ББК 65.23
УДК 338.24.01

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ СНИЖЕНИИ ТРУДОЁМКОСТИ

© 2012 О. В. Павлов, Т. Н. Рясная

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Сформулирована и решена задача планирования на этапе освоения нового изделия при динамическом снижении трудоёмкости. Проблема рассматривается как задача оптимального управления дискретной системой. Получено численное решение с помощью метода динамического программирования Беллмана.

Освоение нового изделия, динамическое снижение трудоёмкости, оптимальные объёмы производства, динамическое программирование Беллмана.

Введение

Начальным этапом производства новой продукции является этап освоения, в течение которого обеспечивается достижение планового объёма производства в единицу времени. На этом этапе совершенствуется технологический процесс, налаживаются кооперированные и производственные связи, закрепляются специальные знания и навыки работы, происходит процесс обучения рабочих и менеджеров. Отличительной особенностью этапа освоения новой продукции является динамический характер экономических показателей производства. Нормы расхода материальных и трудовых ресурсов, потери от брака снижаются, скорость и качество работы рабочих, специалистов и менеджеров возрастают [1]-[4]. В результате по мере нарастания объёма выпуска продукции происходит снижение трудоёмкости.

Динамическое снижение трудоёмкости на этапе освоения продукции делает актуальной задачу планирования производства промышленного предприятия. Задача заключается в поиске оптимального распределения объёмов производства по временным периодам при заданном времени и заданном суммарном объёме производства с целью минимизации трудовых затрат за весь период освоения нового изделия [5]. Под суммарным объёмом производства понимается количество изделий, изготовленных с начала освоения новой продукции.

1. Постановка динамической задачи оптимального определения объёмов производства на этапе освоения нового изделия

Динамика изменения суммарного объёма производства промышленного предприятия на этапе освоения нового изделия описывается дискретным уравнением:

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \quad t = \overline{1,n},$$

где x_t – суммарный объём производства за t временной период; t – номер временного периода; u_t – объём производства в периоде t; n – число периодов на этапе освоения изделия.

Известно количество произведённой продукции в начальный момент времени:

$$x_0 = X_0.$$

В конечный период суммарный объём произведённой продукции должен быть равен заданному:

$$x_n = X_0 + R.$$

Объём производства в периоде t не может превышать максимальной производственной мощности оборудования:

$$u_t \le Q^{max}, \quad t = \overline{1,n},$$

где Q^{max} – максимальная производственная мощность оборудования.

Трудовые затраты в периоде t определяются как произведение трудоёмкости продукции t_t и объёма производства u_t:

$$C_t = t_t u_t. \tag{1}$$

Динамика изменения трудоёмкости изделия от суммарного объёма производства описывается степенной зависимостью [2, 3]:

$$t_t = a x_t^{-g}, \tag{2}$$

где a – затраты на производство первого изделия, g – коэффициент крутизны кривой освоения.

Из анализа формулы (2) следует, что трудоёмкость изделия определяется только суммарным объёмом производства.

Коэффициент крутизны кривой освоения характеризует темп снижения трудоёмкости изделия. Кривая, построенная на основе формулы (2), называется кривой освоения.

Подставляя выражение (2) в (1), можно получить затраты в периоде t:

$$C_t = a x_t^{-g} u_t.$$

В качестве критерия принятия управленческого решения принимается минимизация суммарных трудовых затрат:

$$J = \sum_{t=1}^{n} a x_t^{-g} u_t \to \min.$$

Таким образом, модель принятия решений для руководства предприятия запишется в виде:

$$\begin{cases} J = \sum\limits_{t=1}^{n} a x_t^{-g} u_t \to \min, & (3)\\ u_t \le Q^{\max}, \ t = \overline{1,n}, & (4)\\ x_t = x_{t-1} + u_t, \ t = \overline{1,n}, & (5)\\ x_0 = X_0, & (6)\\ x_n = X_0 + R. & (7) \end{cases}$$

Сформулированная задача (3)-(7) является задачей оптимального управления дискретной системой. Решением сформулированной задачи является такое оптимальное управление u_t, удовлетворяющее ограничению (4), которое переводит дискретную систему (5) из начального состояния (6) в конечное состояние (7) и обеспечивает минимум критерия оптимальности (3).

