ББК 65.422
УДК 519.872.8, 339.1, 658

ВЫБОР ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВХОДНОГО ПОТОКА ЗАЯВОК ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТОРГОВОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

© 2012 В. М. Дуплякин, Ю. В. Княжева

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Исследуются системы массового обслуживания (СМО) торгового предприятия в условиях нестационарности. Изложены результаты анализа влияния закона распределения входного потока заявок на статистические характеристики выходных параметров системы, а именно на прибыль и на очередь СМО.

Система массового обслуживания, нестационарность, закон распределения, очередь, прибыль, торговое предприятие.

Эффективным методом решения задач теории массового обслуживания, как и многих других, не имеющих аналитического решения, является метод статистического моделирования, предусматривающий имитацию на ЭВМ процессов, протекающих в исследуемой системе. Математическое описание процесса в этом случае, как правило, задается описанием алгоритма процедуры расчёта. Моделирующий алгоритм многократно воспроизводит изучаемый случайный процесс, накапливает сведения о его динамике и после обработки обеспечивает оценку показателей работы системы [1].

Известные аналитические решения задач массового обслуживания, широко используемые на практике, описывают стационарный период работы системы и построены исключительно с использованием пуассоновского потока событий. Необходимость анализа вида закона распределения входного потока заявок и продолжительности переходных периодов во многих случаях определяется тем, что последние могут составлять существенную часть рабочего периода системы, а закон распределения входного потока заявок может оказывать существенное влияние на статистические характеристики выходных параметров системы массового обслуживания. Поэтому, не учитывая период нестационарности и влияние вида закона распределения входного потока заявок, невозможно оптимизировать рабочие характеристики системы в целом.

Как следствие, актуальность данной темы исследования обусловлена необходимостью разработки инструментальных средств моделирования, анализа и оптимизации нестационарных систем массового обслуживания, обеспечивающих повышение их эффективности с учётом реальных условий функционирования.

В качестве объекта исследования далее рассматривается торговое предприятие – магазин самообслуживания. Изучение системы массового обслуживания начинается с анализа входящего потока требований. Входящий поток требований представляет собой совокупность заявок, которые поступают в систему и нуждаются в обслуживании. Входящий поток требований изучается с целью выявления его закономерностей и дальнейшего улучшения качества обслуживания [2].

В теории массового обслуживания, как правило, определяется, что заявки поступают в систему согласно экспоненциальному закону с интенсивностью входного потока заявок λ, не зависящей от времени t. Промежуток времени между поступлениями заявок x есть непрерывная случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром

$l > 0$. x принимает только неотрицательные значения, а её плотность $f_x(x)$ и функция распределения $F_x(x)$ имеют вид:

$$f_x(x) = \begin{cases} l e^{-lx}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-lx}, & x > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где l – интенсивность входного потока, чел/ч.

$$M_x = \frac{1}{l}, \quad (3)$$

где M_x – математическое ожидание случайной величины x.

$$D_x = \frac{1}{l^2}, \quad (4)$$

где D_x – дисперсия случайной величины x.

$$l = \frac{1}{M_x}. \quad (5)$$

На практике интенсивность входного потока торгового предприятия не является постоянной величиной, а меняется в течение дня, недели, месяца. Эти изменения связаны с периодом поступления денежных средств, например получение заработной платы, а в течение года - с сезонными колебаниями [3]. В данной работе рассмотрены изменения интенсивности в течение дня и её зависимость от дня недели.

Для исследования интенсивности входного потока собрана статистическая информация, отражающая изменение интенсивности потока покупателей в течение дня $y_1, y_2, \mathbf{K}, y_N$ и по дням недели для конкретного торгового предприятия. Время изменяется от 0 до 24 часов: $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_N$, $N = 25$.

Аппроксимация полученных статистических данных осуществляется при помощи интерполяционного кубического сплайна *S(x)* кусочно-полиномиальной формы с заданием краевых условий, т.е. на каждом участке $[x_j, x_{j+1}]$ с номером *j* приближающая функция *S(x)* представляется в виде полинома:

$$P_j(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(j)} (x - x_j)^i, (k - 1 = 3). (6)$$

Краевые условия заключаются в условии периодичности, т.е. в совпадении значений первой и второй производных на границах промежутка $[x_1, x_N]$.

