топлива составили 3709 кг, воды – 242 кг, жидкого кислорода – 71 кг. Пассивный участок характеризуется искривлением траектории под действием силы тяжести с уменьшением угла наклона траектории и скорости до заданных конечных значений.

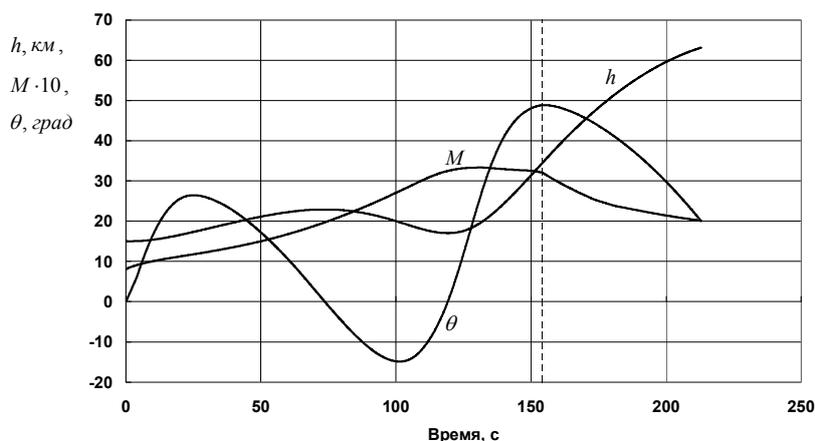


Рис. 4. Зависимости параметров оптимальной траектории от времени

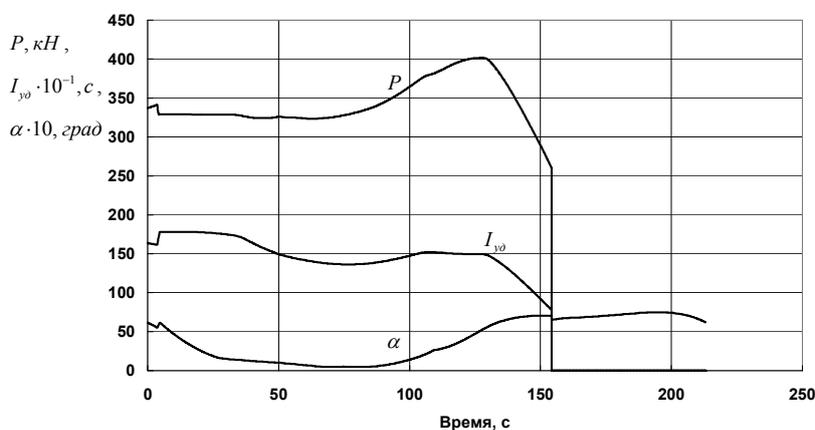


Рис. 5. Зависимости параметров управления и удельного импульса от времени

Программа управления по углу атаки (рис. 5) определяет аэродинамическую силу, действующую на ЛА и влияющую на траекторию полёта, от параметров которой, в свою очередь, зависят сила тяги и удельный импульс двигателей. На начальном участке движения угол атаки значителен, что обеспечивает достаточную подъёмную силу для набора высоты. Далее угол атаки уменьшается, снижая аэродинамическое сопротивление и обеспечивая разгон ЛА, и принимает минимальные значения, близкие к нулю при выходе на «горку». Увеличение угла атаки после схода с «горки» способствует большему рикошетирующему эффекту. Увеличение силы лобового сопротивления при этом компенсируется увеличением тяги вследствие уменьшения высоты и увеличения ско-

рости, а также действием силы тяжести. Далее следует пассивный участок набора высоты с практически постоянным углом атаки.

Характер зависимостей тяги и удельного импульса двигателей определяется изменением высоты и скорости (числа Маха) ЛА (рис. 5). На начальном участке скачкообразно изменяются тяга и удельный импульс вследствие включения системы МРСС при достижении  $M = 0,9$  и переходу к кажущимся параметрам (рис. 2). Далее при выходе на «горку» с увеличением высоты и скорости тяга двигателей практически не меняется, так как их влияние на тягу (рис. 1) компенсируются, а удельный импульс уменьшается. После схода с «горки» с уменьшением высоты и увеличением скорости тяга существенно растёт и достигает максимума в области рикошета, обеспечивая максимальную скорость полёта. Вместе с дальнейшим интенсивным набором высоты и уменьшением скорости тяга, как и удельный импульс, существенно уменьшаются.

