

ББК 65.050  
УДК 338.24.01

## РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА В ПЕРИОД ОСВОЕНИЯ НОВОЙ ПРОДУКЦИИ

© 2011 О.В. Павлов<sup>1</sup>, Т.Н. Рясная<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет),  
<sup>2</sup>ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс»

Сформулирована и решена в аналитическом виде динамическая задача планирования производства в период освоения новой продукции. Проблема рассматривается как задача оптимального управления дискретной системой. Решение в аналитическом виде получено с помощью дискретного принципа максимума Понтрягина. Приводится исследование влияния параметров периода освоения на оптимальное распределение объёма производства.

*Освоение новой продукции, трудоёмкость, оптимальные объёмы производства, дискретный принцип максимума Понтрягина, аналитическое решение.*

**Введение.** Отличительной особенностью освоения новой продукции является динамический характер технико-экономических показателей производства. В этот период совершенствуется технологический процесс, налаживаются кооперированные и производственные связи, закрепляются специальные знания и навыки работы, происходит процесс обучения рабочих и менеджеров. Всё это приводит к снижению норм расхода материальных и трудовых ресурсов, потерь от брака, росту скорости и качества трудовой деятельности рабочих и менеджеров [1]-[3]. В результате по мере нарастания объёма выпуска продукции происходит значительное снижение трудоёмкости изделия.

Снижение трудоёмкости производства в период освоения приводит к задаче планирования производства промышленного предприятия. Задача заключается в поиске оптимального распределения объёмов производства по временным отрезкам при заданном времени и заданном суммарном объёме производства с целью минимизации затрат за весь период освоения новой продукции.

**1. Постановка и решение динамической задачи оптимального определения объёмов работ в период освоения новой продукции.**

Динамика изменения суммарного объёма производства промышленного предприятия в период освоения новой продукции описывается дискретным уравнением

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n,$$

где  $x_t$  – суммарный объём производства за  $t$  временной интервал,  $t$  – номер временного интервала,  $u_t$  – объём производства во временном интервале  $t$ ,  $n$  – число временных интервалов в период освоения производства.

В начальный временной интервал объём производства равен 0:

$$x_0 = 0.$$

За время освоения продукции объём произведённой продукции должен составить  $R$ :

$$x_n = R.$$

Объём производства во временном интервале  $t$  неотрицателен и не должен превышать максимальной производственной мощности вводимого оборудования:

$$0 \leq u_t \leq Q^{max}, \quad t = 1, n,$$

где  $Q^{max}$  – максимальная производственная мощность нового оборудования.

Запланированные проектные затраты серийного производства являются квадратичной функцией объёма производства:

$$Z_{np} = \beta u_t^2, \quad (1)$$

где  $\beta$  – размерный коэффициент.

Фактические затраты определяются во временном интервале  $t$ :

$$Z_t = Z_{np} k_t, \quad (2)$$

где  $k_t$  – коэффициент освоения трудоёмкости продукции, который учитывает динамический характер изменения квалификации рабочих и менеджеров.

Подставив выражение (1) в формулу (2), можно получить фактические затраты во временном интервале  $t$ :

$$Z_t = \beta k_t u_t^2. \quad (3)$$

Коэффициент освоения трудоёмкости определяется как отношение фактической трудоёмкости  $\tau_t$  к запланированной проектной трудоёмкости  $\tau_{np}$ :

$$k_t = \frac{\tau_t}{\tau_{np}}. \quad (4)$$

Коэффициент освоения трудоёмкости – безразмерная величина, показывающая динамику изменения трудоёмкости по отношению к запланированной проектной трудоёмкости.

Динамика изменения трудоёмкости производства  $\tau_t$  зависит от времени  $t$ , скорости освоения новой продукции (коэффициента крутизны кривой освоения)  $\gamma$ , трудоёмкости в начальном временном интервале освоения  $\tau_n$  [2]-[3]:

$$\tau_t = f(t, \gamma, \tau_n).$$

Специфика производства будет определять конкретный вид функции, описывающей динамику изменения трудоёмкости новой продукции.

