

УДК 621.431.75

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ В КООРДИНАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ПРОФИЛЕЙ ЛОПАТОК КОМПРЕССОРА И ТУРБИНЫ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

©2014 М.А. Болотов, В.А. Печенин, Н.В. Рузанов

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.Королёва
(национальный исследовательский университет)

В статье предлагается метод повышения точности работы итеративного алгоритма ближайших точек, используемого в задачах метрологии при определении отклонения расположения. Объектом применения метода определения отклонения являлись профили лопаток компрессора газотурбинного двигателя (ГТД). Задачу наилучшего совмещения в разрабатываемом методе предлагается формулировать как многокритериальную задачу, включающую критерии минимума квадратов расстояний, разностей векторов нормалей и разностей значений величин кривизны в соответствующих точках совмещаемых профилей. Рассмотрены варианты сведения задачи к использованию одного интегрального критерия, включающего вышеназванные. Оптимизационные задачи решались квазиньютоновскими методами последовательного квадратичного программирования. Предложенный новый метод улучшения алгоритма припасовки на основании геометрических особенностей показал большую точность в сравнении с рассмотренными методами оптимизации по расстоянию между точками припасовки, особенно в случаях использования малого количества измеряемых точек на профилях.

ICP-алгоритм, совмещение профилей, метод наименьших квадратов, NURBS, нелинейная оптимизация, кривизна профиля.

На сегодняшний день аэрокосмическая и автомобилестроительная промышленность выпускает изделия, имеющие сложную форму поверхности и имеющие жёсткие требования к точности изготовления. Требования к форме таких деталей диктуются многочисленными функциональными требованиями, а также эстетическими соображениями. Примерами деталей со сложной формой поверхности являются: аэродинамические поверхности в аэрокосмической области (лопатки турбины и компрессора), кузовные детали в автомобилестроении, штампы, пресс-формы.

При контроле изготовления таких деталей возникают проблемы адекватности оценки формы таких деталей. Сравнение при измерении производится с CAD-моделью детали. Главным инструментом моделирования сложных поверхностей в CAD-системе является NURBS (неоднородный рациональный B-сплайн). В результате координатных измерений в систему измерительных машин загружается облако точек, которое сравнивается с характерными точками на CAD-модели. Причём оценку формы измеренной детали можно производить только после оценки

отклонения расположения (совмещение системы координат измеренной детали с CAD моделью).

В большинстве программных продуктов наилучшее совмещение для деталей, имеющих сложную форму поверхности, в программном обеспечении для КИМ осуществляется с использованием итеративного алгоритма ближайших точек (ICP, iterative closest point algorithm), основанного на методе наименьших квадратов [1].

В практике изготовления лопаток компрессора газотурбинных двигателей геометрия пера лопатки имеет решающее значение для характеристик работы двигателя. Чтобы точно оценить геометрические параметры, характеризующие форму лопаток, необходимо точное совмещение измеренной детали с её CAD-моделью.

В наиболее общей формулировке алгоритм является итерационным алгоритмом, решающим задачу оптимального вращения и перемещения для выравнивания облака точек к номинальным точкам на CAD-модели. Задача состоит в поиске минимума функции:

$$f(R, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \|R \cdot p_i + t - q_i\|^2, \quad (1)$$

где n – количество точек припасовки (измеренных точек);

P_i – координаты i -й измеренной точки;

R – матрица вращения точки;

t – вектор перемещения;

q_i – координаты точки на CAD-модели.

Суть наилучшего совмещения – найти t и R оценённого профиля относительно номинального и преобразовать координаты оценённого профиля, исключив погрешность расположения. Координаты точки реального профиля, совмещённого наилучшим образом к точкам номинального профиля, находятся путём матричного произведения координат точек реального профиля матрицы преобразования:

$$P_{\text{пр}} = P \cdot M, \quad (2)$$

где M – матрица припасовки,

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где α – угол поворота профиля, t_x, t_y – элементы матрицы t .