### **Определение приближённо-оптимального управления с учётом высотно-скоростного диапазона работы двигательной установки**

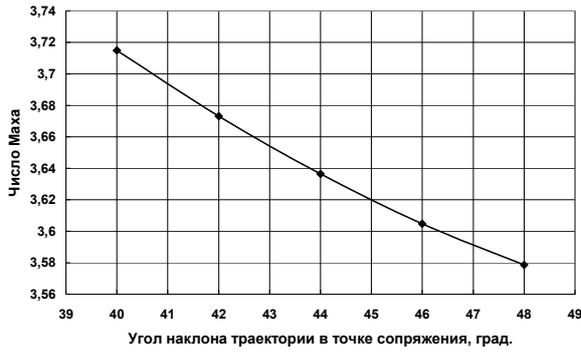
Согласно [1; 2] высотно-скоростной диапазон работы двигательной установки первой ступени системы RASCAL ограничивается высотой 26,8 км и числом Маха 4 единицы. На оптимальной траектории скорость не превышает указанного ограничения, однако работа двигательной установки до высоты  $\sim 35$  км (рис. 4) невозможна.

Для учёта указанного ограничения при построении траектории движения предлагается следующий подход. Движение ЛА разделяется на два участка с точкой сопряжения  $C$ , траектории которых оптимизируются отдельно: участок разгона ( $P = P_{\max}$ ), ограниченный высотой 26,8 км, и пассивный участок набора высоты ( $P = 0$ ) до достижения заданных конечных условий (3). В качестве критерия оптимальности участка разгона принимается максимум конечной массы ЛА, пассивного участка – минимум начальной скорости, обеспечивающий выполнение конечных условий движения.

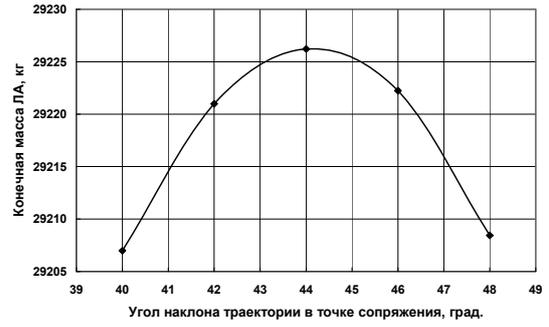
При оптимизации участка разгона необходимо знать скорость и угол наклона траектории в конце данного участка, т.е. в точке сопряжения  $C$ . Для их определения решается серия задач оптимизации пассивного участка в обратном направлении – от конечной точки траектории до достижения точки сопряжения с различными значениями угла наклона траектории  $\theta_C$ . Полученные значения числа Маха  $M_C$  соответствуют минимальной скорости при заданном  $\theta_C$ , необходимой для обеспечения конечных условий движения. При этом считается, что масса ЛА на пассивном участке равна массе, полученной при решении задачи оптимизации без ограничений, равной 29363 кг.

По результатам оптимизации пассивного участка на рис. 6, а приведена зависимость числа Маха  $M_C$  от угла наклона траектории  $\theta_C$  в точке сопряжения. На рис. 6, б приведена зависимость конечной массы ЛА от  $\theta_C$ , полученная по результатам оптимизации участка разгона. Максимальная масса ЛА обеспечивается при  $\theta_C = 44^\circ$ ,  $M_C = 3,636$  и составляет 29226 кг. Таким образом, проектное ограничение высотного диапазона работы двигательной установки снижает конечную массу ЛА на 137 кг.

Для сравнения параметров траектории и управления в задаче без ограничения (цифра «1») и в задаче с ограничением (цифра «2») на рис. 7 приведены зависимости указанных характеристик от времени. На начальном участке движения параметры траекторий практически не отличаются вследствие близости программ управления по углу атаки (рис. 7, а – з). В обеих программах управления угол атаки уменьшается, обеспечивая разгон ЛА вследствие снижения лобового сопротивления. При этом из-за уменьшения подъёмной силы интенсивность набора высоты с течением времени снижается.