2. Решение динамической задачи оптимального определения объёмов производства на этапе освоения нового изделия

Далее конкретизируется разработанная математическая модель (3)-(7) на примере освоения нового изделия «Корпус» на предприятии ОАО «Салют». Динамика изменения трудоёмкости изделия «Корпус» представлена в табл. 1.

Для того, чтобы аппроксимировать приведённые в табл. 1 данные с помощью метода наименьших квадратов [6], необходимо произвести линеаризацию степенной функции (2):

$$ln(t_t) = ln(a) - g\, ln(x_t). \tag{8}$$

Произведём замены в формуле (8):

$$Y = ln(t_t), \quad A = ln(a), \; B = -g,$$
$$X = ln(x_t). \tag{9}$$

Получим модель, в которой результативный признак Y (натуральный логарифм трудоёмкости изделия) связан с факторным признаком X (натуральным логарифмом суммарного объёма производства изделия) линейной зависимостью:

$$Y = A + BX + e,$$

где e – случайный компонент.

Таблица 1. Динамика изменения трудоёмкости изделия «Корпус»

Месяц	Объём производства, шт.	Объём, нарастающим итогом, шт.	Трудоёмкость, н/час.
Январь 2010	20,0	20,0	10,00
Февраль 2010	20,0	40,0	9,90
Март 2010	20,0	60,0	9,80
Апрель 2010	20,0	80,0	9,70
Май 2010	20,0	100,0	9,60
Июнь 2010	20,0	120,0	8,80
Июль 2010	20,0	140,0	8,80
Август 2010	20,0	160,0	8,80
Сентябрь 2010	20,0	180,0	8,60
Октябрь 2010	20,0	200,0	8,50
Ноябрь 2010	20,0	220,0	8,40
Декабрь 2010	20,0	240,0	8,20
Январь 2011	20,0	260,0	8,00
Февраль 2011	20,0	280,0	7,80
Март 2011	20,0	300,0	7,60
Апрель 2011	20,0	320,0	7,40
Май 2011	20,0	340,0	7,33
Июнь 2011	20,0	360,0	7,30
Июль 2011	20,0	380,0	7,25

Суть метода наименьших квадратов заключается в поиске коэффициентов A и B, минимизирующих сумму квадратов отклонений эмпирических значений Y от расчётных значений $\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}X$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{A} - \hat{B}X_i)^2 \to \min,$$

где Y_i – эмпирическое (фактически наблюдаемое) значение трудоёмкости изделия в i-ом наблюдении.

Эмпирические значения трудоёмкости изделия «Корпус» представлены в табл. 1. $\hat{Y} = \hat{A} + \hat{B}X$ – расчётное значение трудоёмкости изделия.

С помощью метода наименьших квадратов для изделия «Корпус» получены следующие значения коэффициентов: $\hat{A} \approx 2{,}78$ и $\hat{B} = -0{,}13$. Эмпирические и расчётные значения натурального логарифма трудоёмкости изделия «Корпус» представлены на рис. 1.