Построение сплайна сводится к определению множества коэффициентов a_i^j посредством решения систем линейных уравнений. Интерполяционный сплайн *S(x)* строится таким образом, чтобы для таблично заданной функции *y* выполнялось условие интерполяции [4]:

$$S(x_i) = y(x_i), \; i = 1, \mathbf{K}, N.$$

Для получения зависимости интенсивности входного потока от времени при определённой средней интенсивности $\overline{l}$ необходимо полученный сплайн *S(x)* умножить на требуемую среднюю интенсивность и поделить его на среднее значение самого сплайна $\overline{S}(x)$. Вся процедура аппроксимации реализуется с помощью программы «Оптимизация деятельности торгового предприятия» [5] в среде Matlab 7.12.

При моделировании СМО торгового предприятия также следует учитывать влияние вида закона распределения входного потока заявок на статистические характеристики выходных параметров системы. Так как главным критерием рентабельности СМО торгового предприятия является прибыль [6], то, в первую очередь, необходимо рассматривать влияние вида закона распределения входного потока заявок именно на прибыль. Для анализа данного влияния исследуются статистические функции распределения прибыли для различных законов и при различных интенсивностях входного потока покупателей.

В дополнение к экспоненциальному закону, описанному выше (1 - 4), далее рассматриваются характеристики закона Пуассона, нормального и равномерного законов. Если законом распределения входного потока является закон Пуассона, то промежуток времени между поступлениями заявок x – непрерывная случайная величина и имеет распределение Пуассона с параметром $l > 0$. x принимает только неотрицательные значения, а её плотность $f_x(x)$ и функция распределения $F_x(x)$ имеют вид:

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{l^k e^{-l}}{k!}, x \ge 0, \\ 0, \qquad x < 0; \end{cases} \quad k \in \{0, 1, 2, \mathbf{K}\}. \qquad (7)$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, \qquad x \le 0, \\ \dfrac{\Gamma(k+1, l)}{k!}, \ x > 0; \end{cases} \qquad (8)$$

где l – интенсивность входного потока, чел/час.

$$M_x = l, \qquad (9)$$

где M_x – математическое ожидание случайной величины x.

$$D_x = l, \qquad (10)$$

где D_x – дисперсия случайной величины x.

Если входной поток имеет нормальное распределение, то промежуток времени между поступлениями заявок x – непрерывная случайная величина, распределённая согласно нормальному закону с параметрами M_x и s_x. Плотность $f_x(x)$ и функция распределения $F_x(x)$ случайной величины x имеют вид:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps_x^2}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2s_x^2}}, \qquad (11)$$

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps_x^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-M_x)^2}{2s_x^2}} dt, \qquad (12)$$

где M_x – математическое ожидание случайной величины x, s_x – среднеквадратическое отклонение случайной величины x.

$$D_x = s_x^2, \qquad (13)$$

где D_x – дисперсия случайной величины x.

Если закон распределения входного потока равномерный, то промежуток времени между поступлениями заявок x – непрерывная случайная величина, которая имеет равномерное распределение на отрезке $[a_x, b_x]$. a_x и b_x для торгового предприятия – это соответственно время открытия и время закрытия магазина в течение дня. Плотность $f_x(x)$ и функция распределения $F_x(x)$ случайной величины x имеют вид:

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & при \ x < a_x, \\ \dfrac{1}{b_x - a_x} & при \ a_x \le x \le b_x, \\ 0 & при \ x > b_x; \end{cases} \qquad (14)$$

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & при \ x < a_x, \\ \dfrac{x - a_x}{b_x - a_x} & при \ a_x \le x \le b_x, \\ 1 & при \ x > b_x. \end{cases} \qquad (15)$$

$$M_x = \frac{b_x + a_x}{2}, \qquad (16)$$

где M_x – математическое ожидание случайной величины x.

$$D_x = \frac{(b_x - a_x)^2}{12}, \qquad (17)$$

где D_x – дисперсия случайной величины x.