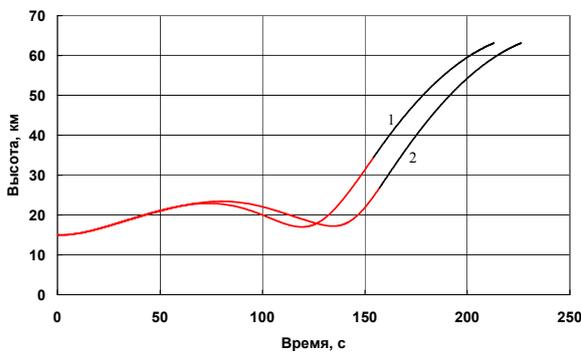


а

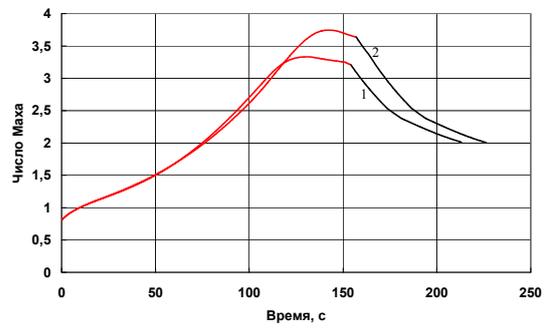


б

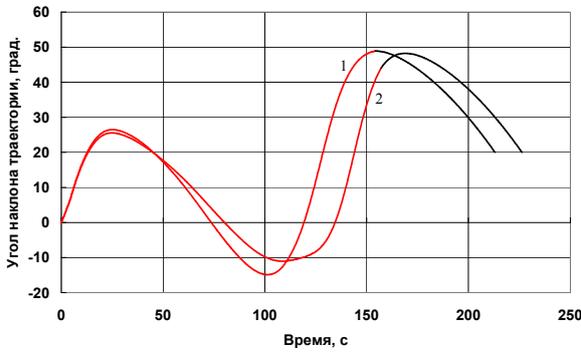
Рис. 6. Зависимости скорости (а), конечной массы ЛА (б) от угла наклона траектории в точке сопряжения