Отклонение формы рассчитывается

как отклонение точек номинального профиля и «совмещённого наилучшим образом» оценённого профиля.

Проблема точности расчёта параметров отклонения расположения связана в первую очередь с несоответствием измеренных точек точкам на CAD-модели при наличии отклонения расположения. В настоящей работе рассматриваются алгоритмы совмещения, позволяющие преодолеть несоответствие точек, участвующих в алгоритме ИСР. Результаты вычислений базового метода ИСР, получаемые в ходе исследования, давали сходные результаты с данными припасовки аналогичных профилей в программном обеспечении PC-DMIS.

Рассмотрим метод, позволяющий преодолеть проблему несоответствия точек на номинальном профиле измеренным точкам. Математическая постановка задачи состоит в подборе положения контрольных точек на кривой номинального профиля таким образом, чтобы минимизировать целевые функции, характеризующие точность совмещения профилей.

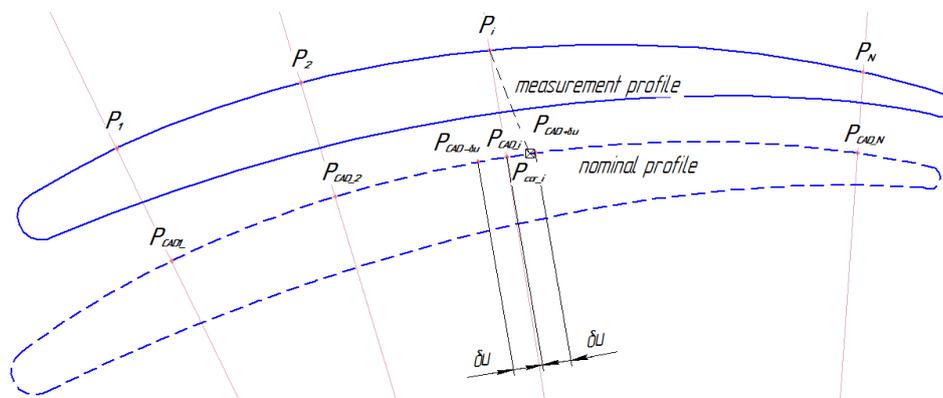


Рис. 1. Модель оптимизации в случае поиска соответствующих точек номинального и измеренного профилей

Кривые профилей (номинального и измеренного) представим с использованием NURBS сплайнов. Это стандарт представления кривых и поверхностей в CAD-системах [7]. NURBS-кривые представляют собой кусочные сплайны, которые математически можно представить в виде:

$$P(u) = \frac{\sum_{i=1}^N h_i \cdot P_i \cdot N_{i,k}(u)}{\sum_{i=1}^N h_i \cdot N_{i,k}(u)}, \quad (4)$$

где P_i – вектор (x_i, y_i, z_i) , объединяющий координаты i -й задающей точки в трёхмерном пространстве, как и для нерациональных B -сплайнов; $u [t_{k-1}, t_{n+1}]$, $N_{i,k}(u)$ – базисные функции (или сопряжения) сплайна в параметрическом направлении; t – узловые значения параметра, у которых функции $N_{i,k}(u)$ не равны нулю; k – степень кусочного сплайна в направлении параметра u ; h_i – весовые коэффициенты

точек; n – количество задающих точек сплайна.

Посредством корректировки параметров точек u_i на величины Δu_i можно рассчитать новые координаты точек на кривой. Поставленная задача поиска соответствующих точек является оптимизационной. Задача многопараметрической оптимизации состоит в поиске минимума нелинейной функции с ограничениями. В работе предлагаются три критерия в качестве целевых функций в описанной выше задаче оптимизации. Первым критерием является сумма расстояний между точками после совмещения по базовому алгоритму ИСР. В качестве второго и третьего критериев соответственно выступают суммы углов между векторами нормалей и разностей значений величин кривизны в соответствующих точках совмещаемых профилей.