В качестве критерия принятия управленческого решения выступает минимизация суммарных затрат за всё время освоения новой продукции:

$$J = \sum_{t=1}^n \beta k_t u_t^2 \rightarrow \min.$$

Таким образом, модель принятия решений для руководства предприятия запишется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \sum_{t=1}^n \beta k_t u_t^2 \rightarrow \min, \quad (5) \\ 0 \leq u_t \leq Q^{\max}, \quad t = 1, n, \quad (6) \\ x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = 1, n, \quad (7) \\ x_0 = 0, \quad (8) \\ x_n = R. \quad (9) \end{array} \right.$$

Управляющей функцией в модели (5)-(9) являются объёмы производства продукции  $u_t$  во временные интервалы  $t$ ,  $t = 1, n$ , на которые наложено двустороннее ограничение (6). Сформулированная задача (5)-(9) является задачей оптимального управления дискретной системой для нахождения такого управления  $u_t$ , подчинённого ограничению (6), которое переводит дискретную систему (7) из начального состояния (8) в конечное (9), приводя к минимуму критерий оптимальности (5).

Для решения задачи оптимального управления (5)-(9) предлагается использовать дискретный принцип максимума Понтрягина [4], в соответствии с которым гамильтониан равен

$$H_t = \Psi_t [x_{t-1} + u_t] - \beta k_t u_t^2, \quad (10)$$

где  $\Psi_t$  – сопряжённая переменная.

Оптимальное управление должно доставлять максимум гамильтониану по управлению  $u$ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Psi_t - 2\beta k_t u_t = 0.$$

Решение полученного уравнения определяет оптимальное управление:

$$u_t^{opt} = \frac{\Psi_t}{2\beta k_t}. \quad (11)$$

Уравнение для сопряжённой переменной:

$$\Psi_{t-1} = \frac{\partial H}{\partial x} = \Psi_t. \quad (12)$$

Из уравнения (12) следует, что сопряжённая переменная постоянна:

$$\Psi_{t-1} = \Psi_t = C = const.$$

Таким образом, выражение (11) примет вид

$$u_t^{opt} = \frac{C}{2\beta k_t}. \quad (13)$$

Запишем суммарный объём производства по уравнению (7) во временные интервалы  $t=1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}x_1 &= u_1 = \frac{C}{2\beta k_1}, \\x_2 &= x_1 + u_2 = \frac{C}{2\beta} \frac{1}{(k_1 + k_2)}, \\x_3 &= x_2 + u_3 = \frac{C}{2\beta} \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3)}.\end{aligned}$$

Конечное значение суммарного объёма работ за период освоения запишется:

$$x_n = \frac{C}{2\beta} \frac{1}{(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n)} = \frac{C}{2\beta} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i},$$

с учётом граничного условия (9):

$$x_n = \frac{C}{2\beta} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} = R. \quad (14)$$

Из уравнения (14) находится выражение для константы  $C$ :

$$C = \frac{2\beta}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}} R. \quad (15)$$

Если подставить (15) в выражение (13), то получится окончательная формула для оптимального управления:

$$u_t^{opt} = \frac{1/k_t}{\sum_{i=1}^n 1/k_i} R, \quad t = 1, n. \quad (16)$$

Таким образом, оптимальный объём производства во временном интервале  $t$  определяется отношением обратной величины коэффициента освоения трудоёмкости в этом временном интервале к сумме обратных величин коэффициентов освоения трудоёмкости за весь период освоения.

Оптимальная траектория объёмов производства запишется:

$$x_t^{opt} = x_{t-1}^{opt} + \frac{1/k_t}{\sum_{i=1}^n 1/k_i} R, \quad t = 1, n. \quad (17)$$

Подстановка (17) в (5) даст минимально возможные затраты за весь период освоения производства:

$$J^{min} = \beta \frac{R^2}{\sum_{i=1}^n 1/k_i}.$$

## 2. Исследование влияния параметров периода освоения на оптимальное распределение объёмов производства на примере ОАО «Салют».

Исследование влияния параметров периода освоения на оптимальное распределение объёмов производства приводится для функции трудоёмкости  $\tau_t$  следующего вида:

$$\tau_t = \tau_n t^{-\gamma}, \quad t = 1, n, \quad (18)$$

где  $\tau_n$  – трудоёмкость производства в начальном интервале.

Деление левой и правой части выражения (18) на величину запланированной проектной трудоёмкости даст формулу:

$$\frac{\tau_t}{\tau_{np}} = \frac{\tau_n}{\tau_{np}} t^{-\gamma}. \quad (19)$$

С учётом (4) уравнение (19) переписывается в следующем виде:

$$k_t = k_n t^{-\gamma}, \quad t = 1, n, \quad (20)$$

где  $k_n$  – коэффициент освоения трудоёмкости в начальном интервале.

В результате подстановки выражения (18) в формулу для оптимального управления (14) получится

$$u_t^{opt} = \frac{t^\gamma}{\sum_{i=1}^n t^\gamma} R, \quad t = 1, n \quad (21)$$

Анализируя формулу (21), можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальное распределение объёма производства по временным интервалам зависит от номера интервала, скорости освоения новой продукции и запланированного суммарного объёма производства.

