

УДК 517.95

РАСЧЁТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНЕ С КРУГЛЫМ ВЫРЕЗОМ

© 2015 Е. Ю. Иванов

Самарский государственный университет путей сообщения

На основе разработанного ранее принципа соответствия расчёт деформированного состояния конструкций из анизотропных вязкоупругих материалов в условиях воздействия температур сведён к расчёту деформированного состояния конструкций из упругих материалов. На основе данного принципа создан метод расчёта деформированного состояния неоднородных анизотропных конструкций произвольной формы в случае их статического нагружения при воздействии температур. Рассчитываются перемещения в стальной пластине квадратной формы с круглым вырезом, возникающие под действием внешней переменной нагрузки и переменного температурного поля. Выбранная в качестве модели задача линейной несвязной термовязкоупругости позволяет получить точное аналитическое решение, удобное для анализа состояния изделия при различных режимах эксплуатации.

Перемещения, напряжения, задача несвязной термовязкоупругости, метод опорных функций.

doi: 10.18287/2412-7329-2015-14-2-88-92

Разнообразие методов решения начально–краевых задач обусловлено тем, что каждый из них существенным образом опирается на форму деформируемого тела, свойства его материала и позволяет решить начально–краевую задачу только для достаточно узкого класса деформируемых тел. Сложность задачи значительно возрастает при необходимости учёта температурных напряжений.

В данной работе используется принцип соответствия [1], позволяющий расчёт деформированного состояния анизотропных термовязкоупругих конструкций сводить к расчёту деформированного состояния термоупругих изделий. На базе данного принципа соответствия построен метод, дающий возможность получить

решение начально–краевой задачи в виде оператора, воздействующего на начальные и краевые условия краевой задачи для тел произвольной формы.

В данной работе рассматривается решение инженерной задачи о напряжённо–деформированном состоянии ортотропной термовязкоупругой пластины. В качестве объекта исследования рассматривается стальная пластина квадратной формы с круглым вырезом. Квадрат имеет стороны 600 мм, вырез с радиусом 150 мм, оси координат проходят через центр квадрата и круглого выреза.

Напряжённо–деформированное состояние пластины описывается несвязной линейной статической задачей термовязкоупругости:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + F_i(\mathbf{x}) + \gamma \Theta_i(\mathbf{x}, t) &= 0; \\
 \left(\Delta - \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\chi} Q(\mathbf{x}, t); \\
 \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} R_{ij\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{m=1}^n [\varepsilon_{i_m j_m}(\mathbf{x}, \tau_m) - \alpha_{i_m j_m}(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}, \tau_m)] d\tau_m; \\
 \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} [u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)]; \\
 \Theta(\mathbf{x}, t) &= \Theta_s(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_{\Theta}; u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^0(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in S_u; \\
 \Theta(\mathbf{x}, t = 0) &= \Theta^0(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t), \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t)$ и $R_{ij\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)$ – компоненты тензоров напряжений, деформаций и ядер релаксации; $ij\alpha\beta = i_1j_1i_2j_2\dots i_nj_n$; t – текущее время, в данной задаче время изменяется от 0 до 40; $F_i(\mathbf{x})$ – составляющие массовой силы; $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\alpha$, где μ, λ – постоянные Ламе; α – коэффициент линейного теплового расширения; $\Theta(\mathbf{x}, t)$ – разность между температурой тела, ограниченного поверхностью S , в рассматриваемый момент времени и температурой исходного состояния T_0 ; Δ – оператор Лапласа; χ – коэффициент температуропроводности; $Q(\mathbf{x}, t)$ – внешний источник тепла; $a_{ij}(\mathbf{x})$ – тензор теплового расширения; $u_i(\mathbf{x}, t)$ – компоненты вектора пере-

мещений; $u_i^0(\mathbf{x}, t)$ – граничное значение вектора перемещений; S_u – часть поверхности с заданными перемещениями; $\Theta_s(\mathbf{x}, t)$ – заданная разность температур на поверхности S ; $\Theta^0(\mathbf{x})$ – разность между температурой тела в момент времени $t = 0$ и температурой исходного состояния T_0 .

Индексы i и j после запятой означают дифференцирование по соответствующим координатам x_i или x_j .