Следует отметить, что для любого вида закона распределения входного потока и время обслуживания заявки y, и максимальное время ожидания заявки в очереди q – непрерывные случайные величины с параметром $m > 0$ и $n > 0$ соответственно, которые имеют распределение, аналогичное распределению времени поступления заявок x. Для получения функции распределения прибыли торгового предприятия необходимо провести определённое количество численных экспериментов, чтобы обеспечить нужную точность результатов. Предполагая, что закон распределения прибыли торгового предприятия близок к нормальному, воспользуемся методикой определения объёма выборки *n*, описанной в [7].

$$n = (1-e)c^2 + 1, \qquad (18)$$

где *n* – объём выборки; *ε* – относительная погрешность; χ^2 – критерий Пирсона.

Значения c^2 берутся по таблицам Пирсона в зависимости от $r = (n-1)$ и $p_1 = \frac{1-b}{2}$, где *β* – доверительная вероятность. Предлагается принять *β*=0,95, *ε*=0,05.

Функция распределения прибыли торгового предприятия имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2ps^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}, \qquad (19)$$

где *μ* – математическое ожидание прибыли; *σ* – среднеквадратическое отклонение прибыли. Математическое ожидание сходится быстрее, чем дисперсия, следовательно, определять требуемый объём выборки предлагается по дисперсии. Поскольку методика определения необходимого объёма выборки *n* по дисперсии [7] не зависит от закона распределения входных параметров, то рассчитанное число экспериментов также не будет зависеть от изменения законов распределения входных параметров СМО торгового предприятия. Чтобы получить требуемую точность, объём выборки *n* должен быть не меньше 3000. Для построения статистических функций распределения прибыли используется три уровня средней интенсивности входного потока $\overline{l}$: низкий, средний и высокий. Низкий уровень $\overline{l}$ соответствует 10%-му значению коэффициента загрузки одной кассы, средний уровень $\overline{l}$ – 50%-му, высокий уровень $\overline{l}$ – 120%-му. Коэффициент загрузки $K_з$ вычисляется по формуле [8]:

$$K_з = \frac{\overline{l}}{n \cdot \overline{m}} \cdot 100\%, \qquad (20)$$

где $\overline{l}$ – средняя интенсивность входного потока заявок, $\overline{m}$ – средняя интенсивность потока обслуживания заявок, *n* – количество обслуживающих элементов (касс).

Проведя численные эксперименты *n* раз, получаем следующие статистические функции распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при различных $\overline{l}$ (рис. 1 - 3). Как только СМО начинает «забиваться» заявками влияние закона распределения входного потока на выходные характеристики системы становится максимальным. С ростом значения коэффициента загрузки (20) математические ожидания прибыли, полученные при разных законах и одинаковых интенсивностях входного потока, существенно отличаются. Кривые функций распределения прибыли не пересекаются в одной точке при вероятности, равной 0,5 (рис. 2, 3). К такому же результату приводит изменение (увеличение) дисперсии в параметрах законов распределения входного потока заявок.

В законе Пуассона (7 - 10) и в экспоненциальном законе (1 - 4) задаётся только математическое ожидание, т.к. они являются однопараметрическими и поэтому для них невозможно задать дисперсию. Равномерный (14 - 17) и нормальный (11 - 13) законы являются двухпараметрическими, в них задаётся математическое ожидание и дисперсия и поэтому встаёт вопрос о величине дисперсии. Оценивать влияние дисперсии входных параметров закона распределения входного потока заявок будем по коэффициенту вариации этих параметров при условии, что изменение значения коэффициента вариации осуществляется только за счёт изменения значения дисперсии. Коэффициент вариации *V* представляет собой относительную меру рассеивания, выраженную в процентах [9]:

$$V = \frac{s}{m} \cdot 100\%, \qquad (21)$$

где σ – среднее квадратичное отклонение; *μ* – математическое ожидание.

