

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБОБЩЁННОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ КВАДРОКОПТЕРА И ЕЁ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

© 2024

- В. А. Зеленский** доктор технических наук, доцент, профессор кафедры радиоэлектронных систем; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [zelenskiy.va@ssau.ru](mailto:zelenskiy.va@ssau.ru)
- М. А. Ковалев** доктор технических наук, доцент, профессор кафедры эксплуатации авиационной техники; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [kovalev.ma@ssau.ru](mailto:kovalev.ma@ssau.ru)
- Д. Н. Овакимян** директор Центра беспилотных систем; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [ovakimyan.dn@ssau.ru](mailto:ovakimyan.dn@ssau.ru)
- В. С. Кириллов** инженер Центра беспилотных систем; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва; [vskirilov2015@yandex.ru](mailto:vskirilov2015@yandex.ru)

Представлена обобщённая кинематическая схема установки моторов квадрокоптера, описаны её основные преимущества. В соответствии со схемой разработана математическая модель кинематики квадрокоптера, выполнена реализация модели в программной среде MatLab. Представленные математические выражения используются для расчёта кинематических характеристик, таких, как значения тяги моторов и обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера. Сравнение полученных данных с экспериментальными характеристиками показало отклонение в 5% величины зависимости тяги от среднего значения напряжения на моторах и отклонение в 30% величины зависимости силы воздействия моторов на корпус от величины тяги.

*Беспилотный летательный аппарат; квадрокоптер; обобщённая кинематическая схема; математическая модель; графический интерфейс пользователя*

---

**Цитирование:** Зеленский В.А., Ковалев М.А., Овакимян Д.Н., Кириллов В.С. Математическая модель обобщённой кинематической схемы квадрокоптера и её программная реализация // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2024. Т. 23, № 1. С. 7-20.  
DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-1-7-20

### Актуальность темы исследования

Беспилотные системы и технологии получили в последнее время широкое распространение. Быстрый рост потребности в беспилотных летательных аппаратах (БПЛА) различного назначения приводит к отставанию научного задела в части разработки систем управления БПЛА и исследования их характеристик. Математическое и имитационное моделирование позволяет рассчитать и, в некоторых случаях, спрогнозировать работу БПЛА в реальных условиях, поэтому тема статьи представляется актуальной. В работе рассматривается БПЛА типа квадрокоптер, поэтому все результаты и выводы относятся только к данному типу беспилотных летательных аппаратов.

### Постановка задачи

Поставлена задача разработать обобщённую кинематическую схему квадрокоптера, математическую модель, соответствующую разработанной схеме, программно-алгоритмическое обеспечение, предназначенное для имитации управляющих воздействий на тягу моторов квадрокоптера. Необходимо также сравнить полученные результаты моделирования для ряда характеристик квадрокоптера с экспериментальными данными.

### Математическая модель обобщённой кинематической схемы квадрокоптера

Наиболее часто применяемые на практике схемы установки моторов (пропеллеров) квадрокоптеров показаны на рис. 1. Исходя из особенностей конструкции и расположения, эти схемы получили специальные названия: Х4, I4 или Н4.

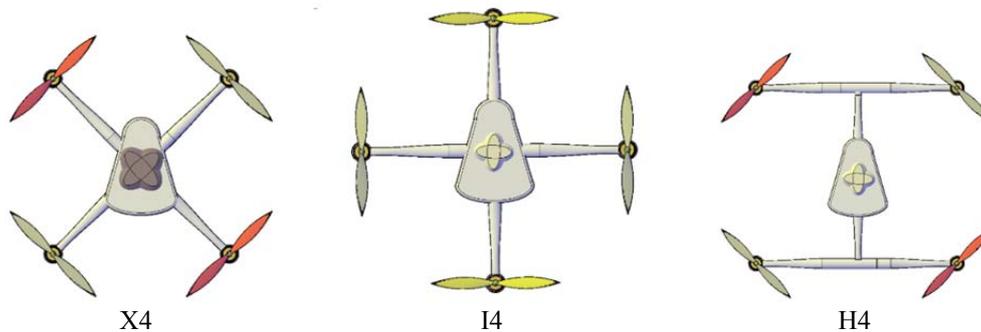


Рис. 1. Основные схемы установки пропеллеров на квадрокоптерах

Каждая из представленных на рис. 1 схем приводит к определённым особенностям построения системы управления квадрокоптера. С целью абстрагирования от упомянутых особенностей в настоящей работе предложена обобщённая кинематическая схема, представленная на рис. 2.

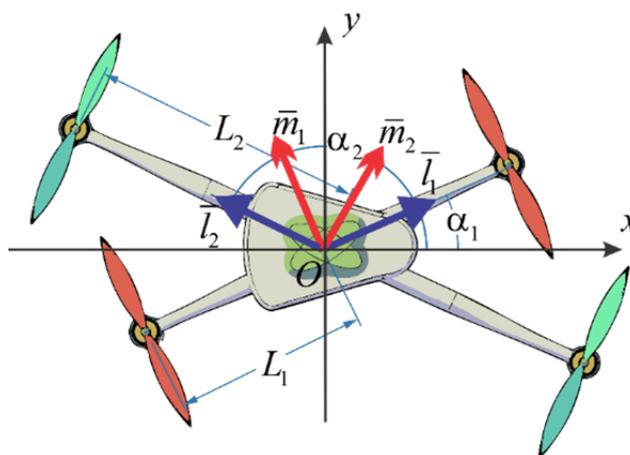


Рис. 2. Обобщённая кинематическая схема установки моторов (пропеллеров) на квадрокоптере

