УДК 519.62:539.976

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КРИВОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА СОДЕРБЕРГА

© 2015 Р. Ю. Макаров

Самарский государственный технический университет

В статье рассматривается разработка численного метода для определения параметров модели ползучести. Предложена линейно-параметрическая дискретная модель, описывающая в форме разностного уравнения связь между последовательными значениями деформации ползучести. Получены формулы, описывающие связь между коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели и параметрами модели ползучести. Описана итерационная процедура среднеквадратического оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Показана методика оценки погрешности вычисления параметров модели ползучести, проведены численно-аналитические исследования достоверности и корректности описанной методики. Выполнена экспериментальная проверка полученных результатов с хорошей согласованностью теоретических и экспериментальных данных. Разработанный численный метод определения параметров кривой ползучести может быть применён в пределах стадии неустановившейся и установившейся ползучести.

Модель ползучести, линейно-параметрическая дискретная модель, итерационная процедура, разностные уравнения, обобщённая регрессионная модель, численный метод, среднеквадратичное оценивание, оценка погрешности.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-2-113-118

Введение. В последние пятнадцать лет происходит интенсивное развитие численных методов анализа напряжённо-деформированного состояния твёрдых тел в условиях ползучести [1]. Однако нелинейность определяющих уравнений ползучести и длительной прочности является сдерживающим фактором [2], который не позволяет в должной мере развивать аналитические и численные методы решения. Большинство существующих методик определения параметров кривой ползучести обладают рядом недостатков, а именно: или не учитывается влияние случайной помехи, объективно существующей в результатах наблюдений, или требуется несколько экспериментальных кривых ползучести, или громоздки для применения [3]. Поэтому существует потребность в разработке численного метода определения параметров кривой ползучести, лишённого указанных недостатков.

Определяющее уравнение. В соответствии с моделью ползучести, предложенной Содербергом [4], в одноосном случае уравнение кривой ползучести для первых двух стадий имеет вид:

$$\hat{y}(t) = a[1 - e^{-\alpha t}] + Bt \;, \qquad (1)$$

где $\hat{y}$ − деформация ползучести; t − время; a, α, B − параметры материала, подлежащие определению. Идентификация параметров модели (1) происходит на основе минимизации квадратов отклонений $\sum_{k=0}^{N-1}(y_k - \hat{y}_k)^2 \to \min$. Эта задача относится к классу задач нелинейной регрессии, методы решения которой описаны в [1] и сопряжены со сложностью решения возникающей при этом системы нелинейных уравнений.

Построение линейно-параметрической дискретной модели. Чтобы избежать указанных трудностей, предлагается построить линейно-параметрическую дискретную модель (ЛПДМ), описывающую в виде рекуррентной формулы последовательные значения деформации ползучести, описываемые моделью (1).

Для построения ЛПДМ рассмотрим значения зависимости $\hat{y}(t)$ в дискретные моменты времени с периодом дискретизации τ и, в соответствии с (1), получим:

$$\hat{y}_k = a[1 - e^{-\alpha\tau k}] + B\tau k, \overline{k = 0, N-1}, \qquad (2)$$

где N − объём выборки данных.

Далее, подставляя в (2) вместо k значение $k-1$, получим $\hat{y}_{k-1} = a[1 - e^{-\alpha\tau k} e^{\alpha\tau}] + B\tau(k-1)$ или $\hat{y}_{k-1} = a - ae^{-\alpha\tau k} e^{\alpha\tau} + B\tau(k-1)$. Легко заметить, что справедливо соотношение $-ae^{-\alpha\tau k} = [\hat{y}_{k-1} - a - B\tau(k-1)]e^{-\alpha\tau}$, подставляя которое в (2), получим $\hat{y}_k = a + [\hat{y}_{k-1} - a - B\tau(k-1)]e^{-\alpha\tau} + B\tau k$.

Далее, раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим $\hat{y}_k = \hat{y}_{k-1} e^{-\alpha\tau} + (B\tau - B\tau e^{-\alpha\tau})k + a - ae^{-\alpha\tau} + B\tau e^{-\alpha\tau}$.

Таким образом, получаем ЛПДМ, связывающую последовательные значения деформации ползучести, описываемой моделью (1) вида

$$\begin{cases} \hat{y}_0 = 0, \\ \hat{y}_k = \hat{y}_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, \overline{k = 1, N-1}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = B\tau - B\tau e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_3 = a - ae^{-\alpha\tau} + B\tau e^{-\alpha\tau}$.