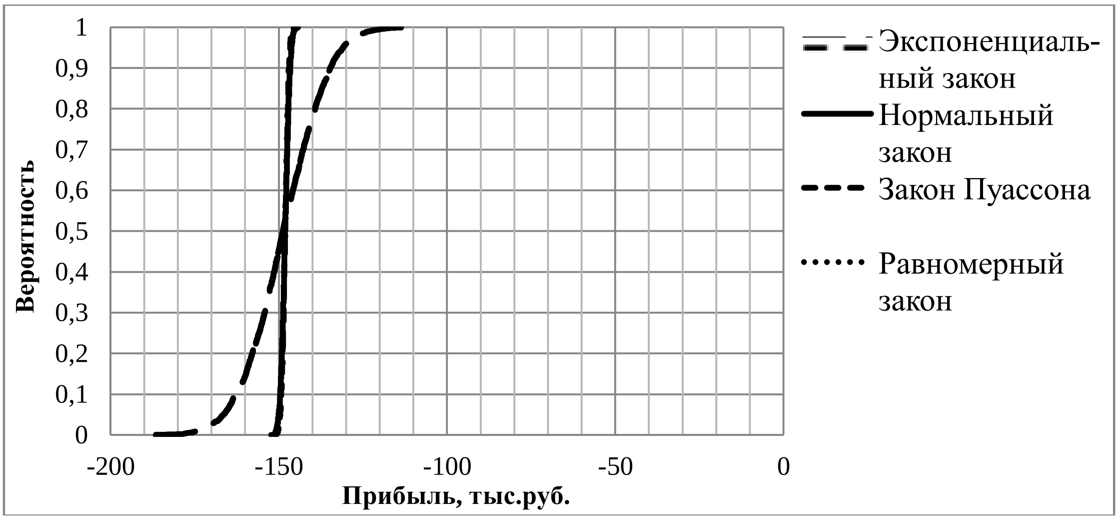

Рис. 1. График статистических функций распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при низкой $\overline{l}$ (все законы кроме экспоненциального дают одинаковые результаты)

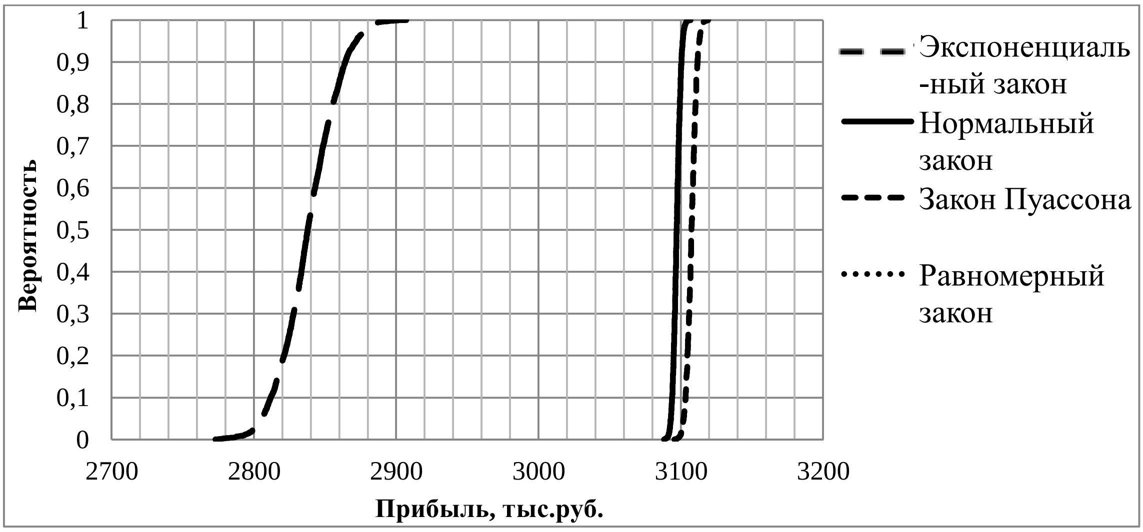

Рис. 2. График статистических функций распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при средней $\overline{l}$ (нормальный и равномерный законы дают одинаковые результаты)

На рис. 4 представлен график статистических функций распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при низкой $\overline{l}$ и при коэффициенте вариации входных параметров нормального и равномерного законов, равном 1. На рис. 1 представлен аналогичный график, но коэффициент вариации входных параметров нормального и равномерного законов равен 0,1. Сравнение рис. 4 и 1 позволяет сделать вывод: чем больше коэффициент вариации для входных параметров закона распределения входного потока, тем сильнее отличаются математические ожидания прибыли, полученные для разных законов входного потока при одинаковых $\overline{l}$.