Для определённости примем, что на плоскости  $OXYZ$  направление полёта квадрокоптера задаётся осью  $OX$ . Вращающиеся в одинаковом направлении пары моторов 1-2 и 3-4 расположены, соответственно, на одинаковом расстоянии  $L_1$  и  $L_2$  относительно начала координат  $O$  и их расположение направлено вдоль осей  $OL_1$  и  $OL_2$ . Штанги квадрокоптера образуют с положительным направлением оси  $OX$  углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  при этом  $\alpha_1 > \alpha_2$ . Единичные векторы осей  $OL_1$  и  $OL_2$  обозначены через  $\bar{l}_1$  и  $\bar{l}_2$ , где

$$\bar{l}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{bmatrix}, \bar{l}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Матрица перехода  $R_{BL}$  от осей  $OXY$  к осям  $OL_1L_2$ , которые связаны с осями расположения пропеллеров, имеет следующий вид:

$$R_{BL} = [\bar{l}_1 \quad \bar{l}_2] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1) & \sin(\alpha_2) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\det(R_{BL}) = \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ .

В частном случае, если  $L_1 = L_2 = L$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 135^\circ$ , то показанная на рис. 2 кинематическая схема соответствует стандартной схеме X4, представленной на рис. 1, а при  $\alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 90^\circ$  – схеме I4 на рис. 1. В случае, когда оси  $OL_1$  и  $OL_2$  взаимно ортогональны, матрица  $R_{BL}$  (2) становится ортогональной, а её детерминант равен единице.

Что касается схемы H4 на рис. 1, то она совпадает с представленной на рис. 2 обобщённой кинематической схемой при выполнении следующих условий:

$$L_1 = L_2 = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2}, \quad (3)$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{L_X}{L_Y}\right), \alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1.$$

Принимая во внимание, что пропеллеры установлены непосредственно на осях моторов, можно приближённо считать, что в режиме установившихся движений вращающий момент  $\tau_i$   $i$ -го мотора, создаваемый тягой  $T_i$ , определяется соотношением:

$$\tau_i = k_\psi T_i, i = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

где постоянный коэффициент  $k_\psi = \text{const}$  является конструктивным параметром.

Общая подъёмная сила (тяга)  $u_z$  вдоль вертикальной оси  $OZ$  квадрокоптера определяется суммарной тягой всех четырёх моторов и не зависит от расстояний  $L_1$ ,  $L_2$  и углов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ :

$$u_z = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \quad (5)$$

Аналогично, учитывая уравнение (4), вращающий момент относительно оси рыскания  $OZ$  определяется следующим уравнением:

$$u_\psi = -(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4) = -k_\psi (T_1 - T_2 + T_3 - T_4) \quad (6)$$

где знак минус указывает, что вращающий момент  $\tau_i$ , вызванный вращением  $i$ -го пропеллера, действует на корпус квадрокоптера в обратном направлении.

Таким образом, общая подъёмная тяга  $u_z$  и суммарный вращающий момент  $u_\psi$  вокруг оси рыскания  $OZ$  не зависят от выбора кинематической схемы установки моторов.

Что касается моментов  $u_\phi$  и  $u_\theta$  относительно осей  $OX$  и  $OY$ , то они создаются за счёт разности тяг противоположно действующих моментов, при этом моменты  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  каждой пары находятся в плоскости  $OXY$  и определяются следующими соотношениями:

$$\bar{M}_1 = M_1 \bar{m}_1, M_1 = -(T_1 - T_3) L_1, \quad (7)$$

$$\bar{M}_2 = M_2 \bar{m}_2, M_2 = -(T_2 - T_4) L_2, \quad (8)$$

где векторы  $\bar{m}_1$  и  $\bar{m}_2$  проходят через центр осей координат и направлены перпендикулярно к направлениям установки моторов (на рис. 2 эти векторы показаны утолщёнными линиями). Векторы  $\bar{m}_1$  и  $\bar{m}_2$  имеют следующий вид:

$$\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}, \bar{m}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_2) \\ -\cos(\alpha_2) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Управляющие моменты  $u_\phi$  и  $u_\theta$  в координатной плоскости  $OXY$  определяются как суммарные векторы:

$$\bar{M}_{XY} = \begin{bmatrix} u_\phi \\ u_\theta \end{bmatrix} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 = -(T_1 - T_3) L_1 \bar{m}_1 + M_2 = (T_2 - T_4) L_2 \bar{m}_2 \quad (10)$$

Подставив в (10) выражения (9), получим для компонент  $u_\phi$  и  $u_\theta$  вектора управляющих моментов  $\bar{M}_{XY}$  следующие выражения:

$$u_\phi = (T_1 - T_3) L_1 \sin(\alpha_1) + (T_2 - T_4) L_2 \sin(\alpha_2), \quad (11)$$

$$u_\theta = -(T_1 - T_3) L_1 \cos(\alpha_1) - (T_2 - T_4) L_2 \cos(\alpha_2). \quad (12)$$

Таким образом, выше представлены аналитические выражения для подъёмной силы (5), а также управляющих моментов рыскания  $u_\psi$  (6), крена  $u_\varphi$  (11) и тангажа  $u_\theta$  (12), выраженные через тяги  $T_1, T_2, T_3, T_4$  и показанные на рис. 2 кинематические параметры  $(\alpha_1, \alpha_2, L_1, L_2)$ , которые связаны с геометрией установки моторов (пропеллеров).