Целевая функция представляет собой сумму расстояний между точками после совмещения по базовому алгоритму ИСР:

$$f(\Delta u) = \sum_{i=1}^N \|P_{ni}(u + \Delta u_i) - P_{bfi}\| \rightarrow \min, \quad (5)$$

где $P_{ni}(u + \Delta u_i)$ – координаты точек на номинальном профиле, определяемые параметром $u + \Delta u_i$;

P_{bfi} – точки на припасованном профиле по методу ИСР.

Оптимизируемым параметром является вектор Δu_i . Систему ограничений для задачи можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} lb_1 \leq \Delta u_1 \leq ub_1, \\ \dots \\ lb_n \leq \Delta u_n \leq ub_n; \end{cases} \quad (6)$$

где lb, ub – соответственно нижние и верхние ограничения на конструируемый параметр u .

Рассмотрим критерии оптимизации, основанные на сумме абсолютных разностей углов наклона нормалей и значений кривизны в точках САД-модели и припасованного профиля по алгоритму ИСР.

Пока профиль не совмещён наилучшим образом с номиналом, углы между нормальными в соответствующих точках будут достаточно велики. После наилучшего совмещения, при условии невысокого отклонения формы, разность углов наклона нормалей будет стремиться к нулю.

Вторым критерием является сумма абсолютных значений кривизны в соответствующих точках измеренного и номинального профилей. Кривизна поверхностей и профилей деталей, имеющих сложную форму поверхности, является важной характеристикой.

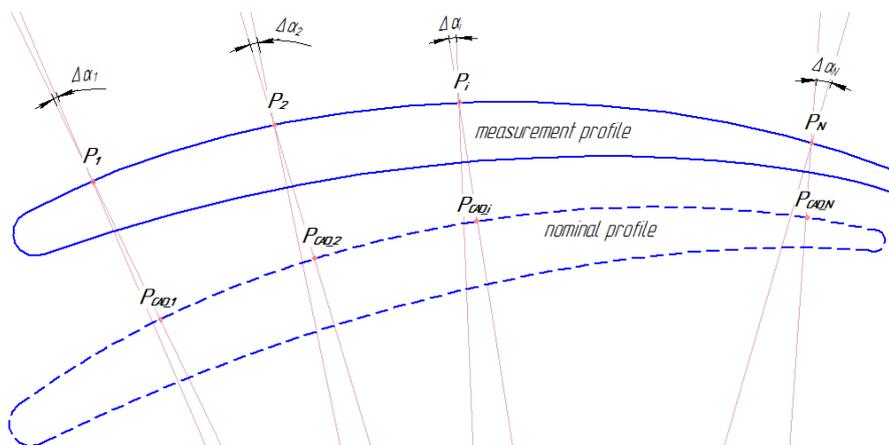


Рис. 2. Разность углов между нормальными к САД-модели и измеренного профиля в точках припасовки

Чем выше кривизна, тем сложнее обработать поверхность и соблюсти необходимые допуски. Детали типа лопаток

ГТД, пресс-формы, штампы, ряд корпусных деталей имеют существенную кривизну. В условии наилучшего подбора со-

ответствующих измеренным точкам номинальных точек кривизна в них будет близка. Если деталь имеет отклонение формы, то кривизна в соответствующих точках измеренного и номинального про-

филя будет отличаться (рис. 3) также, как и угол наклона нормалей. Но сумма абсолютных значений отклонений кривизны в соответствующих точках будет минимальной.