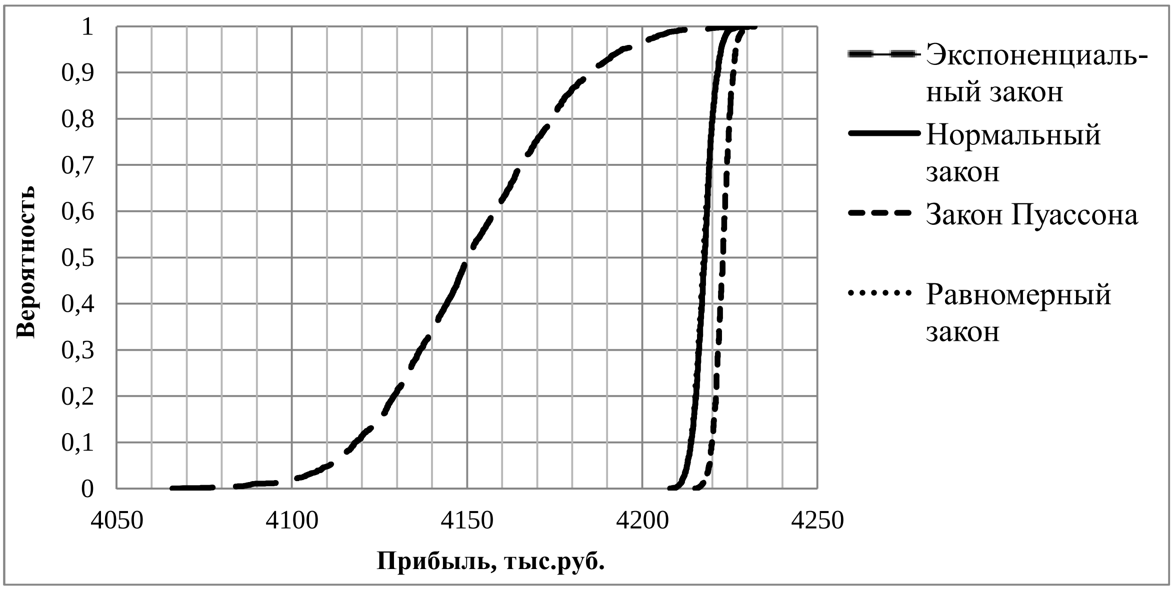

Рис. 3. График статистических функций распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при высокой $\overline{l}$ *(нормальный и равномерный законы дают одинаковые результаты)*

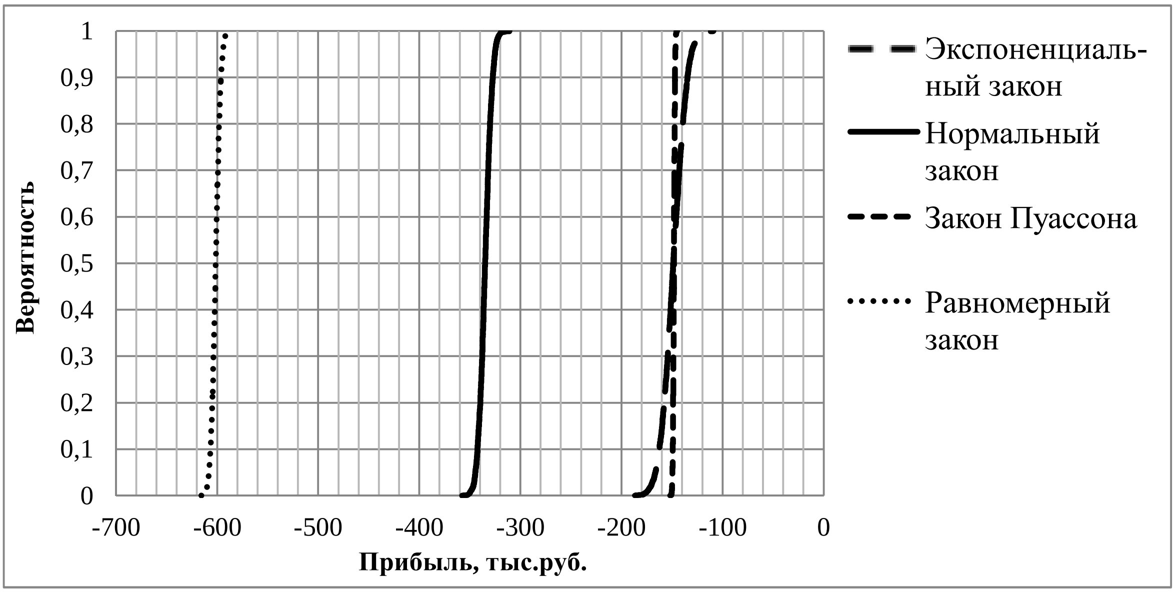

Рис. 4. График статистических функций распределения прибыли торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при низкой $\overline{l}$, $V = 1$