Рассмотрим векторы управляющих моментов  $\bar{U} = [u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi]^T$  и тяг  $\bar{T} = [T_1, T_2, T_3, T_4]^T$ . Их взаимосвязь можно записать в матричном виде:

$$\bar{U} = D_M \bar{T}, \quad (13)$$

где матрица  $D_M$  имеет следующий вид:

$$D_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ L_1 \sin(\alpha_1) & L_2 \sin(\alpha_2) & -L_1 \sin(\alpha_1) & -L_2 \sin(\alpha_2) \\ -L_1 \cos(\alpha_1) & L_2 \cos(\alpha_2) & L_1 \cos(\alpha_1) & L_2 \cos(\alpha_2) \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad (14)$$

а её детерминант равен

$$\det(D_M) = -8L_1L_2k_\psi \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (15)$$

Из выражения (12) следует, что связь между тягами  $T_1, T_2, T_3, T_4$  и требуемыми моментами  $u_z, u_\varphi, u_\theta, u_\psi$  определяется следующей матрицей:

$$K_D = D_M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\cos(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{\sin(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\cos(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{\sin(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\cos(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{\sin(\alpha_2)}{2L_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{\cos(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{\sin(\alpha_1)}{2L_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)} & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Если  $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 90^\circ$  и  $L_1 = L_2 = L$ , то матрицы  $D_M$  (14) и  $K_D$  (16) примут следующий вид:

$$D_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & L & 0 & -L \\ -L & 0 & L & 0 \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$K_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2L} & 0 & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Если  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 135^\circ$ , то из (13) и (16) получим:

$$D_M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & \frac{\sqrt{2}L}{2} & -\frac{\sqrt{2}L}{2} \\ -k_\psi & k_\psi & -k_\psi & k_\psi \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$K_D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{1}{4k_\psi} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & -\frac{\sqrt{2}}{4L} & \frac{1}{4k_\psi} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Представленные в данном разделе математические выражения были использованы для реализации модели квадрокоптера в программной среде и предназначены для расчёта его кинематических характеристик, например, значений тяги моторов и обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера вокруг оси рыскания.

### **Программная реализация обобщённой кинематической схемы квадрокоптера**

Реализация имитационной модели квадрокоптера с использованием разработанной обобщённой кинематической схемы выполнена в среде Matlab. Разработан графический интерфейс пользователя (ГИП). Основное окно ввода исходных данных, определяющих режимы работы квадрокоптера, показано на рис. 3.