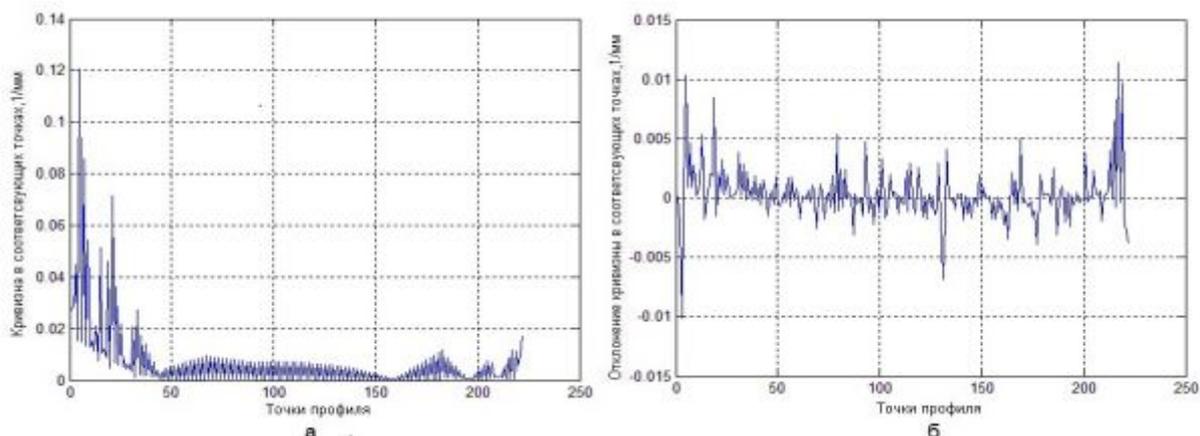


Рис. 3. Кривизна в точках профиля CAD-модели (а) и отклонение кривизны измеренного профиля пера лопатки компрессора ГТД у хвостовика (б) при максимальном отклонении формы 38,5 мкм

Таким образом, используя в качестве критериев кривизну и углы наклона нормалей в точках, можно сформировать оптимизационные функции:

$$\begin{cases} f_{\alpha}(\Delta u) = \sum_{i=1}^N \Delta \alpha_i(u + \Delta u_i) \rightarrow \min, \\ f_k(\Delta u) = \sum_{i=1}^N \Delta k_i(u + \Delta u_i) \rightarrow \min, \end{cases} \quad (7)$$

где $\Delta \alpha_i(u + \Delta u_i)$ – абсолютная разность углов наклона нормалей в точках профилей;

$\Delta k_i(u + \Delta u_i)$ – абсолютная разность кривизны в точках профилей.

Для расчёта кривизны параметрически заданной кривой $f(u)$ используется уравнение [8]:

$$k = \frac{|f'_x(u) \cdot f''_y(u) - f''_x(u) \cdot f'_y(u)|}{\left((f'_x(u))^2 + (f'_y(u))^2 \right)^{3/2}}. \quad (8)$$

Таким образом, имеем задачу условной нелинейной оптимизации, состоящую из одной нелинейной целевой функции и линейных ограничений.

Обозначим ограничения (6) в виде системы неравенств $g(\Delta u) \leq 0$. Если вектор Δu^* при наложенных условиях – решение задачи, то найдётся положитель-

ный вектор множителей Лагранжа $\lambda \in R^m$ такой, что для функции Лагранжа [9]

$$L(\Delta u) = f(\Delta u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\Delta u_i) \rightarrow \min \quad (9)$$

выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \min(L(\Delta u)) = L(\Delta u^*), \\ \lambda_i \cdot g_i(\Delta u_i^*) = 0, i = 1..m, \\ \lambda_i > 0, i = 1..m. \end{cases} \quad (10)$$

Задача оптимизации решалась методом последовательного квадратичного программирования (SQP). Метод позволяет достаточно точно имитировать метод Ньютона для оптимизации при наличии ограничений [10]. Метод Ньютона основан на нахождении нуля градиента целевой функции $\nabla f(\Delta u)$ и сводится к решению уравнений [11]:

$$\nabla f(\Delta u_j) + H(\Delta u_j) \cdot (\Delta u_{j+1} - \Delta u_j) = 0, j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

где $H(\Delta u_j)$ – Гессиан функции $f(\Delta u_j)$,

$$H(\Delta u_j) = \left[\frac{\partial^2 f(\Delta u)}{\partial \Delta u^2} \right].$$

В методе SQP на каждой основной итерации осуществляется аппроксимация Гессиана для функций Лагранжа при помощи квазиньютоновского модифицированного метода.