Воспользовавшись принципом соответствия, изложенным в работе [1], сведём интегральными преобразованиями краевую задачу (1) к краевой задаче нелинейной фиктивной термоупругости в прообразах:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + F_i^*(\mathbf{x}, p) + \gamma \frac{\partial \Theta^*(\mathbf{x}, p)}{\partial x_i} &= 0; \\ \left(\Delta - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Theta^*(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{g} Q^*(\mathbf{x}, p); \\ \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) &= R_{ij\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, p) [\varepsilon_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, p) - a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \Theta^*(\mathbf{x}, p)]; \\ \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{2} [u_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}, p)]; \\ \Theta^*(\mathbf{x}, p) &= \Theta_s^*(\mathbf{x}, p), \quad \mathbf{x} \in S_\Theta; \quad u_i^*(\mathbf{x}, p) = u_i^{0*}(\mathbf{x}, p), \quad \mathbf{x} \in S_u; \quad \Theta^*(\mathbf{x}, t = 0) = \Theta^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2)$$

Для этого наложим на ядра релаксации дополнительное условие, и будем считать, что они представляются в виде:

$$R_{ij\alpha\beta}(\mathbf{x}, t, \tau) = \int_{\omega_p} R_{ij\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, p) Y_L(p, t) Y_L^+(p, \tau) dp. \quad (3)$$

В выражениях (2) и (3) $Y_L(p, t)$ и $Y_L^+(p, t)$ – ядра прямых и обратных интегральных преобразований, индекс L в обозначениях ядер позволяет отличить одно интегральное преобразование от другого, (*) обозначает интегральный образ функции:

$$u_i^*(\mathbf{x}, p) = \int_{\omega_p} u_i(\mathbf{x}, t) Y_L^+(p, t) dt. \quad (4)$$

Принимая, что $Y_L^+(p, t) = \delta(p, t)$, где $\delta(p, t)$ – дельта функция Дирака, из (4) будем иметь:

$$u_i^*(\mathbf{x}, p) = u_i(\mathbf{x}, t).$$

Таким образом, решения – перемещения исходной задачи термоупругости (1) и задачи фиктивной термоупругости (2) совпадают, поэтому разность между решениями этих задач будет состоять только в напряжениях.

Решение задачи (2) разделяется на две части:

1. Решение начально–краевой задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial p} \right) \Theta^*(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{g} Q^*(\mathbf{x}, p); \\ \Theta^*(\mathbf{x}, p) &= \Theta_s^*(\mathbf{x}, p), \quad \mathbf{x} \in S_\Theta; \\ \Theta^*(\mathbf{x}, p = 0) &= \Theta^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5)$$

2. Решение задачи фиктивной термоупругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^*(\mathbf{x}, p) + F_i^*(\mathbf{x}, p) + \gamma \frac{\partial \Theta^*(\mathbf{x}, p)}{\partial x_i} &= 0; \\ \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) &= R_{ij\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, p) [\varepsilon_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}, p) - a_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \Theta^*(\mathbf{x}, p)]; \\ \varepsilon_{ij}^*(\mathbf{x}, p) &= \frac{1}{2} [u_{i,j}^*(\mathbf{x}, p) + u_{j,i}^*(\mathbf{x}, p)]; \\ u_i^*(\mathbf{x}, p) &= u_i^{0*}(\mathbf{x}, p), \quad \mathbf{x} \in S_u. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения начально–краевой задачи (5) и задачи (6) применялся метод опорных функций, изложенный в работе [2]. Расчёт проводился для ортотропной пластины, тензор ядер релаксации которой имеет четыре компоненты [3]: $\Gamma_{1111} = \lambda_1, \Gamma_{2222} = \lambda_2, \Gamma_{1122} = \lambda_4, \Gamma_{1212} = \lambda_5$.

В данной работе принято: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1.2 \cdot 10^4 \text{ кг/мм}^2, \lambda_4 = 9.1 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2, \lambda_5 = 6.1 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$.

В качестве контрольного решения уравнения теплопроводности была выбрана функция:

$$\Theta(x, t) = -\frac{5.25}{\gamma} 10^{-3} x y \sin(t).$$

Для данного уравнения были определены начально–граничные условия для задачи Дирихле, на основании которых получена функция Грина и, соответственно, искомое уравнение теплопроводности. Диапазон изменения времени 0–40.

