

УДК 621.813+534.933

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИКИ ЗУБЧАТЫХ КОЛЁС

© 2014 М.И. Курушин, В.Б. Балякин, С.А. Курушин

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва  
(национальный исследовательский университет)

Проведено аналитическое исследование процессов возбуждения вибрации зубчатыми колёсами. В статье рассматривается упругая модель зубчатого зацепления без учёта податливости опор. Показано, что причиной возникновения параметрических колебаний являются периодическое изменение усилий в зацеплении при переходе от однопарного к двухпарному зацеплению и наоборот. Динамикой упругой системы можно управлять с помощью коэффициента перекрытия  $\varepsilon$  в зацеплении зубчатых колёс, который не зависит от передаваемой мощности. Величины зон неустойчивости зависят как от частот вращения зубчатых колёс, так и от степени перекрытия в зацеплениях зубьев, при всех частотах вращения зубчатых колёс, кроме равных удвоенным первым частотам, имеются по несколько зон неустойчивости и устойчивой работы упругих систем. Все зоны потери устойчивости и резонансов находятся в областях смены фаз вибрации, при этом если до зоны неустойчивости или резонанса максимальные усилия были в областях однопарного зацепления, то после прохождения указанных зон наоборот – максимальные усилия в зацеплениях будут в областях двухпарного зацепления.

*Зубчатые колёса, однопарное зацепление, параметрические колебания, неустойчивость.*

Существенное влияние на работоспособность и прочность зубчатых колёс оказывают крутильные и изгибные колебания. Данной проблеме посвящён целый ряд работ как у нас в стране [1,2], так и за рубежом [3].

При однопарном зацеплении зубчатых колёс наиболее мощным возбудителем динамических процессов является периодическое пересопряжение зубьев в процессе зацепления – периодическое входение в зону зацепления и выход из неё то одной, то двух пар зубьев [4]. При этом, естественно, периодически скачкообразно (примерно в два раза) изменяется и жёсткость самого зацепления. Соответственно периодически изменяется жёсткость и всей упругой системы двигателя вместе с зубчатыми колёсами, которые входят в эту упругую систему, что и приводит к её неустойчивости [5].

Для выяснения характеристик возбуждения при пересопряжении зубьев предложена упругая модель одной зубчатой пары. На рис. 1 показана такая модель зацепления зубьев. В модели используется ряд допущений. В любом положении зацепления представляется абстрактной упругостью (пружиной), жёсткость которой периодически изменяется в процессе относительного вращения колёс. Кроме то-

го, массовые моменты инерции  $J$  зубчатых колёс приведём к сосредоточенным массам  $m$  на радиусах  $r_0$  их основных окружностей:  $m_1 = J_1/r_{o1}$  и  $m_2 = J_2/r_{o2}$ .

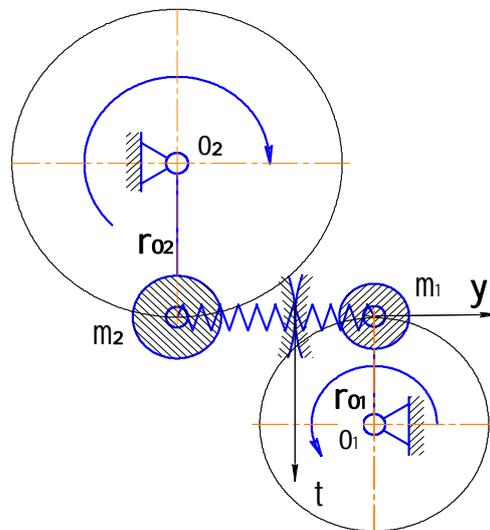


Рис. 1. Упругая модель зубчатого зацепления без учёта податливости опор

При заданном постоянном режиме работы зубчатые колёса вращаются равномерно, а вибрация возникает только за счёт периодического изменения жёсткости в зацеплениях. Тогда с определённой точностью крутильные колебания зубчатых колёс относительно их равномерного вращения можно представить в виде вибрации приведённых масс по линии зацеп-

ления. Ещё делаем допущение, что сами зубья не инерционные, а их масса включаются в массы самих зубчатых колёс. Нормальное усилие  $F$ , действующее на массу ведущего зубчатого колеса вдоль линии зацепления, в процессе динамического движения принимаем постоянным и достаточным, чтобы зубья контактировали только с рабочей стороны. Принимаем, что зазоры в зацеплениях зубьев отсутствуют. И, наконец, для упрощения решения задачи, не будем учитывать демпфирование в упругой системе.