Методика проведения исследований по оценке точности и производительности предлагаемого подхода к оценке отклонения расположения представлена на рис. 4.



Рис. 4. Методика проведения исследований предлагаемого подхода

Точность наилучшего совмещения можно оценить, используя относительные величины сравнения её параметров [12]. В работе точность поиска параметров наилучшего совмещения характеризуется относительными показателями: отклонением матрицы поворота профиля и отклонением матрицы транспонирования.

Отклонение матрицы поворота рассчитывается как:

$$e_R = \frac{|R - R'|}{|R|} \cdot 100\%, \quad (12)$$

где R – заложенная матрица поворота профиля;

R' – рассчитанная матрица поворота профиля в результате работы алгоритма.

Отклонение матрицы транспонирования рассчитывается по формуле:

$$e_T = \frac{|T - T'|}{|T|} \cdot 100\%, \quad (13)$$

где T – заложенная матрица транспонирования профиля;

T' – рассчитанная матрица транспонирования профиля в результате работы алгоритма.

В качестве объекта моделирования использовался профиль лопатки компрессора ГТД (рис. 5). Рассматривались различные значения поворота и смещения профиля, координаты точек профиля с отклонением расположения (2) и отклонением формы вычислялись из координат

точек номинального профиля. Облако точек номинального и измеренного профилей аппроксимировались NURBS – сплайнами третьей степени. Смещение по оси x изменялось от 0,1 до 0,3 мм, оси y – в пределах 0,1...0,5 мм, угол разворота α 0,1... 0,7 град. Накладываемое отклонение формы профиля имело пределы до 38,5 мкм, что характерно для практических случаев.

В табл. 1 представлены результаты погрешности матриц разворота и транспонирования профиля e_t и e_r , которые получаются при методе ИСР, реализующем наилучшее совмещение по массивам измеренных и номинальных точек. Относительные параметры погрешностей, полученные в результате оптимизации алгоритма ИСР с использованием целевой функции (5), представлены в табл. 2.

При относительно невысоком отклонении формы алгоритм даёт близкие с базовым методом значения. На хуже изготовленных профилях алгоритм даёт более точные решения по матрице транспонирования – погрешность снижается примерно в 3 раза. Однако использование в оптимизационной функции первого критерия не решило проблему роста погрешностей совмещения профилей с ростом отклонения формы, хотя и дало более точные данные в сравнении базовым методом ИСР.