Расчёт проведён средствами пакета Mathcad 15. Вместо преобразования Фурье использовано дискретное быстрое преобразование Фурье с количеством элементов интерполирующего тригонометрического многочлена, равном 21.

На рис.1 приведены графики температурных полей, соответствующих контрольному Θ_k и искомому Θ_u решениям уравнения теплопроводности для момента

времени $t=30$. Из анализа рис.1 видно, что графики полученных и контрольных решений совпадают.

На рис. 2 приведены графики полученного Θ_u и контрольного Θ_k решений изменения температуры по времени t для пластины в точке $(x=-210 \text{ мм}, y=-210 \text{ мм})$. Из анализа рис.2 видно, что графики полученных и контрольных решений совпадают.

Для перемещений в качестве контрольных были выбраны следующие функции:

$$u_x(x, y) = (3xy^2 + 2x^3)10^{-8} + \frac{5y^3}{3} \sin(t)10^{-7},$$

$$u_y(x, y) = (7x^2y - 2y^3)10^{-8} + \frac{5x^3}{3} \sin(t)10^{-7}.$$

На рис. 3, 4 представлены графики полученного и контрольного решений–перемещений $u_{x_u}(x, y), u_{y_u}(x, y)$ и $u_{x_k}(x, y), u_{y_k}(x, y)$ соответственно для времени $t = 30$.

Графики на рис. 3, 4 показывают, что перемещения полученного и контрольного решений совпадают.

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что разработанный метод аналитического решения статических задач теории термовязкоупругости для тел произвольной формы обеспечивает достаточную точность решения инженерных задач.

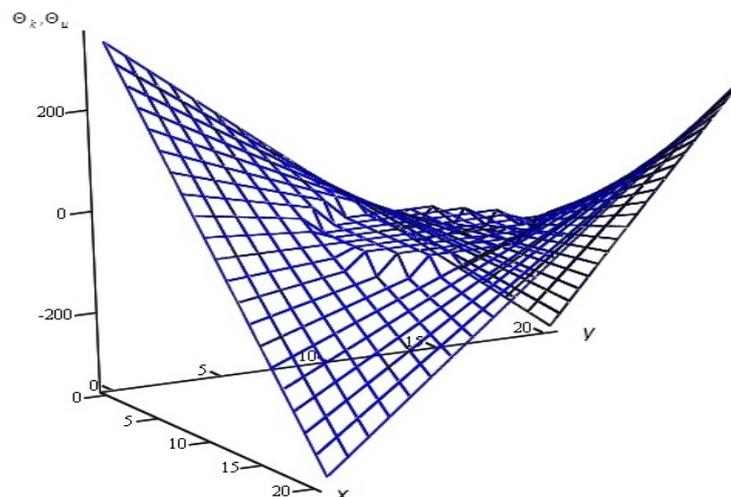


Рис.1. Графики контрольного Θ_k и полученного Θ_u решений

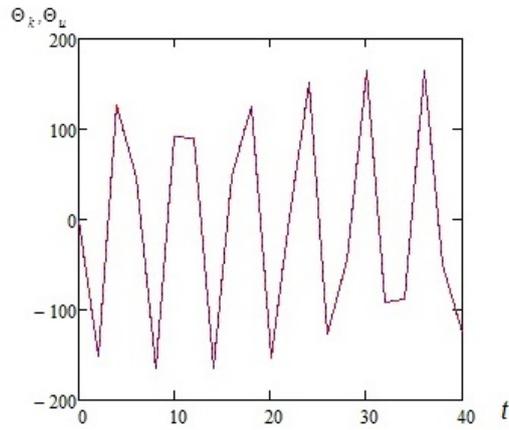


Рис.2. Графики изменения температуры по времени контрольного Θ_k и полученного Θ_u решений