2. Оптимальное распределение объёма производства по временным интервалам не зависит от трудоёмкости производства в начальном интервале, которое определяется степенью готовности предприятия к освоению новой продукции.

Далее приведены результаты исследования влияния скорости освоения производства на оптимальное распределение работ по временным интервалам на примере ОАО «Салют». Исследования проводились на основе статистических данных по трудоёмкости для двух изделий: отсек

№1 и отсек №2. С помощью метода наименьших квадратов по статистическим

данным построены регрессионные зависимости (рис. 1 и рис. 2.).

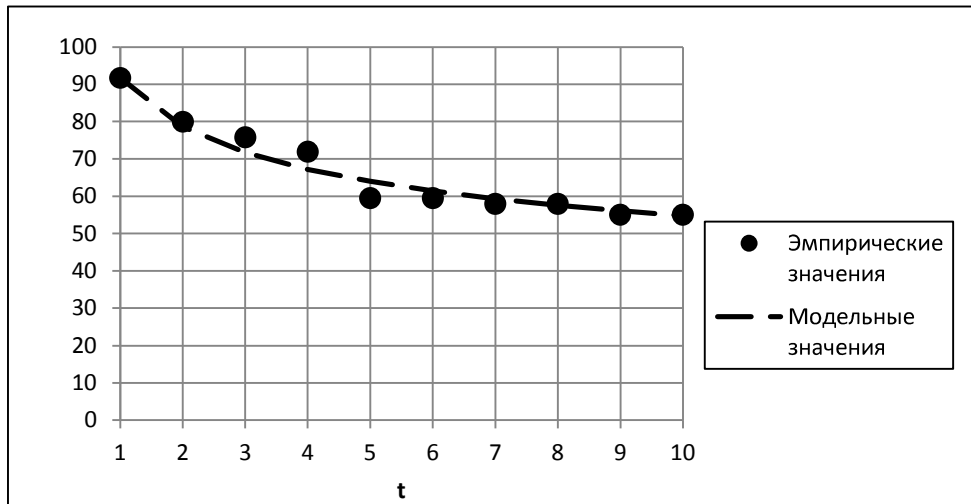


Рис. 1. Аппроксимация статистики по отсеку №1 с помощью МНК

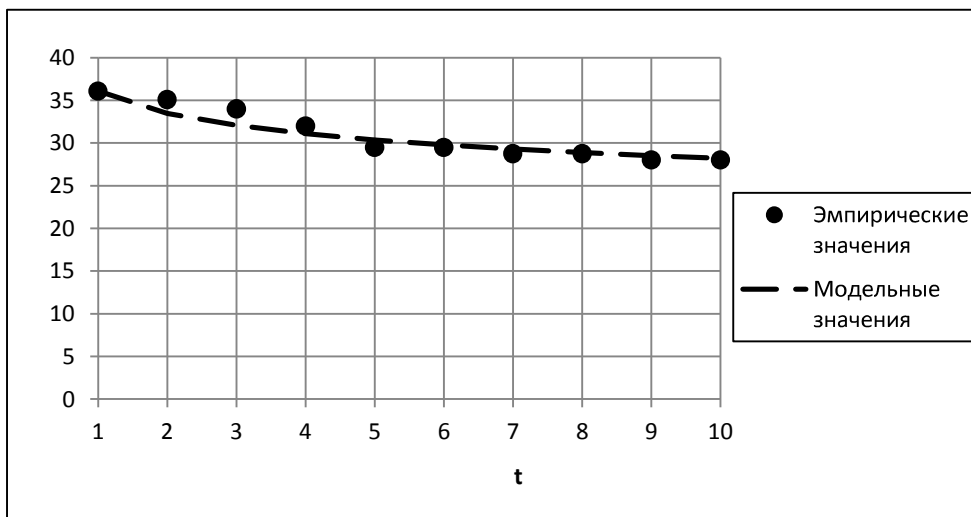


Рис. 2. Аппроксимация статистики по отсеку №2 с помощью МНК

В результате аппроксимации статистики с помощью МНК получены следующие скорости освоения трудоёмкости: для отсека №1  $\gamma \approx 0,22$  и отсека №2  $\gamma \approx 0,11$ . По формуле (21) рассчитывается оптимальное распределение объёма производства по временным интервалам с учётом того, что период освоения каждого из-

делия составляет 10 временных интервалов и общий объём производства по каждому изделию составляет 3 млн. ед. Результаты расчёта приводятся на рисунке 3. Рассчитанные по формуле (7) суммарные объёмы производства за  $t$  временной интервал отражены на рисунке 4.