Экспоненциальный закон даёт наибольшее рассеивание выходных данных (прибыли) при любых значениях интенсивности входного потока, т.к. кривые статистических функций распределения прибыли, полученные при экспоненциальном законе входного потока заявок, имеют наибольший наклон (рис. 1 - 3).

Дисперсия функции распределения прибыли - это мера рассеивания, показывающая степень неопределённости СМО (скачки прибыли). Согласно полученным данным (рис. 1 - 3), нормальный и равномерный законы входного потока заявок обеспечивают наиболее стабильный результат получения прибыли. Немаловажное влияние на динамику очереди СМО торгового предприятия оказывает вид закона входного потока заявок. Как только система начинает «забиваться» заявками, т.е. растёт значение коэффициента загрузки (20), то темп роста очереди резко увеличивается (угол наклона графика очереди к оси абсцисс резко увеличивается) для всех видов закона распределения входного потока (рис. 5). Однако при экспоненциальном законе распределения входного потока темп роста очереди увеличивается медленнее, чем при остальных законах.

Только при одном значении коэффициента загрузки $K_з = 40\%$ кривые функций распределения очереди для всех законов входного потока пересекаются в одной точке с вероятностью 0,5 (рис. 6).

При значениях $K_з < 40\%$ экспоненциальный закон входного потока выдаёт значения длины очереди большие, чем остальные законы (рис. 7), а при $K_з > 40\%$ – существенно меньшие, чем остальные (рис. 8).

Начиная со значения $K_з = 40\%$ значение темпа роста очереди резко увеличивается (рис. 5).

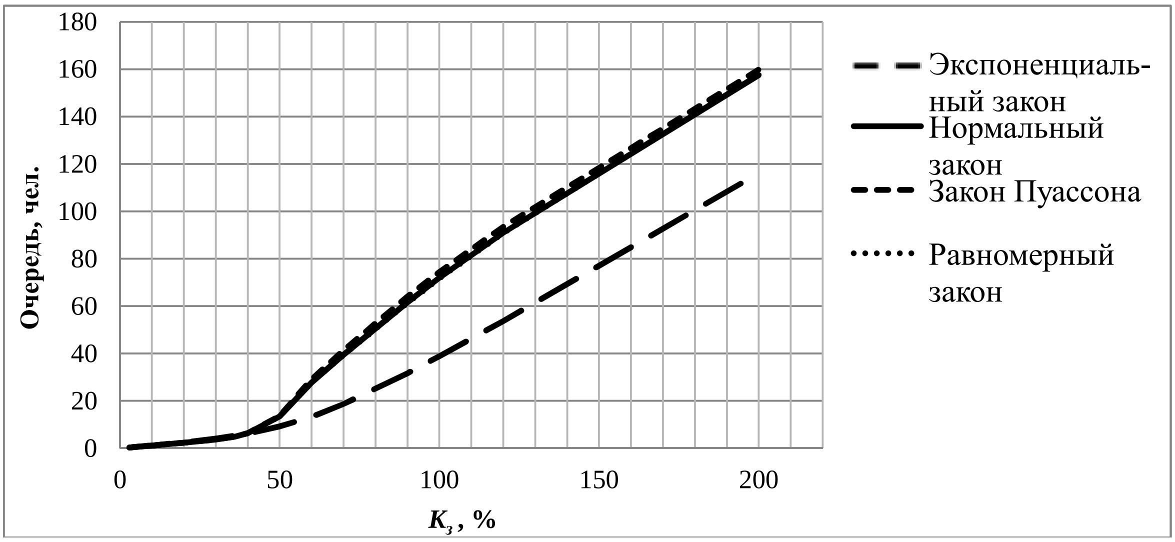

Рис. 5. Динамика очереди для различных законов распределения входного потока (нормальный и равномерный законы дают одинаковые результаты)