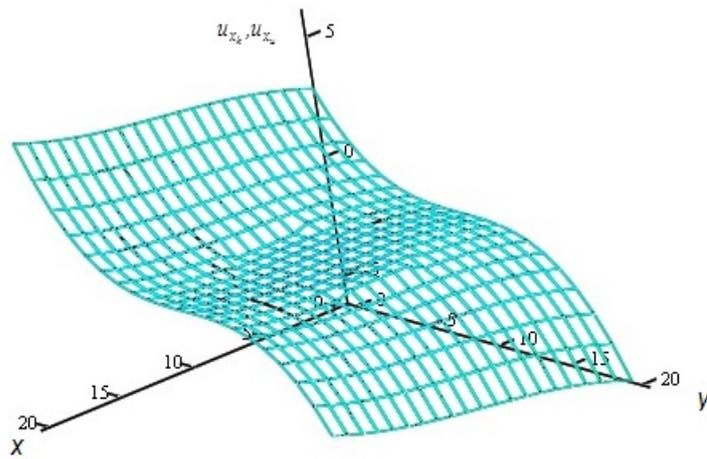


Рис.3. Графики перемещений контрольного u_{x_k} и полученного u_{x_u} решений

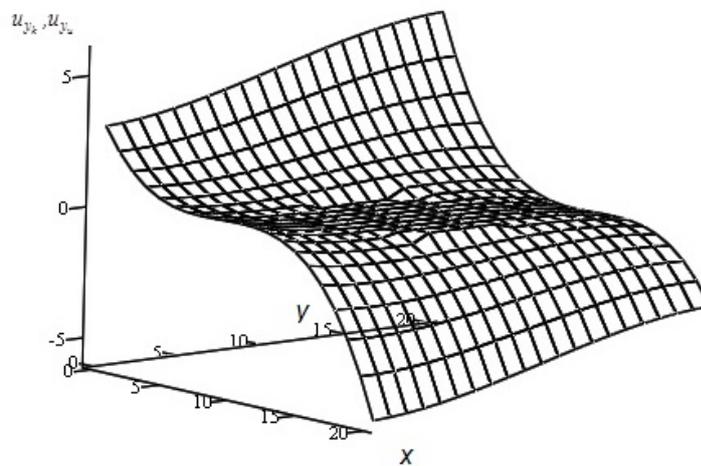


Рис.4. Графики перемещений контрольного u_{y_k} и полученного u_{y_u} решений

Библиографический список

1. Ермоленко Г.Ю., Иванов Е.Ю. Принципы соответствия между краевыми статическими задачами термовязкоупругости и термоупругости // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, № 6. С. 853–857.
2. Горлач Б.А., Ермоленко Г.Ю. Метод опорных функций для решения задач математики и механики // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2004. № 26. С. 122–126. doi.org/10.14498/vsgtu188
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

Информация об авторе

Иванов Евгений Юрьевич, аспирант, Самарский государственный университет путей сообщения. E-mail: planeta@samaramail.ru. Область научных интересов: аналитические методы решения краевых задач механики деформируемых твёрдых тел.

CALCULATION OF DISPLACEMENTS IN A VISCOELASTIC SQUARE PLATE WITH A ROUND CUT

© 2015 E. Yu. Ivanov

Samara State Transport University, Samara, Russian Federation

Calculation of the strained state of structures made of anisotropic viscoelastic materials under the influence of temperatures is reduced to the calculation of the strained state of structures made of elastic materials on the basis of the conformity principle developed earlier. A method of calculating the strained state of non-uniform anisotropic structures of an arbitrary shape in the case of their static loading under the influence of temperatures has been developed on the basis of this principle. Displacements caused by the influence of external variable pressure and variable temperature field inside a steel square plate with a round cut are calculated. The problem of linear incoherent thermoviscoelasticity selected as a model provides a strict analytical solution, convenient for the analysis of steel parts in different operation modes.

Displacement, stress, problem of linear incoherent thermoviscoelasticity, method of supporting functions.

References

1. Ermolenko G.Yu., Ivanov E.Yu. The principles of correlation between statical boundary value problems of thermoviscoelasticity and thermoelasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. V. 78, Iss. 6. P. 613-616. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2015.04.008
2. Gorlach B.A., Ermolenko G.Yu. Method of basic functions for the solution problems of mathematics and mechanics. *Vestnik SamGTU. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. No 26. 2004. P. 122-126. (In Russ)
3. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of the mathematical theory of thermoviscoelasticity]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 280 p.

About the author

Ivanov Evgenij Yur'evich, postgraduate student, Samara State Transport University, Samara, Russian Federation. E-mail: planeta@samaramail.ru. Area of Research: analytical methods of solving boundary value problems of deformable body mechanics.