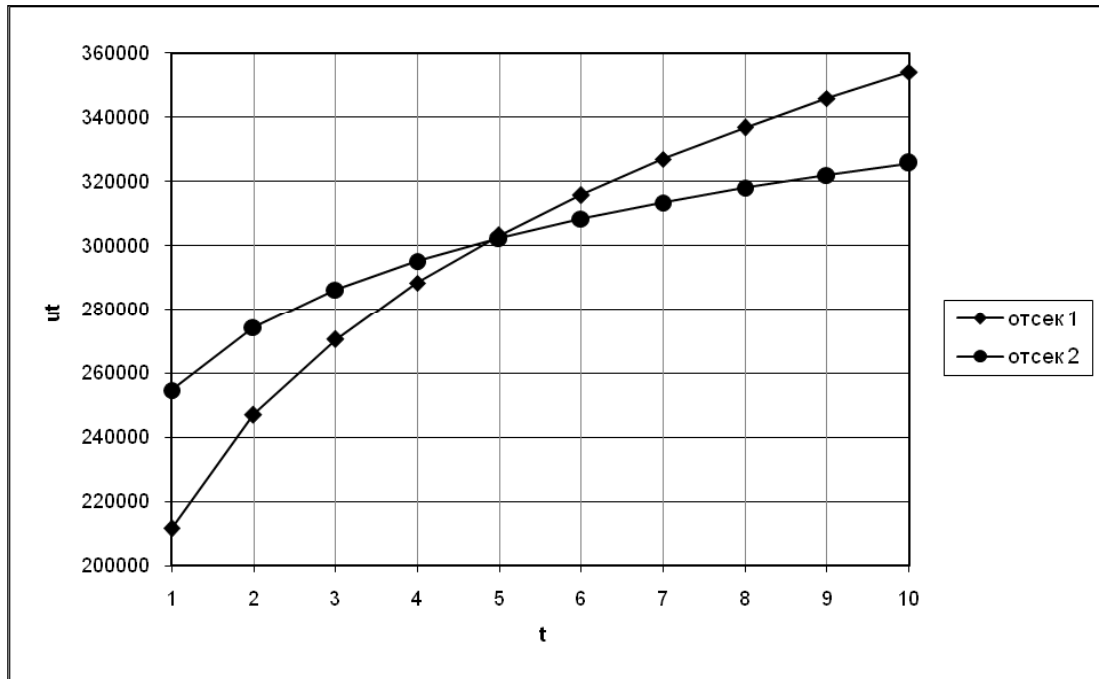


Рис. 3. Оптимальное распределение объёмов производства по временным интервалам

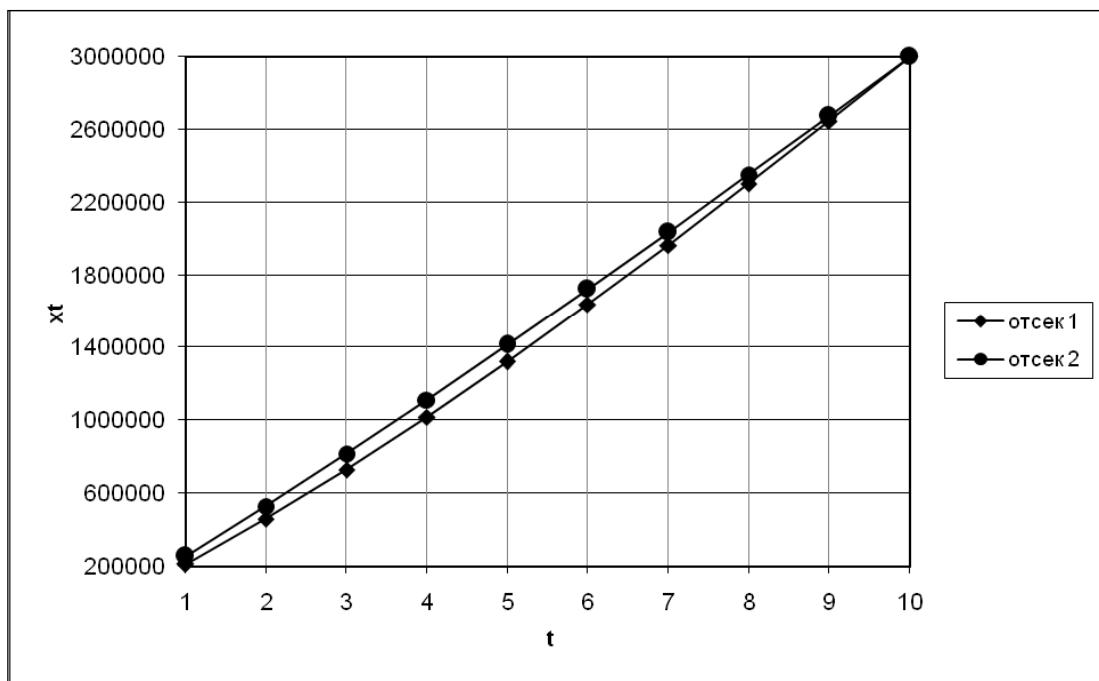


Рис. 4. Динамика изменения суммарного объёма производства

Из анализа рисунков можно сделать следующие выводы:

1. Оптимальной стратегией являются небольшие объёмы производства в начальные периоды, а затем с уменьшением трудоемкости увеличение объёмов производства в последних временных интервалах.

2. Разница между начальным и конечным объёмами производства будет тем большей, чем больше скорость освоения трудоемкости  $\gamma$ .

3. Чем больше скорость освоения  $\gamma$ , тем больше будет крутизна траектории суммарного объёма производства, т.е. тем

быстрее будет происходить увеличение объёмов производства.

**Заключение.** В настоящей работе представлена экономико-математическая модель принятия оптимального решения по определению объёмов производства в период освоения новой продукции. Проблема формулируется как задача оптимального управления дискретной системой.

С использованием дискретного принципа максимума Понтрягина найдено оптимальное решение задачи в аналитическом виде. Оптимальный объём производства во временном интервале  $t$  определяется отношением обратной величины коэффициента освоения трудоёмкости в этом временном интервале к сумме обратных величин коэффициентов освоения трудоёмкости за весь период освоения. Опти-

мальной стратегией является постепенное увеличение объёмов производства в более поздние временные интервалы по мере снижения трудоёмкости продукции.

Приводится исследование влияния параметров периода освоения на оптимальное распределение объёмов производства по временным интервалам для конкретного вида функции трудоёмкости  $\tau_t = \tau_n t^{-\gamma}$ .

Полученные формулы применяются для расчета оптимального распределения объёма производства по временным интервалам и суммарных объёмов производства на примере освоения двух видов изделий на предприятии ОАО «Салют». В результате проведения исследования на практических примерах сделаны выводы.

#### Библиографический список

1. Пиндайк, Р. Микроэкономика / Р. Пиндайк, Д. Рубинфельд. – М.: Дело, 2001.