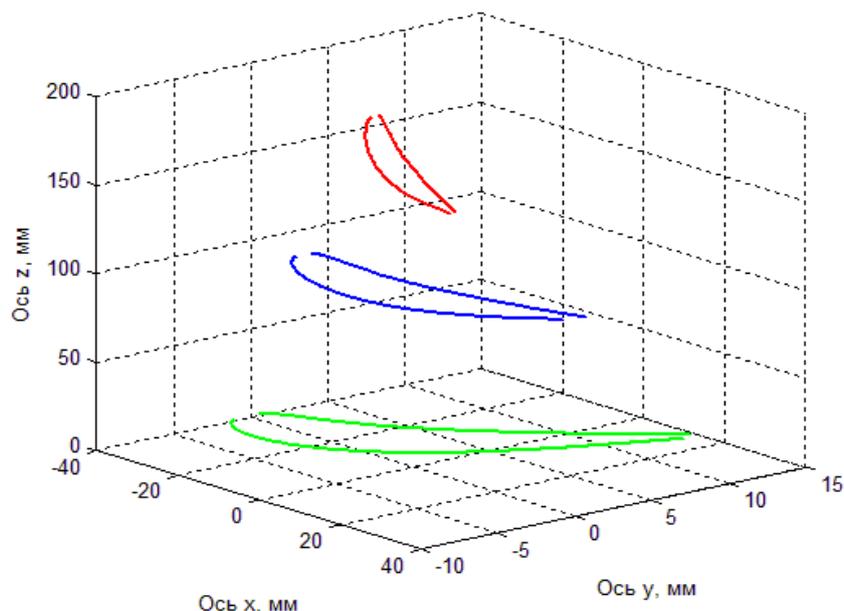


Рис. 5. Профили лопаток компрессора ГТД

Относительные параметры, полученные в результате оптимизации алгоритма ИСР с использованием целевой функции (9) представлены в табл. 3.

Таблица 1 - Относительные погрешности параметров припасовки профиля

Диапазоны изменения отклонения расположения по оси у и угла разворота	Значение отклонения формы, мм	Смещение по оси x 0,1 мм		Смещение по оси x 0,3 мм		Диапазоны изменения отклонения расположения по оси x и у	Угол разворота 0,1 град $e_T, \%$
		$e_T, \%$	$e_R, \%$	$e_T, \%$	$e_R, \%$		
y=0,1..0,5 мм α=0..0,7 град	0	9,05	3,03	4,37	3,08	y=0,1..0,5 мм x=0,1..0,5 мм	7,76
	0,0039	9,42	3,17	4,53	3,21		8,13
	0,0108	10,09	3,41	4,83	3,46		8,80
	0,0177	10,76	3,41	5,12	3,71		9,45
	0,0246	11,43	3,64	5,41	3,95		10,12
	0,0316	12,10	3,86	5,71	4,20		10,79
	0,0385	12,77	4,08	6,00	4,12		11,45

Таблица 2 - Относительные погрешности параметров припасовки профиля с использованием метода оптимизации положения точек номинального профиля по первому критерию

Диапазоны изменения отклонения расположения по оси у и угла разворота	Значение отклонения формы, мм	Смещение по оси x 0,1 мм		Смещение по оси x 0,3 мм		Диапазоны изменения отклонения расположения по оси x и у	Угол разворота 0,1 град $e_T, \%$
		$e_T, \%$	$e_R, \%$	$e_T, \%$	$e_R, \%$		
y=0,1..0,5 мм α=0..0,7 град	0	1,20	0,06	1,21	0,34	y=0,1..0,5 мм x=0,1..0,5 мм	0,20
	0,0039	1,08	0,15	1,21	0,11		0,49
	0,0108	1,41	0,44	1,35	0,44		1,41
	0,0177	2,59	0,80	1,52	0,71		2,59
	0,0246	3,39	1,03	1,84	1,04		3,39
	0,0316	4,36	1,32	2,22	1,36		4,36
	0,0385	5,49	1,66	2,61	1,60		5,49

Таблица 3 - Относительные погрешности параметров припасовки профиля с использованием метода оптимизации положения точек номинального профиля при целевой функции кривизна-отклонение нормалей

Диапазоны изменения отклонения расположения по оси у и угла разворота	Значение отклонения формы, мм	Смещение по оси x 0,1 мм		Смещение по оси x 0,3 мм		Диапазоны изменения отклонения расположения по оси x и y	Угол разворота 0,1 град $e_T, \%$
		$e_T, \%$	$e_R, \%$	$e_T, \%$	$e_R, \%$		
y=0,1..0,5 мм α=0..0,7 град	0	1,19	0,01	1,21	0,02	y=0,1..0,5 мм x=0,1..0,5 мм	0,17
	0,0039	1,19	0,34	1,21	0,02		0,49
	0,0108	1,21	0,22	1,21	0,44		0,23
	0,0177	1,47	0,43	1,21	0,42		1,47
	0,0246	1,44	1,16	1,21	0,42		1,44
	0,0316	1,42	0,31	1,40	0,87		0,16
	0,0385	1,09	0,06	2,22	0,19		0,17

Погрешности, полученные при решении нелинейной функции разности углов наклона нормалей и кривизны в соответствующих точках профиля, не увеличиваются однозначно с ростом отклонения формы. Можно сказать, что при оптимизации с целевой функцией (12) результат решения изменяется незначительно.