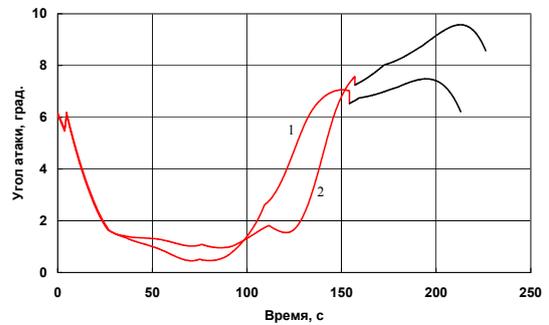
а



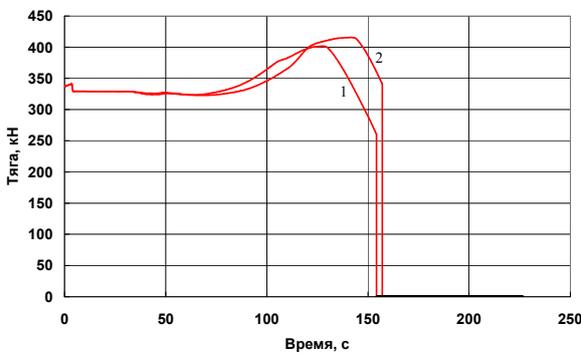
б



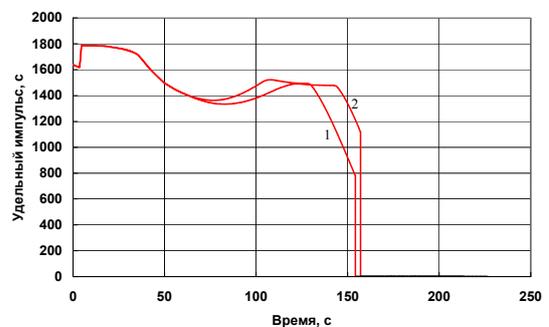
в



г



д



е

Рис. 7. Зависимости параметров траектории и управления от времени

Отличия траекторий начинают проявляться в области выхода на «горку». Ограничение максимальной высоты, на которой возможна работа двигателей, требует большей продолжительности участка разгона ЛА в более плотных слоях атмосферы с большей тягой (рис. 7, д) для обеспечения требуемой скорости в начале последующего пассивного участка набора высоты. Это позволит выйти в конечный момент времени на заданную высоту с заданной скоростью. Глубины погружения при рикошете для обеих траекторий близки (около 17 км), однако рикошетирование траектории в задаче с ограничением наступает позднее; полёт с малыми углами атаки более продолжителен. Большая длительность активного участка в задаче с ограничением обуславливает увеличение расхода топлива, а также компонентов системы МРСС и снижение конечной массы ЛА.

### Заключение

С использованием принципа максимума Понтрягина проведена оптимизация траекторного движения первой ступени авиационно-космической системы RASCAL по критерию максимума конечной массы без учёта ограничений на режимы движения. Для учёта ограничения на высотный диапазон работы двигательной установки предложена методика определения приближённо-оптимального управления с отдельной оптимизацией активного и пассивного участков траектории и поиска оптимальной точки их сопряжения. Проведена оптимизация движения с учётом данного ограничения.

Полученные траектории содержат активный участок разгона и пассивный участок набора высоты за счёт приобретённой кинетической энергии. Рикошетирующий характер траекторий свидетельствует об эффективном использовании аэродинамических свойств ЛА при движении в плотных слоях атмосферы, позволяющем сократить затраты топлива.

Показано, что ограничение на высоту полёта, обусловленное возможностью работы двигателей самолёта-носителя системы RASCAL, приводит к увеличению затрат топлива и компонентов системы МРСС на 3,4% относительно соответствующих затрат в задаче без ограничений.

Посвящается светлой памяти учителя, доктора технических наук, профессора Балакина Виктора Леонидовича.

### Библиографический список

1. Young D.A., Olds J.R. Responsive access small cargo affordable launch (RASCAL) independent performance evaluation // A Collection of Technical Papers – 13th AIAA/CIRA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference (May, 16-20, 2005, Capua, Italy). 2005. V. 1. P. 346-368. DOI: 10.2514/6.2005-3241
2. Young D. Responsive access small cargo affordable launch (RASCAL) independent performance evaluation. 2004. 54 p.  
<https://www.yumpu.com/en/document/view/11944862/responsive-access-small-cargo-affordable-launch-rascal->
3. Бузулук В.И. Оптимизация траекторий движения аэрокосмических летательных аппаратов. М.: ЦАГИ, 2008. 476 с.
4. Балакин В.Л., Крикунов М.М. Анализ программ управления и траекторий движения гиперзвукового самолёта при наборе высоты // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 4. С. 18-26. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-18-26

5. Балакин В.Л., Крикунов М.М. Анализ программ управления и траекторий набора высоты гиперзвуковой первой ступени авиационно-космической системы // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2019. Т. 18, № 1. С. 18-29. DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-18-29
6. Балакин В.Л., Ишков С.А., Храмов А.А. Оптимизация трансатмосферного движения летательного аппарата на основе метода последовательной линеаризации // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2017. Т. 16, № 3. С. 17-26. DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-3-17-26
7. Балакин В.Л., Ишков С.А., Храмов А.А. Оптимизация трансатмосферного движения летательного аппарата на основе метода принципа максимума Понтрягина // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2018. Т. 17, № 1. С. 7-19. DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-7-19
8. Потапов В.И. Программы управления и траектории движения сверхзвуковой первой ступени авиационно-космической системы // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2010. № 1 (21). С. 75-83. DOI: 10.18287/2541-7533-2010-0-1(21)-75-83
9. Лазарев Ю.Н. Управление траекториями аэрокосмических аппаратов. Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. 274 с.
10. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Издательство стандартов, 1981. 180 с.
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
12. Салмин В.В., Ишков С.А., Старинова О.Л. Методы решения вариационных задач механики космического полёта с малой тягой. Самара: Самарский научный центр РАН, 2006. 162 с.