2. Организация производства и управление предприятием/ под ред. О. Г. Туровца. – М.: Инфра-М, 2004.

3. Новицкий, Н.И. Организация производства на предприятиях / Н.И. Новицкий. – М.: Финансы и статистика, 2001.
4. Болтянский, В.Г. Оптимальное управление дискретными системами / В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1973.

## SOLVING THE DYNAMIC PROBLEM OF PRODUCTION PLANNING DURING THE START-UP PERIOD SOLUTION

© 2011 O.V. Pavlov<sup>1</sup>, T.N. Riasnaia<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov  
(national research university)

<sup>2</sup>Samara space center «TsSKB-Progress»

The study deals with the dynamic problem of production planning during the start-up period and its solution. The problem is defined as the problem of optimal management of a discrete system. An analytical decision is found using the discrete Pontriagin's maximum principle. The research of startup period parameters influence on the optimal distribution of the volume of output is presented.

*Start up, labour coefficient, optimal volumes of output, discrete Pontriagin's maximum principle, analytical decision*

**Информация об авторах:**

1. Павлов Олег Валерьевич, кандидат технических наук, декан факультета экономики и управления СГАУ, [pavlov@ssau.ru](mailto:pavlov@ssau.ru); область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

2. Рясная Татьяна Николаевна, инженер отдела внешнеэкономических контрактов и экспортного контроля ФГУП «ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс», ассистент кафедры общинженерной подготовки СГАУ, [riasnaiatiana@yandex.ru](mailto:riasnaiatiana@yandex.ru); область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

**Information about authors:**

1. Pavlov Oleg Valerievich, candidate of science, dean of the faculty of economics and management, SSAU, [pavlov@ssau.ru](mailto:pavlov@ssau.ru); area of research: social and economic systems management.

2. Riasnaia Tatiana Nikolaevna, Samara space center «TsSKB-Progress» foreign contract and export control office engineer, assistant of the engineering department, SSAU, [riasnaiatiana@yandex.ru](mailto:riasnaiatiana@yandex.ru); area of research: social and economic systems management.