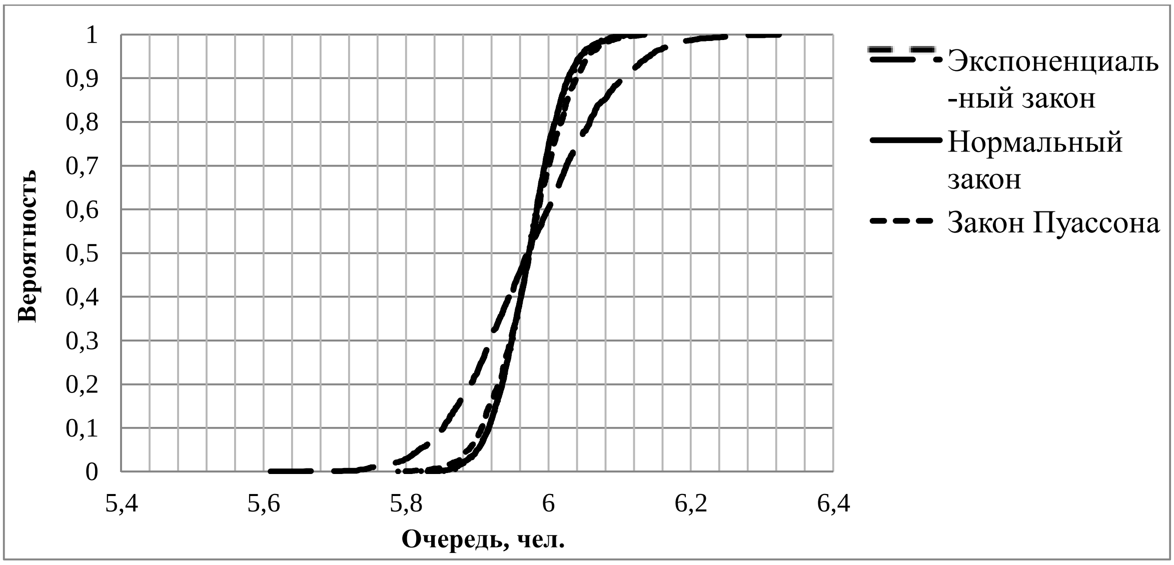

Рис. 6. График статистических функций распределения очереди торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при $K_з = 40\%$ (нормальный и равномерный законы дают одинаковые результаты)

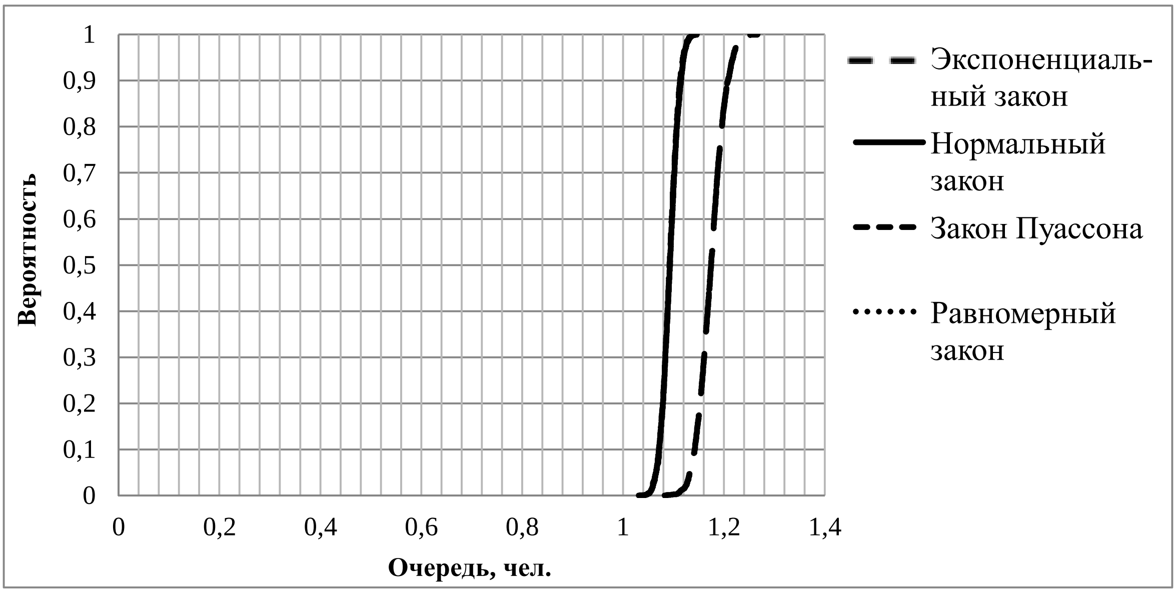

Рис. 7. График статистических функций распределения очереди торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при $K_з = 10\%$
(все законы кроме экспоненциального дают одинаковые результаты)