Теперь попытаемся аналитически проверить параметрическую динамику такой одномассовой упругой системы на устойчивость при любом значении коэффициента перекрытия. Уравнения движения зубьев шестерни и колеса соответственно будут:

$$m_1 d^2 y_1 / dt^2 = C y_2 - C y_1 ;$$

$$m_2 d^2 y_2 / dt^2 = -C y_2 + C y_1 .$$

Здесь  $C$  - жёсткость зацепления, которая периодически может принимать значения то жёсткости однопарного зацепления -  $C_1$ , то жёсткости двухпарного зацепления -  $C_2$ . Так как нас интересует в данном случае относительное движение зубчатых колёс, то можно свести эти два дифференциальных уравнения к одному, введя относительную координату  $y = y_1 - y_2$ .

Тогда дифференциальное уравнение колебаний зубчатых колёс в относительном колебательном движении будет

$$d^2 y / dt^2 = d^2 y_1 / dt^2 - d^2 y_2 / dt^2$$

или

$$d^2 y / dt^2 + C(1/m_1 + 1/m_2) = 0 .$$

Введя обозначение приведённой массы  $1/m = (1/m_1 + 1/m_2)$ , окончательно получим дифференциальное уравнение динамики пары зубчатых колёс в их относительном (колебательном) движении в виде

$$d^2 y / dt^2 + C / m = 0 .$$

Это однородное дифференциальное уравнение без правой части. Общие реше-

ния такого уравнения будем искать в форме

$$y = A \sin(pt) + B \cos(pt) ,$$

где  $A$  и  $B$  произвольные постоянные, которые определяются по начальным условиям движения,  $p$  - собственная частота колебаний упругой системы,  $t$  - время.

Тогда можем записать:

$y_1 = A \sin(p_1 t) + B \cos(p_1 t)$  - для зоны однопарного зацепления;

$y_2 = N \sin(p_2 t) + M \cos(p_2 t)$  - для зоны двухпарного зацепления.

Здесь  $p_1 = (C_1/m_1)^{1/2}$  и

$p_2 = (C_2/m_2)^{1/2}$  - собственные частоты колебания упругой системы соответственно в зонах однопарного и двухпарного зацеплений. Соответствующие скорости перемещений получим в виде:

$y_1^1 = A p_1 \cos(p_1 t) - B p_1 \sin(p_1 t)$  - в зоне однопарного зацепления ;

$y_2^1 = N p_2 \cos(p_2 t) - M p_2 \sin(p_2 t)$  - в зоне двухпарного зацепления.

Четыре произвольных постоянных можно определить по следующим граничным и начальным условиям. В зоне сопряжения двухпарного и однопарного зацеплений зубьев (при  $t = t_2$ ) в силу непрерывности движения необходимо, чтобы перемещения и скорости были одинаковыми:  $y_2(t_2) = y_1(t_2)$  и  $y_2^1(t_2) = y_1^1(t_2)$ . Или, записывая полностью:

$$N \sin(p_2 t_2) + M \cos(p_2 t_2) =$$

$$A \sin(p_1 t_2) + B \cos(p_1 t_2);$$

$$N p_2 \cos(p_2 t_2) - M p_2 \sin(p_2 t_2) =$$

$$A p_1 \cos(p_1 t_2) - B p_1 \sin(p_1 t_2).$$

Теперь предположим, что движение будет неустойчивым, и что в конце периода зацепления  $T_3$  перемещения и скорости будут больше перемещения и скорости в начале периода зацепления:

$$y_1(T_3) = \lambda y_2(0) \text{ и } y_1^1(T_3) = \lambda y_2^1(0),$$

где  $\lambda > 1$ . Или, записывая полностью:

$$A \sin(p_1 T_3) + B \cos(p_1 T_3) = \lambda M ;$$

$$A p_1 \cos(p_1 T_3) - B p_1 \sin(p_1 T_3) = \lambda p_2 N .$$

Таким образом, получили четыре алгебраических уравнения для определения произвольных постоянных дифференциальных уравнений движения зубчатых колёс. Эта система имеет однозначное решение при определении произвольных постоянных, если равен нулю определитель, составленный из её коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} \sin(p_2 t_2) & \sin(p_2 t_2) & -\sin(p_1 t_2) & -\cos(p_2 t_2) \\ p_2 \cos(p_2 t_2) & -p_2 \sin(p_2 t_2) & -p_1 \sin(p_1 t_2) & p_1 \sin(p_1 t_2) \\ 0 & \lambda & -\sin(p_1 T) & -\cos(p_1 T) \\ \lambda p_2 & 0 & -p_1 \cos(p_1 T) & p_1 \sin(p_1 T) \end{pmatrix} = 0$$