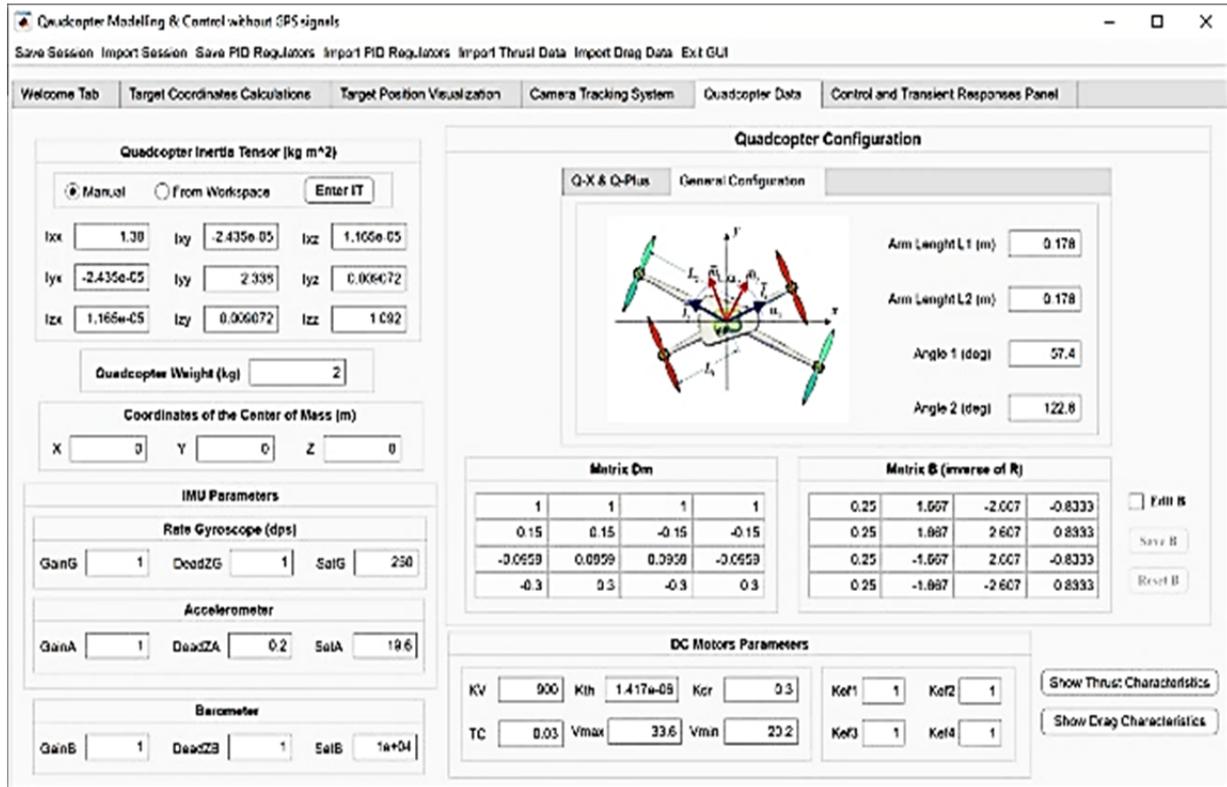


Рис. 3. Основное окно ввода исходных данных

Панель Quadcopter Inertia Tensor в левой верхней части ГИП на рис. 3 предназначена для ввода  $3 \times 3$  симметричного положительно определённого тензора инерции квадрокоптера с учётом всех установленных на нём устройств и элементов (камер, моторов, пропеллеров, аккумуляторов и т.д.). Пользователь может вводить данные в соответствующие окна вручную из рабочего пространства Workspace системы MATLAB, куда эти данные вводятся заранее, или же с жёсткого диска, используя кнопку Import Session на панели меню. При этом производится автоматический контроль корректности введённых данных, а именно, соблюдение условия симметричности и положительной определённости матрицы (тензора) инерции.

В окно следующей панели (ниже панели Quadcopter Weight) вводится расчётный или полученный экспериментальным путём вес квадрокоптера, а ещё ниже расположена панель ввода координат центра масс (Coordinates of the Center of Mass).

Следующая панель IMU Parameters предназначена для ввода паспортных данных скоростных гироскопов (Rate Gyroscopes) и акселерометров (Accelerometers), входящих в состав всех IMU (Inertial Measurement Unit) основных используемых на практике автопилотов БПЛА (Pixhawk, Betaflight, и т.д.). Входными данными гироскопов и акселерометров являются чувствительность или коэффициент передачи (GainG, GainA – Gains), мёртвая зона или зона нечувствительности (DeadZG, DeadZA – Dead Zones) и уровень насыщения выходного сигнала датчика (SatG, SatA – Saturations).

Кроме того, в панель Barometer вводятся аналогичные паспортные данные (GainB, DeadZB, SatB) барометра или любого другого устройства, используемого для определения высоты квадрокоптера.

В правой верхней части ГИП (рис. 3) размещена панель Quadcopter Configuration выбора конфигурации квадрокоптера, т.е. выбора кинематической схемы установки моторов и пропеллеров. Панель Quadcopter Configuration имеет две страницы: General

Configuration (рис. 3), соответствующая обобщённой кинематической схеме на рис. 2, а также страницу Q-X & Q-Plus (рис. 4) стандартных кинематических схем, выбор между которыми производится переключателями (radio-buttons) Q-Plus и Q-X.

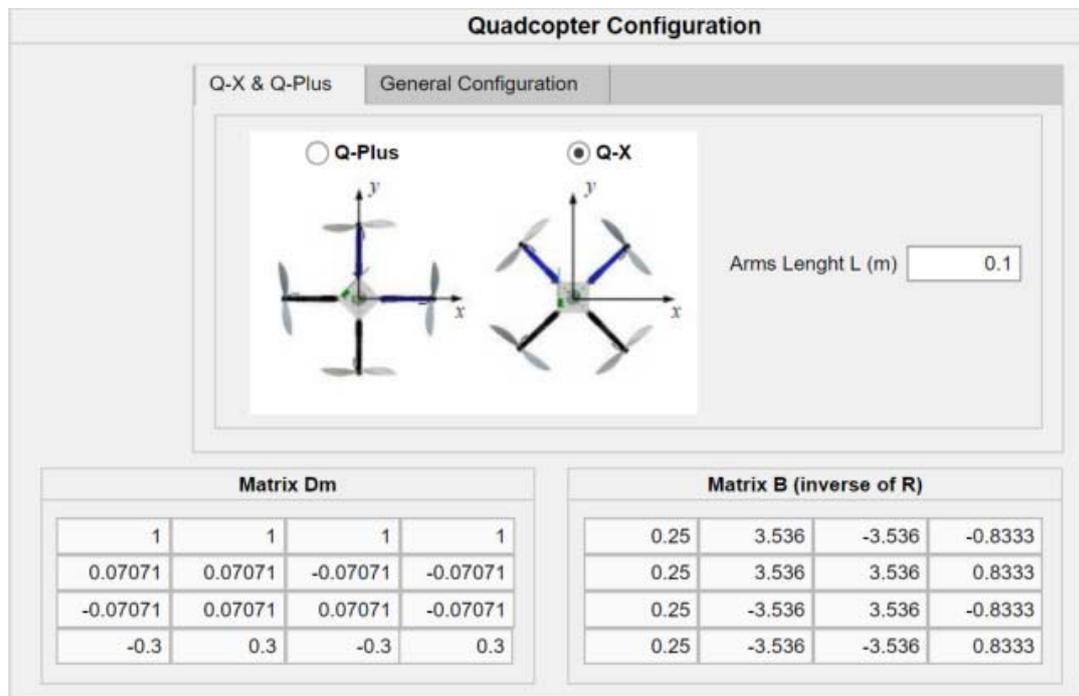


Рис. 4. Панель графического интерфейса пользователя для выбора стандартных кинематических схем установки моторов и пропеллеров

Вводимыми данными на панели Quadcopter Configuration являются углы  $\alpha_1$  (Angle 1) и  $\alpha_2$  (Angle 2) расположения пропеллеров и их расстояния  $L_1$  и  $L_2$  (Arm Length L1 Length L2) до центра масс (для обобщённой кинематической схемы на рис. 3), или же просто длина штанги  $L$  (Arms Length L) для стандартных схем. При вводе указанных данных производится автоматический расчёт матриц  $D_M$  и  $K_D$  по формулам (13) – (20) естественных (кинематических) и искусственных (компенсирующих) взаимных связей между каналами управления квадрокоптера. Эти данные выводятся в окна панелей Matrix Dm и Matrix B.