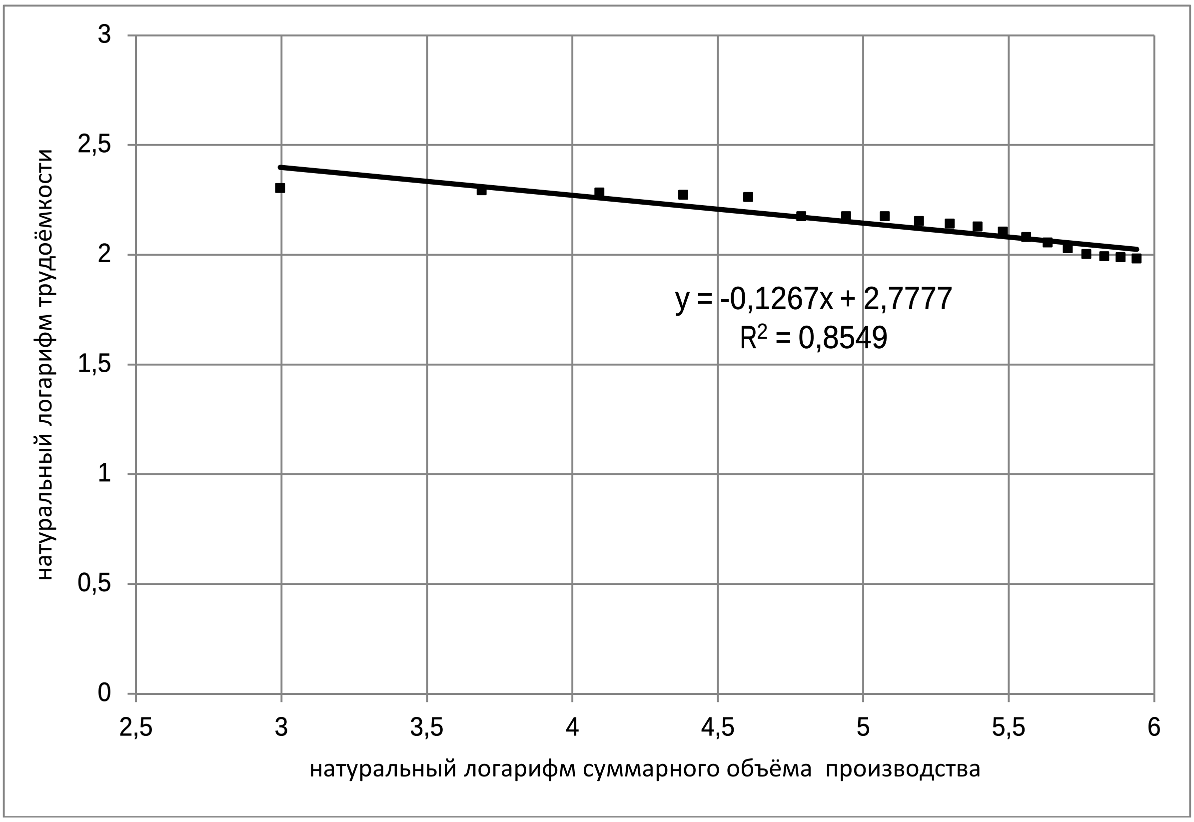

Рис. 1. Эмпирические и расчётные значения натурального логарифма трудоёмкости изделия «Корпус»

Для оценки качества полученной зависимости рассчитывается коэффициент детерминации R^2:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \approx 0{,}85 .$$

С помощью коэффициента детерминации R^2 проверим значимость построенной модели. Для этого выдвинем основную и конкурирующую гипотезы:

$$\begin{cases} H_0 : R^2 = 0, \\ H_0 : R^2 \neq 0. \end{cases}$$

Если основная гипотеза верна, то статистика:

$$F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}$$

имеет распределение Фишера с $k_1=m$ и $k_2=n-m-1$ числами степеней свободы, где m – число переменных в регрессионной модели, а n – объём выборки.

Основная гипотеза проверяется с помощью табличного значения *F*-критерия Фишера. Если наблюдаемое значение больше табличного, то основная гипотеза отвергается при заданном уровне значимости α, принимается конкурирующая гипотеза и, следовательно, построенная регрессионная модель значима [7]. В противном случае принимается основная гипотеза и построенная регрессионная модель незначима.

При уровне значимости $a = 0{,}01$ получены следующие значения *F*-критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{0{,}85 \cdot (19-2)}{1-0{,}85} \approx 100{,}2 ,$$

$$F_{кр}(0{,}01; 1; 17) \approx 8{,}4 .$$

Так как наблюдаемое значение критерия Фишера больше табличного $F_{набл} > F_{кр}$, то основная гипотеза о незначимости полученной регрессионной модели отвергается, и построенная регрессионная модель значима.