При определении параметров в модели (3) необходимо учитывать, что экспериментальное значение y_k содержит в себе случайную помеху ε_k, то есть $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$. С учётом данного соотношения модель (3) примет вид

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_k = y_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3 - \lambda_1\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \overline{k = 1, N-1} \end{cases}$$

или в виде обобщённой регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели; $\varepsilon = (\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{N-1})^T$ – N-мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_{N-1})^T$ – N-мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в стохастическом разностном уравнении; $b = (y_0, y_1, ..., y_{N-1})^T$ – N-мерный вектор правой части; $F = [f_1 \vdots f_2 \vdots f_3]$ – матрица регрессоров размера $N \times 3$, столбцы которой имеют вид: $f_1 = (0, y_0, y_1, ..., y_{N-2})^T$, $f_2 = (0, 1, 2, ..., N-1)^T$, $f_3 = (0, 1, 1, 1.., 1)^T$.

Строки матрицы P эквивалентного возмущения (размера $N \times N$) в стохастическом разностном уравнении имеют вид: $p_0 = (1, 0, 0, 0, .., 0)$, $p_1 = (-\lambda_1, 1, 0, 0, 0, .., 0)$, $p_2 = (0, -\lambda_1, 1, 0, 0, 0, .., 0)$, …, $p_{N-1} = (0, 0, ...0, -\lambda_1, 1)$.

Итерационная процедура оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели. В основе оценивания коэффициентов λ_j обобщённой регрессионной модели (4) лежит минимизация функционала [6]

$$\|\varepsilon\|^2 = \left\| P_\lambda^{-1} b - P_\lambda^{-1} F \hat{\lambda} \right\|^2 \Rightarrow \min. \qquad (5)$$

Очевидно, что вычисленные таким образом оценки обеспечивают также минимальное отклонение $\|y - \hat{y}\|$ смоделированной функции, описывающей мгновенные значения $\hat{y}_k$, от экспериментальных данных y_k. Минимизация функционала (5) приводит к решению нормальной системы уравнений, линейных относительно переменных λ_j. Для этого может быть применён численный итерационный метод. На первом шаге алгоритма этого метода вычисляется начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)}$-вектор МНК-оценок регрессионных коэффициентов из минимизации функционала $\|\eta\|^2 = \|b - F\hat{\lambda}\|^2 \Rightarrow \min$:

$\hat{\lambda}^{(0)} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T b$.

Затем на основе этих оценок формируется матрица $P_{\lambda^{(0)}} = P(\lambda^{(0)})$ и вычисляется обратная матрица $P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}}$. Подставив эту матрицу в (4), получим линейную регрессионную модель вида: $P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} = P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\lambda + \varepsilon^{(1)}$, где $\varepsilon^{(1)} = P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}}\eta$. При этом функционал (5) принимает вид: $\left\|\varepsilon^{(1)}\right\|^2 = \left\|P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b - P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\hat{\lambda}\right\|^2 \Rightarrow \min$. Очевидно, что этот функционал является линейным относительно параметров λ_j. Его минимизация приводит к нормальной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой имеет вид:

$\hat{\lambda}^{(1)} = \left[F^T (P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}})^T P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\right]^{-1} F^T (P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}})^T P^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b$.

Вводя матрицу $\Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}} = P_{\hat{\lambda}^{(0)}} P^T_{\hat{\lambda}^{(0)}}$, получаем соотношение для вычисления уточнённого приближения: $\hat{\lambda}^{(1)} = \left[F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} F\right]^{-1} F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(0)}} b$. Это новое приближение вектора среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения используется для вычисления матрицы $P_{\lambda^{(1)}} = P(\hat{\lambda}^{(1)})$ и т.д.

Таким образом, в основе алгоритма численного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели лежат рекуррентные формулы [6]:

$\hat{\lambda}^{(k)} = \left[F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} F\right]^{-1} F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} b$,

$\Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}} = P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P^T_{\hat{\lambda}^{(k)}}$,

$P_{\lambda^{(k)}} = P(\hat{\lambda}^{(k)}), k = 1, 2, 3\ldots$.

Полученные среднеквадратические оценки $\hat{\lambda}_j$ коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели (1) используются при вычислении помехоустойчивых оценок параметров кривой ползучести a, α, B:

$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\tau}\ln(\hat{\lambda}_1)$,

$$\hat{B} = \frac{\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)\tau},\ \hat{a} = \frac{\hat{\lambda}_3}{1-\hat{\lambda}_1} - \frac{\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^2}. \qquad (6)$$

Таким образом, получены формулы, связывающие среднеквадратические оценки $\hat{\lambda}_j$ с параметрами кривой ползучести.