В статье предложен и подтверждён метод повышения точности алгоритма ICP на основе решения многокритериальной задачи оптимизации, используемый при выявлении параметров отклонения расположения для профилей и поверхностей, имеющих сложную форму поверхности. Рассматривалось использование двух критериев. Первый критерий использует расстояния между припасованными точками измеренного профиля и точками на номинальном профиле. В качестве второго критерия использовались геометрические особенности объекта измерения, такие как кривизна и угол наклона нормалей в точках.

Основная причина погрешности определения параметров отклонения расположения заключается в несоответствии точек номинального и измеренного профилей, которые используются для наилучшего совмещения по методу МНК.

Отклонение формы профилей, в зависимости от его величины, ухудшает качество наилучшего совмещения на 5-40%. Влияние отклонения формы на точность расчёта параметров отклонения расположения удалось уменьшить при помощи критерия минимизации отклонений углов наклона нормалей и кривизны в точках совмещаемого профиля и CAD-модели (табл. 3).

Таким образом, предлагаемый в статье новый метод позволяет существенно (до 5 раз) повысить точность совмещения измеренного профиля с его моделью при отклонении формы до 38,5 мкм. Метод оптимизации по геометрическим особенностям наиболее применим в практике, так как при изготовлении деталей отклонение формы неизбежно. При минимальном отклонении формы погрешность e_R удалось снизить в 30-300 раз.

Исследования проводились на оборудовании ЦКП САМ-технологий в рамках проекта № RFMEFI59314X0003.

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы повышения конкурентоспособности СГАУ среди мировых ведущих научно-образовательных центров на 2013-2020 годы.

Библиографический список

1. Besl P.J., McKay N.D. A method for registration of 3-D shapes // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1992. V. 14, no. 2. P. 239-256.

2. Yadong L., Peihua G. Free-form surface inspection techniques state of the art review // Computer-Aided Design. 2004. No. 36. P. 1395-1417.
3. Ainsworth I., Ristic M., Brujic D. CAD-Based measurement path planning for free-form shapes using contact probes // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2000. V. 16. P. 23-31.
4. Bentley J.L. Multidimensional binary search trees used for associative searching // Communications of the ACM. 1975. V. 18, no. 9. P. 509-517.
5. Friedman J.H., Bentley J.L., Ari Finkel R. An algorithm for finding best matches in logarithmic expected time // ACM Transactions on Mathematical Software. 1977. V. 3, no. 3. P. 209-226.
6. Balasubramanian S., Gu P. A neural network approach to localization of parts with complex surfaces for precision inspection // Proceedings ASME Computer Engineering Conference 1995. 1995. P. 1025-1031.
7. Ли К. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). СПб.: Питер. 2004. 560 с.
8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М. АСТ: Астрель. 2006. 991 с.
9. Gill P., Murray W., Wright M. Practical optimization. San Francisco: Academic Press. 1981.
10. Powell M.J.D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations, numerical analysis / ed. by G.A. Watson // Lecture Notes in Mathematics. 1978. V. 630. P. 144-157.
11. Korn G., Korn M. Mathematical handbook for scientists and engineers. New York: McGraw-Hill Book Company. 1968.
12. Zhang Z. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces // International Journal of Computer Vision. 1994. V. 13, no. 2. P. 119-152.

Информация об авторах

Болотов Михаил Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры производства двигателей летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: maikl.bol@gmail.com. Область научных интересов: координатные измерения, процессы сборки, математические методы.

Печенин Вадим Андреевич, аспирант кафедры производства двигателей летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва

(национальный исследовательский университет). E-mail: yadim.pechenin2011@yandex.ru. Область научных интересов: координатные измерения, процессы сборки, математические методы.