С учётом (9) находятся параметры эконометрической модели (2) для трудоёмкости изделия «Корпус» $a = e^{2,78} \approx 16,08$, $g = \hat{B} \approx 0,13$. Таким образом, динамика изменения трудоёмкости изделия «Корпус» от суммарного объёма производства описывается следующей эконометрической моделью:

$$t_t = 16,08 x_t^{-0,13}. \quad (10)$$

С учётом (10) критерий принятия управленческого решения запишется в виде:

$$J = \sum_{t=1}^{n} 16,08 x_t^{-0,13} u_t \to \min. \quad (11)$$

Для решения сформулированной задачи (3)-(7), (11) применяется метод динамического программирования Беллмана [8]. С использованием данного метода поставленная задача решена для следующих данных: суммарный объём производства изделия «Корпус» за год R=240 комплектов, количество временных периодов n = 12, $x_0 = 1$, максимальная производственная мощность $Q^{\max} = 40$ комплектов, объём производства в каждый период должен быть кратен 10.

Оптимальная траектория суммарного объёма производства изделия «Корпус» приведена на рис. 2. Минимальные суммарные трудовые затраты для оптимальной траектории составили 2261,63 н/ч. Суммарные трудовые затраты при равномерном производстве равны 2305,17 н/ч.

Из анализа рис. 2 видно, что оптимальной стратегией являются небольшие объёмы производства в начальные периоды, а затем по мере уменьшения трудоёмкости изделия – увеличение объёмов производства в последних временных периодах.