Раскрыв его, получим следующее квадратное уравнение  $\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0$ , где коэффициент записывается в виде

$$A = \cos(p_1 t_1) \cos(p_2 t_2) - 0,5 \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} \sin(p_1 t_1) \sin(p_2 t_2).$$

Корни квадратного уравнения будут  $\lambda_1 = A - (A-1)^{1/2}$  и  $\lambda_2 = A + (A-1)^{1/2}$ . Для того, чтобы они имели действительные, а не мнимые значения, необходимо, чтобы  $A$  по абсолютному значению было больше единицы:  $|A| > 1$ . В этом случае упругая система будет неустойчива, и амплитуды вибраций упругой системы будут увеличиваться непрерывно во времени. Введём понятие так называемой средней (средневзвешенной) частоты упругой системы согласно равенству

$$C_{CP} = (C_1 t_1 + C_2 t_2) / T_3.$$

Подставив в это соотношение значения  $t_1 = (2 - \varepsilon)T_3$  и  $t_2 = (\varepsilon - 1)T_3$ , получим  $C_{CP} = C_1(2 - \varepsilon) + C_2(\varepsilon - 1)$ . Отсюда следует  $C_1 = C_{CP} / ((2 - \varepsilon) + (C_2 / C_1)(\varepsilon - 1))$ . Так как  $p_1^2 m = C_1$  и  $p_{CP} m = C_{CP}$ , то  $p_1^2 = p_{CP}^2 / (2 - C_2 / C_1 + (C_2 - C_1) / C_1 \varepsilon)$ , а так как  $p_2^2 / p_1^2 = C_2 / C_1$ , то  $p_2^2 = p_{CP}^2 (C_2 / C_1) / (2 - C_2 / C_1 + (C_2 - C_1) / C_1 \varepsilon)$ .

Подставив все эти значения в выражение для коэффициента  $A$ , получим формулу для его вычисления

$$A = [\cos(R\alpha) \cos(S\alpha) - 0,5[\sqrt{C_2 / C_1} + \sqrt{C_1 / C_2}] \sin(R\alpha) \sin(S\alpha)]'$$

где

$$R = 2\pi(\varepsilon - 1) / \sqrt{(C_2 / C_1) / [(2 - \varepsilon) + (C_2 / C_1)(\varepsilon - 1)]};$$

$$S = 2\pi(2 - \varepsilon) / \sqrt{(C_2 / C_1) / [(2 - \varepsilon) + (C_2 / C_1)(\varepsilon - 1)]};$$

$\alpha = p_{CP} / \omega$ ,  $\omega$  - угловая скорость вращения шестерни зубчатой пары упругой системы.

По виду зависимости для параметра неустойчивости  $A$  можно заметить, что этот параметр состоит из комбинаций гармонических функций и, следовательно, он тоже должен быть функцией гармонической. На рис.2 приведены результаты расчётов зон неустойчивости по параметру  $A$  для случая комбинации значений удельных жёсткостей зубьев стальных зубчатых колёс гостовского исполнения:  $c_1 = c_0 = 18 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> и  $c_2 = c_0 + c_k = 30,5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Во-первых, вид кривых, описывающих области неустойчивостей, близок к гармоническому.

Во-вторых, и это самое главное, области неустойчивости проявляются не только при значениях частот возбуждения, кратных собственной частоте упругой системы, как это было установлено аналитическим анализом, но и при промежуточных между ними значениях: при  $\alpha = (p_{CP} / \omega) = n/2$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Это следует и из зависимости для параметра неустойчивости  $A$ . Положив в ней  $C_1 = C_2$ , получим те же значения  $\alpha = (p_{CP} / \omega) = n/2$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$

В-третьих, наиболее опасная по устойчивости является частота возбуждения, в два раза большая собственной частоты упругой системы, в том числе и потому, что для её возбуждения требуется меньше энергии, чем при возбуждении более высоких собственных форм.

В-четвёртых, значения коэффициентов перекрытия сильно влияют на устойчивость системы.