Оценка погрешности. Для оценки погрешности результатов вычисления параметров модели (1) на основе (6) можно воспользоваться методикой, описанной в [6]. Вначале находится остаточная дисперсия

$$s^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (y_k - \hat{y}_k)^2}{N-n},$$

где y_k – данные эксперимента; $\hat{y}_k = \hat{a}[1 - e^{\hat{\alpha}\tau k}] + \hat{B}\tau k$ – результаты вычислений на основе модели ползучести; $n = 3$ – число коэффициентов в обобщённой регрессионной модели. Далее вычисляется матрица дисперсий-ковариаций $V[\hat{\lambda}] = (F_{\hat{\lambda}}\Omega^{-1}_{\hat{\lambda}} F_{\hat{\lambda}})^{-1} s^2$.

Оценка дисперсии $s^2[\hat{B}]$ результата вычислений параметра $\hat{B} = \left\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3\right\}$ модели ползучести находится по формуле [6]

$$s^2[\hat{B}] \approx \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\hat{B}}{\partial\hat{\lambda}_i}\right)^2 s^2[\hat{\lambda}_i] + $$
$$+2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\hat{\lambda}_i}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\hat{\lambda}_j} cov[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j].$$

При построении доверительных границ случайной погрешности результата вычислений параметра $\hat{B} = \left\{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3\right\}$ можно воспользоваться формулой [2]: $\Delta B = t_\beta s[\hat{B}]$. В первом приближении можно считать, что статистика t_β имеет распределение Стьюдента с $\nu = N - n$ степеными свободы. В этом случае при доверительной вероятности $\beta = 0,95$ и числах степеней свободы $\nu \geq 25$ достаточно принять $t_{\beta} = 2,1$. Найденная величина ΔB может рассматриваться в качестве предельной абсолютной погрешности (с заданной вероятностью) результата вычисления рассматриваемого параметра: $B = \hat{B} \pm \Delta B$. Предельные относительные погрешности результата вычислений параметра $\hat{B} = \left\{ \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3 \right\}$ находятся по формуле $\delta_B = \dfrac{\Delta B}{|B|}$.

Для проверки корректности описанной методики проводились численно-аналитические исследования результатов вычисления параметров модели ползучести (1).

На рис. 1−3 представлены зависимости оценок погрешности вычисления параметров a, α, B от величины случайной помехи, построенные по описанной методике. В каждой точке численного эксперимента, соответствующей заданному значению мощности случайного возмущения $\varepsilon_i = i \cdot 0.4\%, i = 1, 2, .., 5$, на основе тестовых выборок было вычислено сто оценок параметров модели ползучести a, α, B, их относительные погрешности, а также оценки предельных относительных погрешностей $\Delta_a, \Delta_\alpha, \Delta_B$. Линии описывают зависимости минимальной из оценок предельной относительной погрешности вычисленных параметров модели ползучести на основе описанной методики. Точки на рисунках соответствуют результатам вычислений параметров модели ползучести, полученным при компьютерном моделировании процесса ползучести.

Из рис. 1−3 следует, что все точки, соответствующие относительным погрешностям вычисления параметров, укладываются в границы, описываемые минимальными значениями предельной относительной погрешности.

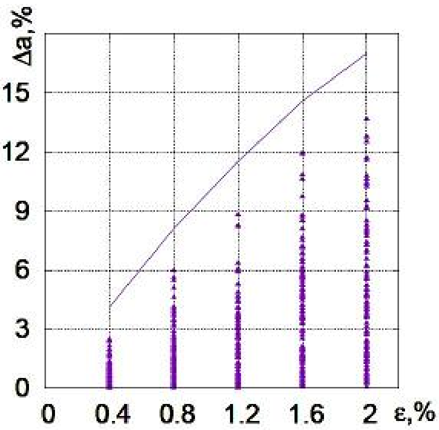

Рис. 1. Зависимости оценок предельной относительной погрешности и экспериментально найденных относительных погрешностей вычисления параметра a

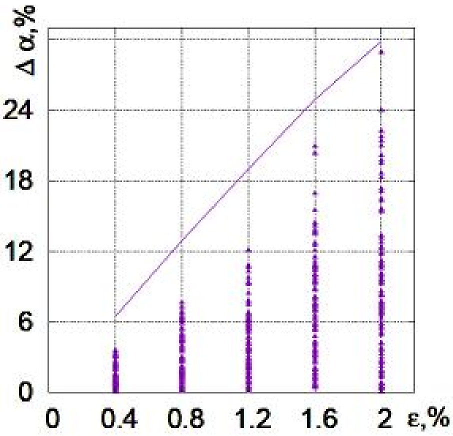

Рис. 2. Зависимости оценок предельной относительной погрешности и экспериментально найденных относительных погрешностей вычисления параметра α