## OPTIMIZATION OF TRAJECTORY MOTION OF THE FIRST STAGE OF AN AEROSPACE SYSTEM

© 2024

**A. A. Khramov** Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Flight Dynamics and Control Systems;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[khramov@ssau.ru](mailto:khramov@ssau.ru)

The problems of optimizing the trajectory motion of the first stage of an aerospace system according to the criterion of the maximum of the final mass are considered. The control is the angle of attack and thrust of the engines. Control optimization is carried out on the trajectory section from the point of bringing the first stage to the launch area until the motion parameters required for separation of the space stage are reached. The Pontryagin's maximum principle is used to determine optimal control programs. The solution of the problem without restrictions on the modes of motion is carried out using the example of acceleration and climb of the first stage of the RASCAL aerospace system. A method is proposed for determining approximate optimal control in a problem with a limitation on the altitude range of the engines with separate optimization of the active and passive sections and the search for the optimal point of their coupling. Changes in control program, trajectory, and fuel consumption are discussed when limiting the maximum flight altitude in the active section.

*Air launch; aerospace system; optimal control; engine thrust; angle of attack; Pontryagin's maximum principle*

---

*Citation:* Khramov A.A. Optimization of trajectory motion of the first stage of an aerospace system. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2024. V. 23, no. 1. P. 80-92. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-1-80-92

## References

1. Young D.A., Olds J.R. Responsive access small cargo affordable launch (RASCAL) independent performance evaluation. *A Collection of Technical Papers – 13th AIAA/CIRA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference (May, 16-20, 2005, Capua, Italy)*. 2005. V. 1. P. 346-368. DOI: 10.2514/6.2005-3241
2. Young D. Responsive access small cargo affordable launch (RASCAL) independent performance evaluation. 2004. 54 p. Available at: <https://www.yumpu.com/en/document/view/11944862/responsive-access-small-cargoaffordable-launch-rascal->
3. Buzuluk V.I. *Optimizatsiya traektoriy dvizheniya aerokosmicheskikh letatel'nykh apparatov* [Optimization of aerospace vehicle flight paths]. Moscow: Central Aerohydrodynamic Institute Publ., 2008. 476 p.
4. Balakin V.L., Krikunov M.M. Analysis of control programs and flight paths of a hypersonic vehicle in climb. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 4. P. 18-26. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-4-18-26
5. Balakin V.L., Krikunov M.M. Analysis of control programs and climb paths of the hypersonic first stage of an aerospace system. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2019. V. 18, no. 1. P. 18-29. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2019-18-1-18-29.
6. Balakin V.L., Ishkov S.A., Khramov A.A. Optimization of space vehicle trans-atmospheric motion by using the method of sequential linearization. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2017. V. 16, no. 3. P. 17-26. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2017-16-3-17-26
7. Balakin V.L., Ishkov S.A., Khramov A.A. Optimizing a vehicle trans-atmospheric motion using Pontryagin's maximum principle. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2018. V. 17, no. 1. P. 7-19. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2018-17-1-7-19
8. Potapov V.I. Control programs and motion trajectories of supersonic first stage of an aerospace system. *Vestnik of the Samara State Aerospace University*. 2010. No. 1 (21). P. 75-83. (In Russ.). DOI: 10.18287/2541-7533-2010-0-1(21)-75-83
9. Lazarev Yu.N. *Upravlenie traektoriyami aerokosmicheskikh apparatov* [Control of aerospace vehicles]. Samara: Samarskiy Nauchnyy Tsentr RAN Publ., 2007. 274 p.
10. GOST 4401-81. Standart atmosphere. Parameters. Moscow: Izdatel'stvo Standartov Publ., 1981. 180 p. (In Russ.)
11. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 393 p.
12. Salmin V.V., Ishkov S.A., Starinova O.L. *Metody resheniya variatsionnykh zadach mekhaniki kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy* [Methods of solving variational problems of low-thrust mission mechanics]. Samara: Samarskiy Nauchnyy Tsentr RAN Publ., 2006. 162 p.