Ниже панели Quadcopter Configuration находится панель DC Motors Parameters ввода параметров моторов (двигателей постоянного тока). Входными данными здесь являются коэффициент передачи KV, электромеханическая постоянная времени TC (Time Constant), коэффициент тяги  $T_t$  пропеллеров Kth (Thrust Coefficient), коэффициент  $k_\psi$  обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера вокруг оси рыскания Z (drag coefficient), максимальное  $V_{max}$  и минимальное  $V_{min}$  значения напряжений на входах моторов. Коэффициенты  $Kef1$ ,  $Kef2$ ,  $Kef3$  и  $Kef4$  учитывают частичную потерю эффективности моторов, в том числе в случае полного отказа одного из моторов. Эти коэффициенты могут находиться в пределах

$$0 < Kef(i) \leq 1, i = 1, 2, 3, 4. \quad (21)$$

Особое внимание при разработке ГИП UAV\_GUI было уделено вопросу учёта тяги  $T_i$  пропеллеров. Дело в том, что используемая в большинстве научных статей и разработках эмпирическая формула

$$T_i = c_T \Omega_i^2, \quad (22)$$

согласно которой каждый  $i$ -й ротор производит тягу  $T_i$ , теоретически пропорциональную квадрату угловой скорости  $\Omega_i$  и действующую вдоль вертикально оси  $z_B$ , связанной с корпусом БПЛА, весьма далека от реально существующей на практике зависимости. В результате линеаризации относительно какой-либо фиксированной рабочей точки получаем приближённую линейную зависимость

$$T_i \approx c_i \Omega_i, \quad (23)$$

которая справедлива только при очень малых отклонениях угловой скорости от рабочей точки.

С другой стороны, при использовании на практике всех известных автопилотов устанавливаются нижние и верхние границы  $V_{\max}$  и  $V_{\min}$  напряжений на входах моторов, что вообще исключает возможность линеаризации. Например, при взлёте БПЛА напряжение на моторы подаётся не с нуля, а со значения  $V_{\min}$ , т.е. изменение напряжения носит релейный характер.

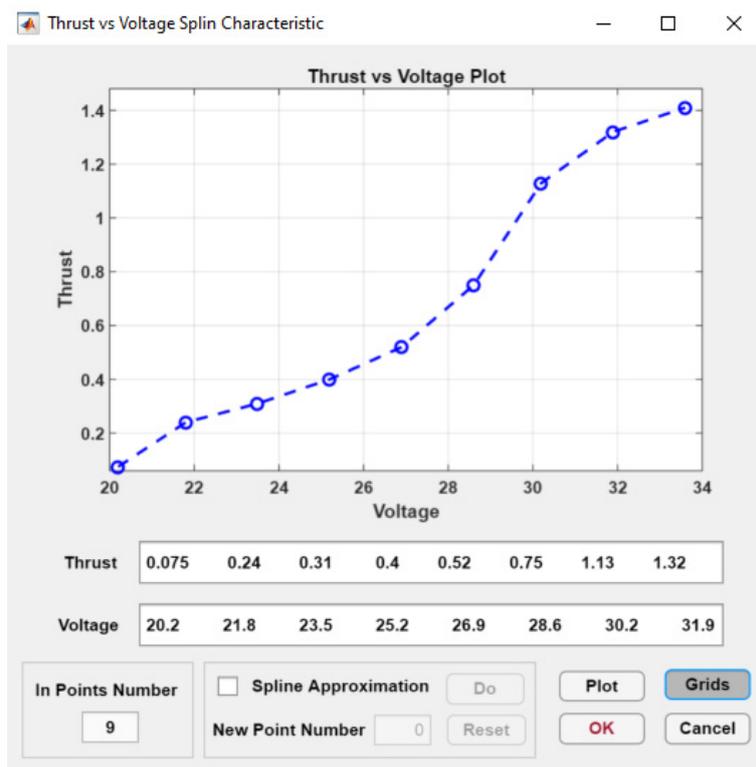
Поэтому в ГИП предусмотрена возможность применения как теоретической зависимости, так и экспериментально полученных данных для тяги моторов с пропеллерами в зависимости от входного напряжения. Кроме того, имеется возможность ввода в интерфейс экспериментальной зависимости обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера вокруг оси рыскания  $Z$  от тяги пропеллеров.

Для ввода в интерфейс экспериментальных данных зависимости тяги моторов от входных напряжений предназначена кнопка Import Thrust Data на панели меню ГИП. При нажатии на эту кнопку, выпадает меню с двумя возможными вариантами ввода данных (рис. 5, а):