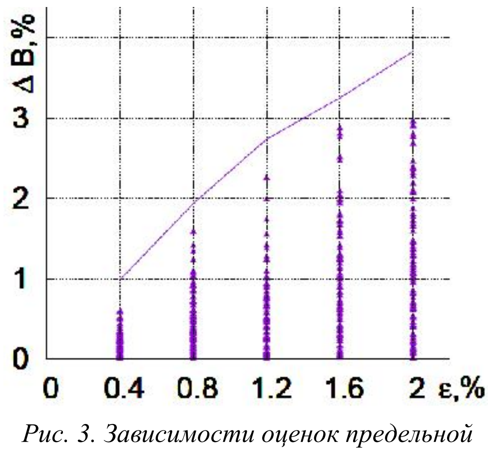

Рис. 3. Зависимости оценок предельной относительной погрешности и экспериментально найденных относительных погрешностей вычисления параметра B

Заключение. Разработан численный метод определения параметров модели ползучести, представленной в виде закона Содерберга, в основе которого лежат разностное уравнение, описывающее результаты наблюдений, и среднеквадратичное оценивание коэффициентов обобщённой регрессионной модели. Данный метод может быть применён к решению задачи определения параметров кривой ползучести в пределах первых двух стадий ползучести.

Библиографический список

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 387 с.
2. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
3. Faridani M.N. Classification and probabilistic model development for creep failures of structures: study of x-70 carbon steel and 7075-T6 aluminum alloys. 2012. Faculty of the Graduate School of the University of Maryland.
4. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.
5. Клебанов Я.М., Адеянов И.Е., Ладягина Е.И. Численный анализ ползучести конструкций при сложном нагружении // Вестник Самарского государственного технического ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 42. С. 75-81. doi: 10.14498/vsgtu414
6. Тында А.Н., Романов А.Е. Численное решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с дробно-экспоненциальными ядрами реологических моделей вязкоупругой среды // Известия Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 5, № 2. С. 69-80.

Информация об авторе

Макаров Роман Юрьевич, аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет. E-mail: makaroman1@yandex.ru. Область научных интересов: математические модели процессов ползучести, разработка и исследование численных методов параметрической идентификации на основе разностных уравнений.

NUMERICAL METHOD FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF A CREEP CURVE ON THE BASIS OF SODERBERG LAW

Samara State Technical University, Samara, Russian Federation

The article discusses the development of a new numerical method for determining the parameters of a creep model. A discrete linear parametric model describing the relationship between successive values of creep strain in the form of a difference equation is proposed. Formulas for describing the relationship between the coefficients of the linear parametric discrete model and the creep model parameters have been obtained. An iterative procedure of mean-square estimation of coefficients of the linear parametric discrete model is described. A technique of estimating the error of calculating the model parameters of creep is shown, numerical and analytical studies of reliability and correctness of the described procedure have been carried out. Experimental verification of the results with good agreement between theoretical and experimental data is presented. The developed numerical method of determining the creep curve parameters can be applied at the stages of stationary and non-stationary creep.

Creep model, linear parametric discrete model, iterative procedure, difference equations, generalized regression model, numerical method, mean-square estimation, error estimation.

References

1. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroenie Publ, 1975. 387 p.

2. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressiya* [Linear and nonlinear regression]. Moscow: Finansy i statistika Publ, 1981. 302 p.

3. Faridani M.N. Classification and probabilistic model development for creep failures of structures: study of x-70 carbon steel and 7075-T6 aluminum alloys. 2012. Faculty of the Graduate School of the University of Maryland.

4. Zoteev V.E. *Parametricheskaya identifikatsiya dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravneniy* [Parametric identification of dissipative mechanical systems based on differential equations]. Moscow: Mashinostroenie Publ, 2009. 344 p.

5. Klebanov Ya.M., Adeyanov I.E., Ladyagina E.I. Numerical creep analysis of structures under complex loading. *Vestnik SamGTU. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2006. No. 42. P. 75-81. (In Russ.)

6. Tynda A.N., Romanov A.E. Numerical solution of nonlinear Volterra integral equations with fractionally-exponential kernels of rheological models of viscoelastic continuum. *Izv. Irkutskogo gos. un-ta. Ser. Matematika*. 2012. V. 5, no. 2. P. 69-80. (In Russ.)

About the author

Makarov Roman Yur'evich, postgraduate student of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Samara State Technical University, Samara, Russian Federation. E-mail: makaroman1@yandex.ru. Area of Research: mathematical models of creep processes, research and development of numerical methods for parametric identification on the basis of difference equations.