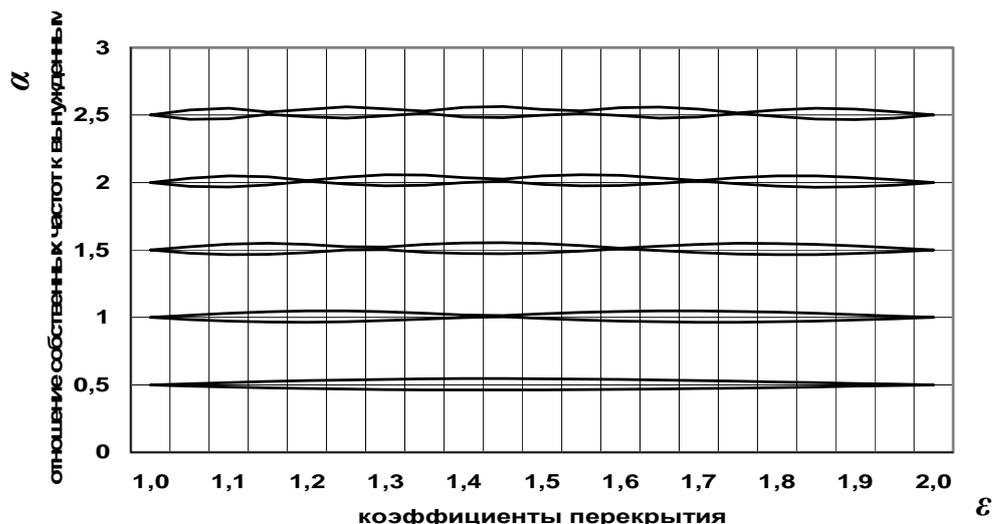


Рис.2. Области неустойчивости одномассовой системы зубчатого однопарного зацепления

Из графиков видно, что для каждой частоты возбуждения, начиная с частоты, кратной собственной и ниже, имеются как зоны неустойчивости, так и устойчивые зоны. Число зон неустойчивостей в два раза больше числа параметра  $\alpha = p/\omega$ . Необходимо сделать замечание, что при построении этой диаграммы принята не-

зависимость собственной частоты упругой системы от коэффициента перекрытия зацепления. Но коэффициент перекрытия  $\epsilon$  может сильно влиять на жёсткость зацепления, а, следовательно, и на собственную частоту упругой системы (табл. 1).

Таблица 1 - Отношения собственных частот к вынужденным  $\alpha = p/\omega$

$\alpha = 1$	$\alpha = 1,5$	$\alpha = 2$	$\alpha = 2,5$	$\alpha = 3$
<b>Диапазоны коэффициентов перекрытия в зонах неустойчивости</b>				
1,4020...1,4675	1,2510...1,3046	1,1824...1,2259	1,1432...1,1785	1,1178...1,1490
	1,5733...1,6379	1,4013...1,4683	1,3082...1,3701	1,1250...1,3061
		1,6692...1,7258	1,5012...1,5699	1,3998...1,4697
			1,7276...1,7784	1,5772...1,6391
				1,7713...1,8154

Таким образом, динамикой упругой системы можно управлять с помощью коэффициента перекрытия  $\epsilon$  в зацеплении зубчатых колёс, который не зависит от передаваемой мощности, тогда как потребная величина фланка или разношаговости в зонах двухпарного зацепления для снятия параметрического возбуждения упругой системы зависит от передаваемой мощности и пропорциональна ей [6].

Проверка аналитического решения параметрической динамики при периодической смене жёсткостей в зацеплениях зубьев зубчатых колёс на устойчивость показывает возможность потери устойчи-

вости таких упругих систем при частотах возбуждения не только на резонансных частотах, но и на промежуточных частотах, в том числе и на частоте вращения, в два раза большей собственных частот упругой системы.

Необходимо отметить, что при введении разношаговости в области двухпарного зацепления разность жёсткостей в зубьях всё же сохраняется, и даже при ликвидации за счёт разношаговости параметрического смещения, опасность потери устойчивости упругих систем сохраняется за счёт других источников возбуждения: ошибки шагов, биения, колебания нагрузок и т.д.

Величины зон неустойчивости зависят как от частот вращения зубчатых колёс, так и от степени перекрытия в зацеплениях зубьев. При всех частотах вращения зубчатых колёс, кроме равных удвоенным первым частотам, имеются несколько зон неустойчивой и устойчивой работы упругих систем.

Все зоны потери устойчивости и резонансов находятся в областях смены фаз вибрации. При этом если до зоны неустойчивости или резонанса максимальные усилия были в областях однопарного зацепления, то после прохождения указанных зон наоборот – максимальные усилия

в зацеплениях будут в областях двухпарного зацепления.

С помощью изменения коэффициентов перекрытия в зацеплениях зубьев зубчатых колёс можно приводить систему в устойчивое состояние.

Выводы по результатам аналитических решений параметрической динамики упругих систем с зубчатыми колёсами должны быть справедливыми и в реальных упругих системах в зонах параметрической устойчивости их работы. В зонах неустойчивости при введении разношаговости вибрации либо должны снижаться, либо принимать другие частоты и формы.