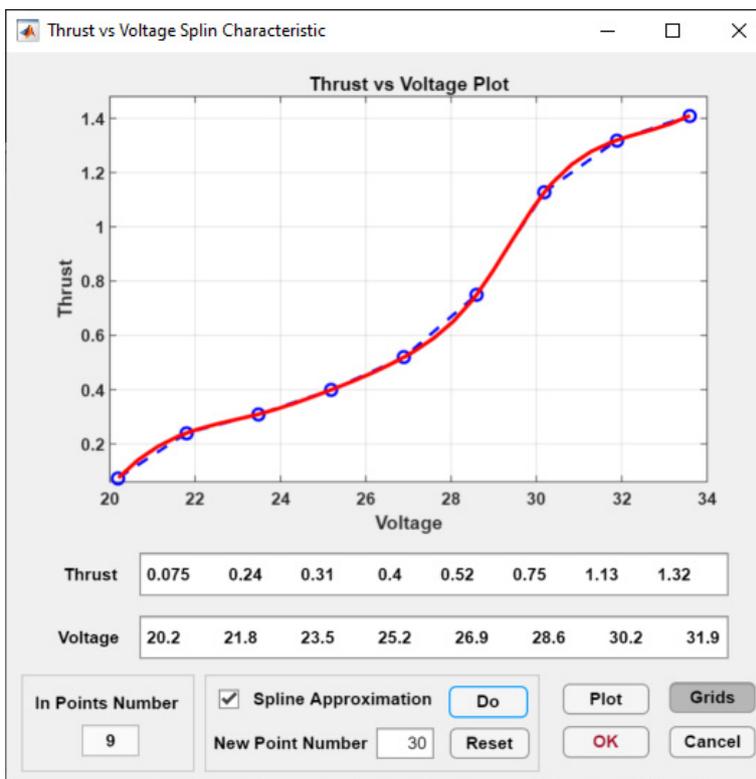
1. From Workspace
2. From Mat-file.

Предполагается, что экспериментальные данные заранее введены в рабочее пространство Workspace или же записаны в некотором файле в памяти компьютера. Эти данные имеют формат матрицы размера  $2 \times n$ , где  $n$  – количество пар данных (пар напряжение – тяга). При выборе желаемого варианта ввода данных из двух возможных вспомогательная программа анализирует все переменные в Workspace или памяти компьютера и выводит в специальное окно список файлов, данные которых соответствуют требуемому формату.

Выбор требуемого файла из списка приводит к вызову окна (рис. 5, а), на котором дан график (пунктирная линия) экспериментальной зависимости тяги моторов (Thrust) от входного напряжения (Voltage). В данном окне показаны также численные значения дискретных экспериментальных данных (окна Thrust и Voltage) и их число (Input Points Number). Имеется также панель Spline Approximation. Её использование даёт возможность ввести желаемое число дополнительных точек в пределах заданного интервала изменения напряжений (окно New Points Number) и, нажав кнопку Do, осуществить сплайн-аппроксимацию экспериментальной кривой с учётом новых точек (сплошная кривая на рис. 5, б).



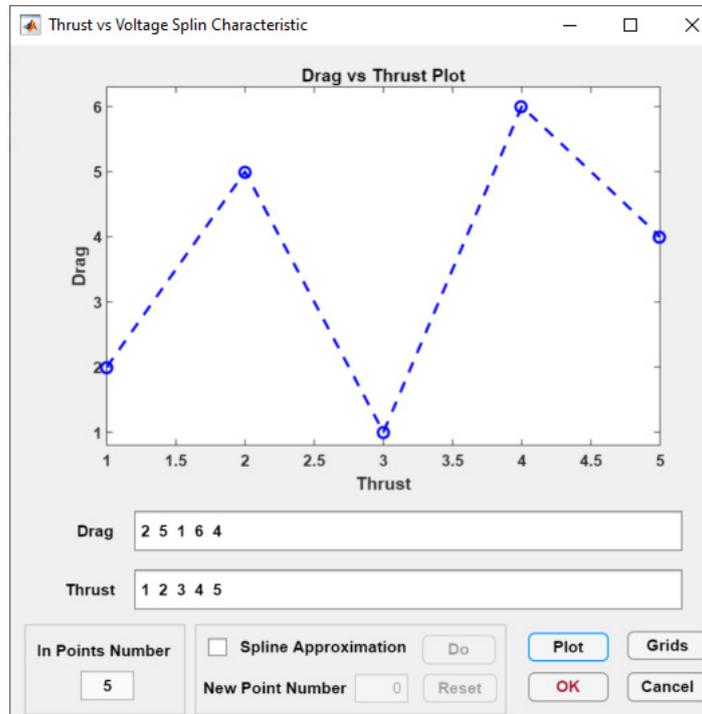
a



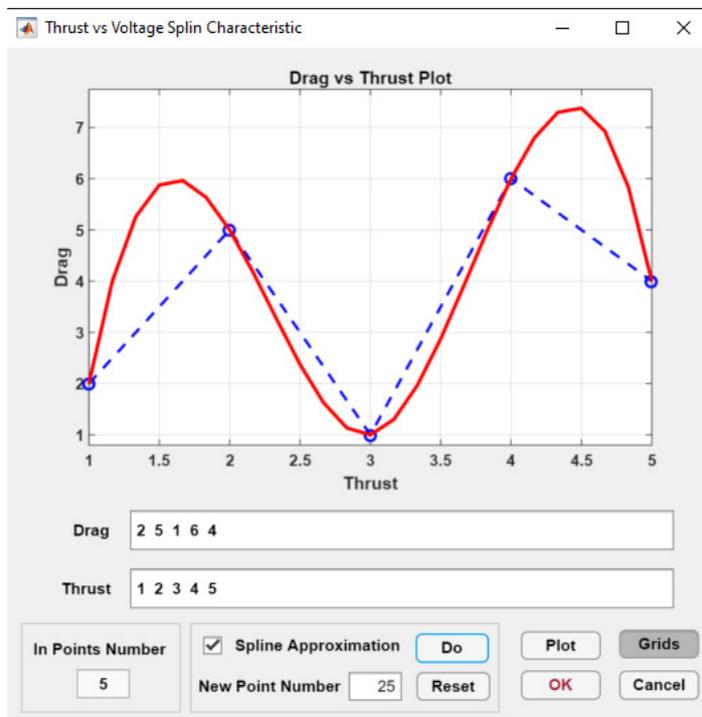
b

Рис. 5. Окна ввода экспериментальных значений зависимости тяги пропеллеров от средних значений напряжений на входах моторов: а – экспериментальные данные; б – сплайн-аппроксимация