Рузанов Николай Владимирович, аспирант кафедры производства двигателей летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: kinform_@mail.ru. Область научных интересов: координатные измерения, математические методы, разработка информационных систем.

IMPROVING THE ACCURACY OF ASSESSING THE POSITION DEVIATION IN COORDINATE MEASUREMENTS OF GTE COMPRESSOR AND TURBINE BLADE PROFILES

© 2014 M.A. Bolotov, V.A. Pechenin, N.V. Ruzanov

Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

The paper proposes a method for increasing the accuracy of the iterative closest point (ICP) algorithm used in metrology problems in determining position deviation. The target of using the method for determining deviation profiles were compressor blades of a gas turbine engine (GTE). We propose to formulate the problem of the optimal match in the developed method as a multicriterion task including the criteria of the minimum of squared distances, differences of normal vectors and difference values of the depth of camber at the appropriate points of the superposed profiles. Different variants of reducing the problem to the use of a single integral criterion including the above-mentioned ones are considered. The problems of optimization were solved using the quasi-Newtonian methods of sequential quadratic programming. The proposed new method of improving the ICP algorithm based on geometric features showed greater accuracy in comparison with the discussed methods for optimizing the distance between the fitting points, especially in the case of a small number of measurement points on the profiles.

ICP-algorithm, profile fitting, least squares method, NURBS, nonlinear optimization, profile camber.

References

1. Besl P.J., McKay N.D. A method for registration of 3-D shapes // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1992. V. 14, no. 2. P. 239-256.
2. Yadong L., Peihua G. Free-form surface inspection techniques state of the art review // Computer-Aided Design. 2004. No. 36. P. 1395-1417.
3. Ainsworth I., Ristic M., Brujic D. CAD-Based measurement path planning for free-form shapes using contact probes // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2000. V. 16. P. 23 – 31.
4. Bentley J.L. Multidimensional binary search trees used for associative searching // Communications of the ACM. 1975. V. 18, no. 9. P. 509-517.
5. Friedman J.H., Bentley J.L., Ari Finkel R. An algorithm for finding best matches in logarithmic expected time // ACM Transactions on Mathematical Software. 1977. V. 3, no. 3. P. 209-226.
6. Balasubramanian S., Gu P. A neural network approach to localization of parts with complex surfaces for precision inspection // Proceedings ASME Computer Engineering Conference 1995. 1995. P. 1025-1031.
7. Lee K. Bases of CAD (CAD/CAM/CAE). Saint Petersburg: Piter Publ., 2004. 560 p.
8. Vygodskii M.Ya. Handbook of higher mathematics. Moscow: AST: Astrel Publ., 2006. 991 p.
9. Gill P., Murray W., Wright M. Practical optimization. San Francisco: Academic Press, 1981.
10. Powell M.J.D. A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations, numerical analysis// ed. G.A. Watson, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag. 1978.
11. Korn G., Korn M. Mathematical handbook for scientists and engineers. New York: McGraw-Hill Book Compan, 1968.
12. Zhang Z. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces // International Journal of Computer Vision. 1994. V. 13, no. 2. P. 119-152.

About the authors

Bolotov Mikhail Alexandrovich, Candidate of Science (Engineering), Associate Professor, Department of Production of Aircraft Engines, Samara State Aerospace

University. E-mail: maikl.bol@gmail.com.
Area of Research: coordinate measurements, assembly processes, mathematical methods.

Pechenin Vadim Andreevich, postgraduate student of the Department of Production of Aircraft Engines, Samara State Aerospace University. E-mail: vadim.pechenin2011@yandex.ru. Area of Research: coordinate measurements, assembly processes, mathematical methods.

Ruzanov Nikolay Vladimirovich, postgraduate student of the Department of Production of Aircraft Engines Samara State Aerospace University. E-mail: kinform@mail.ru. Area of Research: coordinate measurements, assembly processes, software development.