### **Библиографический список**

1. Вулгаков Э.Б. Авиационные зубчатые передачи и редуктора. М.: Машиностроение, 1981. 375 с.
2. Кожаринов Е.В., Калинин Д.В., Панов С.А. Бифуркационные процессы в зубчатых передачах // Международный форум двигателестроения: матер. научн.-тех. конгресса по двигателям. М.: 2014. С. 97-99.
3. Cornell R.W., Westervelt W.W. Dynamic Tooth Loads and Stressing for High Contact Ratio Spur Gears // ASME, Series B. 1978. V. 100, no. 1. P. 70-79.
4. Кудрявцев Л.А. Влияние переменной жёсткости зацепляющихся зубьев на колебания и шум прямозубых передач // Станки и инструмент. 1962. № 10. С. 26-28.
5. Абрамов Б.М. Исследование устойчивости периодических колебаний // Известия вузов. 1963. № 5. С. 5-12.
6. Курушин М.И., Балякин В.Б., Курушин А.М. Экспериментальные исследования причин возбуждения колебаний элементов турбовинтового двигателя с дифференциальным редуктором // Известия СНЦ РАН. 2014. Т. 16, № 4(1). С. 132-136.

### **Информация об авторах**

**Балякин Валерий Борисович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой основ конструирования машин, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [029-029@mail.ru](mailto:029-029@mail.ru). Область научных интересов: опоры авиационных и ракетных двигателей.

**Курушин Михаил Иванович**, кандидат технических наук, доцент кафедры основ конструирования машин, Самар-

ский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика зубчатых колёс.

**Курушин Степан Александрович**, аспирант кафедры основ конструирования машин, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: динамика зубчатых колёс.

## PARAMETRIC INSTABILITY OF THE DYNAMICS OF GEAR WHEELS

© 2014 M.I. Kurushin, V.B. Balyakin, S.A. Kurushin

Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

Analytical research was carried out with the aim of finding the cause of dynamic processes of vibration excitation of gear wheels. This paper presents an elastic model of gearing without regard for compliance of supports. It is shown that parametric oscillations are caused by a periodic change of mesh force gearing in passing from one tooth mesh to double pair meshing and vice versa. The dynamics of an elastic system can be controlled by using the contact ratio  $\varepsilon$  in the gear mesh which does not depend on the transmitted power. The size of instability zones depends both on the gear wheel rotation frequency and on the degree of overlap in teeth mesh. There are several zones of instability and stable operation of elastic systems at all gear wheel rotation frequencies except those equal to doubled first frequencies. All zones of instability and resonances are located in the zones of phase vibration changes, with maximum efforts taking place in the areas of one tooth mesh before passing the zone of instability or resonance, while after passing these zones the maximum mesh force, on the contrary, will take place in the areas of double pair meshing.

*Gear wheels, one tooth mesh, parametric vibrations, instability zones.*

### References

1. Vulgakov E.B. Aviatzionnye zubchatye peredachi i reduktora [Aviation gear systems and reduction gears]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1981. 375 p.
2. Kozharinov Ye.V., Kalinin D.V., Panov S.A. Bifurcation processes in gear systems // International Forum of Propulsion Engineering: Proceedings of a scientific and technical conference on engines. Moscow: 2014. P. 97-99. (In Russ.)
3. Cornell R.W., Westervelt W.W. Dynamic tooth loads and stressing for high contact ratio spur gears // ASME, Series B. 1978. V. 100, no. 1. P. 70-79.
4. Kudryavtsev L.A. Influence of the meshing teeth rigidity on the vibration and noise of spur gears // Machines and Tooling. 1962. No 10. P. 26-28. (In Russ.)
5. Abramov B.M. Research of the stability of periodic vibrations // Izvestiya Vuzov. 1963. No. 5. P. 5-12. (In Russ.)
6. Kurushin M.I., Balyakin V.B., Kurushin A.M. Experimental investigation of the courses of vibration excitation of elements of gas turbine engines with a differential reduction gearbox // Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN. 2014. V. 16, no. 4(1). P. 132-136. (In Russ.)

### About the authors

**Balyakin Valeriy Borisovich**, Doctor of Science (Engineering), Professor, Head of the Department of Fundamentals of Machine Design, Samara State Aerospace University. E-mail: [029-029@mail.ru](mailto:029-029@mail.ru). Area of Research: aircraft and rocket engine supports.

**Kurushin Mikhail Ivanovich**, Candidate of Science (Engineering), Associate Professor of the Department of Fundamentals of

Machine Design, Samara State Aerospace University. Area of Research: dynamics of gear systems.

**Kurushin Stepan Aleksandrovich**, postgraduate student of the Department of Fundamentals of Machine Design, Samara State Aerospace University. Area of Research: dynamics of gear systems.