Нажатие кнопки ОК в окнах приводит к закрытию этих окон и вводу исходных или скорректированных экспериментальных данных в рабочие алгоритмы ГИП. Аналогичная процедура предусмотрена для ввода экспериментальных данных зависимости обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера от тяги (рис. 6 а, б).



а



б

Рис. 6. Окна ввода экспериментальных значений зависимости обратного воздействия моторов на корпус квадрокоптера от тяги:  
а – экспериментальные данные; б – сплайн-аппроксимация

## Основные результаты и перспективы развития работы

Разработана обобщённая кинематическая схема квадрокоптера, её математическая модель, программно-алгоритмическое обеспечение, предназначенное для имитации управляющих воздействий на тягу моторов квадрокоптера. Приведены сравнительные данные модельных и экспериментальных результатов. Сравнение полученных данных с экспериментальными характеристиками показало отклонение в 5% величины зависимости тяги от среднего значения напряжения на моторах и отклонение в 30% величины зависимости силы воздействия моторов на корпус от величины тяги.

Развитие работы видится в совершенствовании математической модели обобщённой кинематической схемы квадрокоптера с учётом внешних эксплуатационных факторов, в частности, ветровых возмущений.

Статья подготовлена в процессе выполнения НИОКР «Разработка и изготовление автопилота для управления беспилотным летательным аппаратом вертикального взлёта», соглашение ПИАШ/20-П-2023 (28/23Б) от 01.05.2023 г.

## Библиографический список

1. Ковалев М.А., Зеленский В.А., Овакимян Д.Н., Старостина Т.В. Принцип автономной навигации беспилотного летательного аппарата на основе данных дистанционного зондирования Земли // Сборник трудов по материалам VIII Международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2022)» (23-27 мая 2022 г., Самара, Россия). Т. 2. Самара: Издательство Самарского университета, 2022.
2. Алхаддад М. Моделирование и управление ориентацией квадрокоптера с использованием линейного квадратического регулятора // Материалы XII Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы авиации и космонавтики» (11-15 апреля 2016 г., Красноярск). Т. 1. Красноярск: СибГАУ, 2016. С. 883-886.
3. Кузнецов А.Г. Автоматизация процесса посадки малогабаритных беспилотных летательных аппаратов в особых условиях // Труды МАИ. 2011. № 45.
4. Saied M., Knaiber M., Mazeh H., Shraim H., Francis C. BFA fuzzy logic based control allocation for fault-tolerant control of multirotor UAVs // The Aeronautical Journal. 2019. V. 123, Iss. 1267. P. 1356-1373. DOI: 10.1017/aer.2019.58
5. Савельев В.М., Антонов Д.А. Выставка бесплатформенной инерциальной навигационной системы беспилотного летательного аппарата на подвижном основании // Труды МАИ. 2011. № 45.
6. Сухомлинов Д.В., Медведь А.Н. О комплексировании данных в информационно-управляющей системе летательного аппарата // Двигатель. 2014. № 5 (95). С. 38-41.
7. Долгий О.В., Жих А.И., Гришечко В.А. Комплексирование сигналов датчиков в навигационных системах на базе инерциальных элементов // Научные горизонты. 2019. № 4 (20). С. 193-198.
8. Лосев В.В., Корнилов А.В. Комплексирование измерительной информации инерциального блока и системы воздушных сигналов, входящих в состав интегрированной системы резервных приборов // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. 2017. № 52. С. 31-39.
9. Yu G., Morel J.-M., ASIFT: An algorithm for fully affine invariant comparison // Image Processing On Line. 2011. V. 1. P. 11-38. DOI: 10.5201/ipol.2011.my-asift

10. Gasparyan O.N., Darbinyan H.G., Simonyan T.A. The control of quadcopters based on the feedback linearization method // Proceedings of NPUA. Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. 2020. No. 2. P. 44-54.

11. Yol A., Delabarre B., Dame A., Dartois J.-E., Marchand E. Vision-based absolute localization for unmanned aerial vehicles, intelligent robots and systems // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (September, 14-18, 2014, Chicago, IL, USA). 2014. DOI: 10.1109/iros.2014.6943040

12. Buslaev A., Seferbekov S., Iglovikov V., Shvets A. Fully convolutional network for automatic road extraction from satellite imagery // IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (June, 18-22, 2018, Salt Lake City, UT, USA). 2018. DOI: 10.1109/cvprw.2018.00035

13. Fowers S.G. Stabilization and control of a quad-rotor micro-UAV using vision sensors. Dissertations. Brigham Young University, 2008.