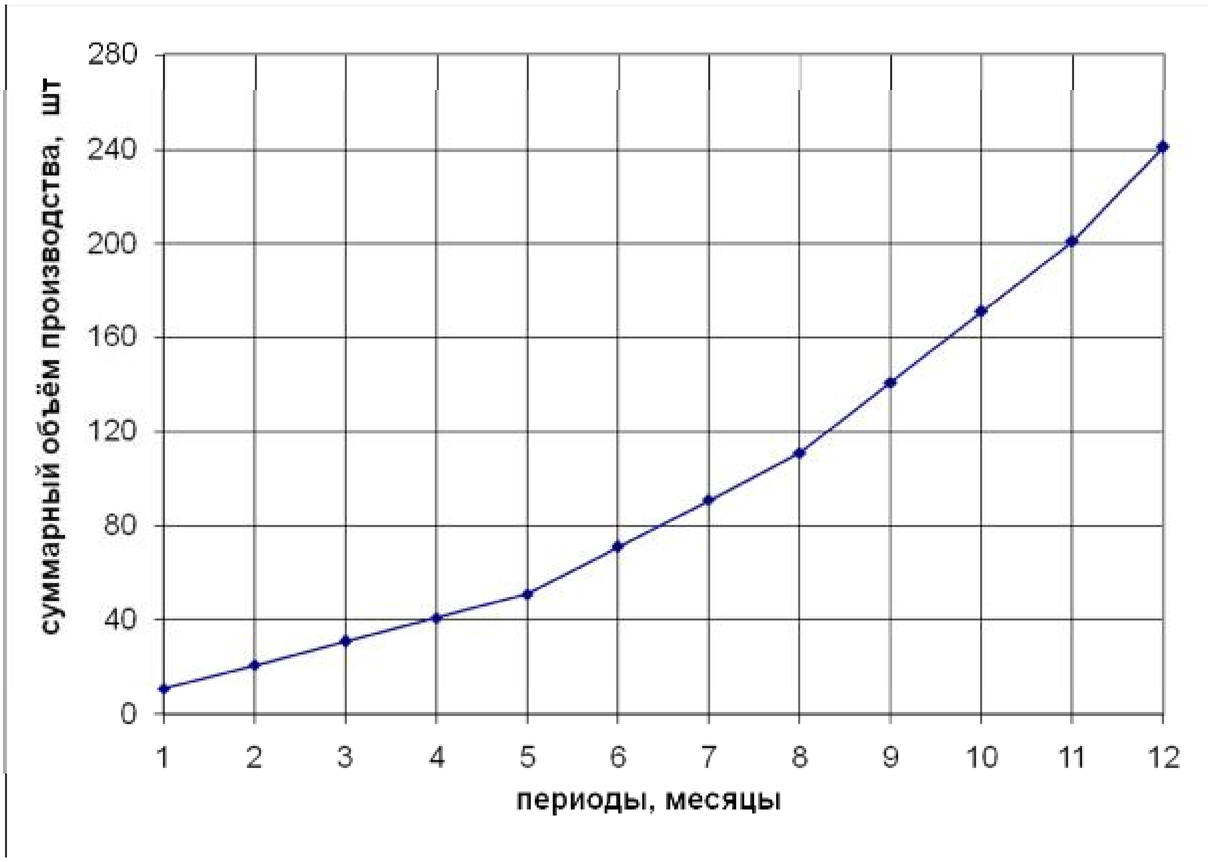

Рис. 2. Оптимальная траектория суммарного объёма производства изделия «Корпус»

Заключение

Представлена математическая модель принятия оптимального решения по определению объёмов производства на этапе освоения нового изделия, характеризующегося динамическим снижением трудоёмкости. Проблема формулируется как задача оптимального управления дискретной системой. Задача заключается в поиске оптимального распределения объёмов производства по временным периодам при заданном времени и заданном суммарном объёме производства с целью минимизации затрат за весь период освоения нового изделия.

На примере предприятия ОАО «Салют» построена эконометрическая модель трудоёмкости нового изделия «Корпус». С помощью динамического программирования Беллмана найдено оптимальное распределение объёмов производства изделия «Корпус» по временным периодам.

В результате исследования сделан следующий вывод: оптимальной стратегией является постепенное увеличение объёмов производства в более поздние временные периоды по мере снижения трудоёмкости изделия.

Библиографический список

1. Новиков, Д.А. Модели обучения в процессе работы [Текст] / Д.А. Новиков // Управление большими системами. 1997. № 19. С. 5-22.

2. Организация производства и управление предприятием [Текст]/ под ред. О.Г. Туровца. – М.: Инфра-М, 2004.

3. Новицкий, Н.И. Организация производства на предприятиях [Текст]/ Н.И. Новицкий. – М.: Финансы и статистика, 2001.

4. Пиндайк, Р. Микроэкономика [Текст]/ Р. Пиндайк, Д. Рубинфельд. – М.: Дело, 2001.

5. Павлов, О.В. Динамическая задача оптимального распределения объёмов работ по периодам проекта [Текст]/ О.В. Павлов // Экономические науки. - 2011. - № 4 (77). - С. 274-279.

6. Эконометрика [Текст]/ [В.С. Мхитарян и др.]. – М.: Проспект, 2010.

7. Айвазян, С.А. Эконометрика [Текст]/ С.А. Айвазян, С.С. Иванова. – М.: МФПА, 2010.

8. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст]/ Р. Беллман. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

NUMERICAL SOLUTION OF A PRODUCTION PLANNING PROBLEM IN CASE OF DYNAMIC LABOR INPUT REDUCTION

©2012 O. V. Pavlov, T. N. Ryasnaya

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The production planning problem in case of dynamic labor in putreduction is defined and solved. The problem is considered as an optimal discreet system management problem. The numerical solution is found using the Bellman's optimality principle of dynamic programming.

Development of a new product, dynamiclabor input reduction, optimal production volumes, Bellman's dynamic programming.

Информация об авторах

Павлов Олег Валерьевич, кандидат технических наук, доцент, декан факультета экономики и управления, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет).
E-mail: pavlov@ssau.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

Рясная Татьяна Николаевна, ассистент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: riasnaiatatiana@yandex.ru. Область научных интересов: управление социально-экономическими системами.

Pavlov Oleg Valerievich, candidate of science, Dean of the faculty of economics and management, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: pavlov@ssau.ru. Area of research: management of social and economic systems.

Ryasnaya Tatiana Nikolaevna, assistant of the engineering department, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: riasnaiatatiana@yandex.ru. Area of research: management of social and economic systems.