14. Saeedi M., Trentini M., Seto M., Li H. Multiple-robot simultaneous localization and mapping: A review // Journal of Field Robotics. 2016. V. 33, Iss. 1. P. 3-46. DOI: 10.1002/rob.21620

## MATHEMATICAL MODEL OF A GENERALIZED QUADCOPTER KINEMATIC SCHEME AND ITS SOFTWARE IMPLEMENTATION

© 2024

**V. A. Zelenskiy** Doctor of Science (Engineering), Associate Professor,  
Professor of the Department of Radio Electronic Systems;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[zelenskiy.va@ssau.ru](mailto:zelenskiy.va@ssau.ru)

**M. A. Kovalev** Doctor of Science (Engineering), Associate Professor,  
Professor of the Department of Aircraft Maintenance;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[kovalev.ma@ssau.ru](mailto:kovalev.ma@ssau.ru)

**D. N. Ovakimyan** Director of the Center for Unmanned Systems;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[ovakimyan.dn@ssau.ru](mailto:ovakimyan.dn@ssau.ru)

**V. S. Kirillov** Laboratory Assistant, Researcher; Center for Unmanned Systems;  
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;  
[vskirillov2015@yandex.ru](mailto:vskirillov2015@yandex.ru)

A generalized kinematic scheme of the installation of quadcopter motors is presented and its main advantages are described. In accordance with the scheme, a mathematical model of the kinematics of the quadcopter was developed. The model was implemented in the MatLab software environment. The presented mathematical expressions are used to calculate kinematic characteristics, such as the values of the thrust of the motors and the reverse effect of the motors on the body of the quadcopter. The comparison of the obtained data with the experimental characteristics showed a 5% deviation of the magnitude of the dependence of the thrust on the average value of the voltage on the motors and a 30% deviation of the magnitude of the dependence of the motor action on the thrust magnitude.

*Unmanned aerial vehicle; quadcopter; generalized kinematic scheme; mathematical model; graphical user interface*

---

**Citation:** Zelenskiy V.A., Kovalev M.A., Ovakimyan D.N., Kirillov V.S. Mathematical model of a generalized quadcopter kinematic scheme and its software implementation. *Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering*. 2024. V. 23, no. 1. P. 7-20. DOI: 10.18287/2541-7533-2024-23-1-7-20

## References

1. Kovalev M.A., Zelenskiy V.A., Ovakimyan D.N., Starostina T.V. UAV's autonomous navigation principle based on Earth remote sensing data. *Proceedings of the 8th IEEE International Conference on Information Technology and Nano-technology, ITNT 2022 (May, 23-27, 2022, Samara, Russian Federation)*. DOI: 10.1109/ITNT55410.2022.9848603
2. Alhaddad M. Modeling and attitude control of a quadcopter using linear quadratic regulator. *Materialy XII Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Aktual'nye Problemy Aviatsii i Kosmonavтики» (April, 15-16, 2016, Krasnoyarsk)*. V. 1. Krasnoyarsk: Siberian State Aerospace University Publ., 2016. P. 883-886. (In Russ.)
3. Kuznetsov A.G. Automation of process of landing of the small-sized unmanned aerial vehicle in special situations. *Trudy MAI*. 2011. No. 45. (In Russ.)
4. Saied M., Knaiber M., Mazeh H., Shraim H., Francis C. BFA fuzzy logic based control allocation for fault-tolerant control of multirotor UAVs. *The Aeronautical Journal*. 2019. V. 123, Iss. 1267. P. 1356-1373. DOI: 10.1017/aer.2019.58
5. Savelyev V.M., Antonov D.A. Strapdown inertial navigation system in-flight alignment for unmanned aircraft on the moving base. *Trudy MAI*. 2011. No. 45. (In Russ.)
6. Sukhomlinov D.V., Medved A.N. Data integration in the aircraft information control system. *Engine*. 2014. No. 5 (95). P. 38-41. (In Russ.)
7. Dolgiy O.V., Zhih A.I., Grishchenko V.A. Sensor fusion in navigation systems based on inertial elements. *Scientific Horizons*. 2019. No. 4 (20). P. 193-198. (In Russ.)
8. Losev V.V., Kornilov A.V. A fusion of the measurement data from the inertial unit and the air data computer system being a part of the integrated standby instrument system. *Bulletin of the Volga State Academy of Water Transport*. 2017. No. 52. P. 31-39. (In Russ.)
9. Yu G., Morel J.-M., ASIFT: An algorithm for fully affine invariant comparison. *Image Processing On Line*. 2011. V. 1. P. 11-38. DOI: 10.5201/ipol.2011.my-asift
10. Gasparyan O.N., Darbinyan H.G., Simonyan T.A. The control of quadcopters based on the feedback linearization method. *Proceedings of NPUA. Information Technologies, Electronics, Radio Engineering*. 2020. No. 2. P. 44-54.
11. Yol A., Delabarre B., Dame A., Dartois J.-E., Marchand E. Vision-based absolute localization for unmanned aerial vehicles, intelligent robots and systems. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (September, 14-18, 2014, Chicago, IL, USA)*. 2014. DOI: 10.1109/iros.2014.6943040
12. Buslaev A., Seferbekov S., Igloukov V., Shvets A. Fully convolutional network for automatic road extraction from satellite imagery. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (June, 18-22, 2018, Salt Lake City, UT, USA)*. 2018. DOI: 10.1109/cvprw.2018.00035
13. Fowers S.G. Stabilization and control of a quad-rotor micro-UAV using vision sensors. Dissertations. Brigham Young University, 2008.
14. Saeedi M., Trentini M., Seto M., Li H. Multiple-robot simultaneous localization and mapping: A review. *Journal of Field Robotics*. 2016. V. 33, Iss. 1. P. 3-46. DOI: 10.1002/rob.21620