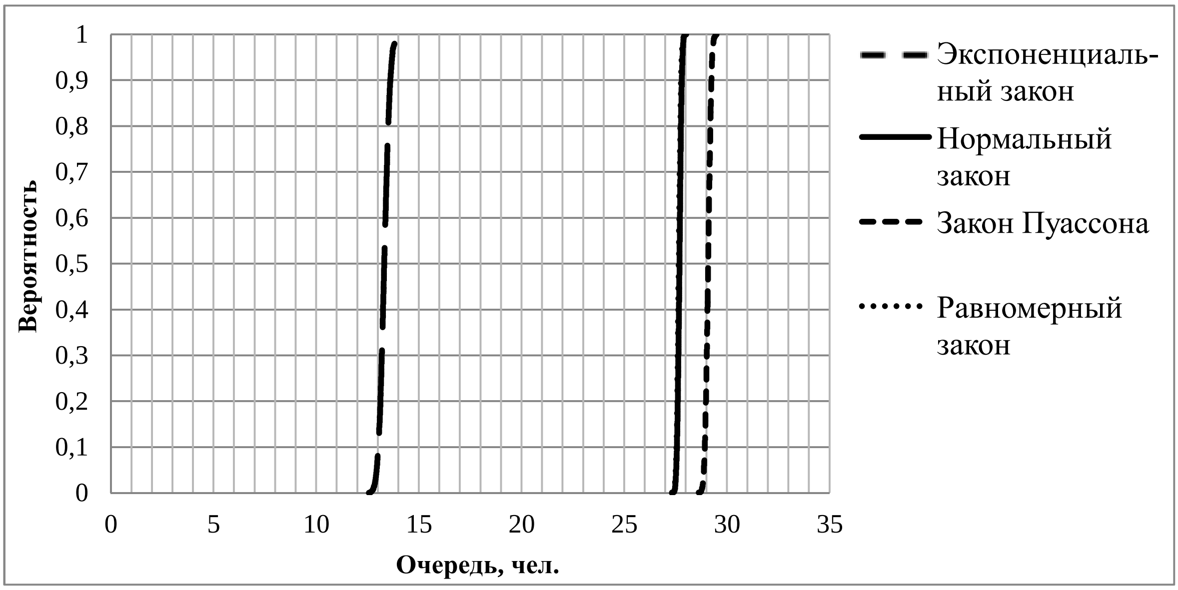

Рис. 8. График статистических функций распределения очереди торгового предприятия для различных законов распределения входного потока при $K_з = 60\%$
(нормальный и равномерный законы дают одинаковые результаты)

Заключение

Выявлены особенности использования различных законов распределения входного потока заявок системы массового обслуживания в плане влияния на статистические характеристики распределения длины очередей и прибыли торгового предприятия.

Библиографический список

1. Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами [Текст]/ П.Д. Шимко. – М.: Дело, 2004.

2. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст]/Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: КомКнига, 2005.

3. Снегирева В. Розничный магазин. Управление ассортиментом по товарным категориям [Текст]/ В. Снегирева – СПб.: Питер, 2007.

4. Ануфриев, И.Е. MATLAB 7 [Текст]/ И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.

5. Оптимизация деятельности торгового предприятия, Национальный информационный фонд неопубликованных документов, Отраслевой Фонд Алгоритмов и Программ, № гос. регистрации: 50200801789.

6. Федосеев, В.В. Экономико - математические методы и прикладные модели [Текст]/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов. – М.: ЮНИТИ, 1999.

7. Дуплякин, В.М. Статистический анализ выборочных данных [Текст]/ В.М. Дуплякин. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2010.

8. Лабскер, Л.Г. Теория массового обслуживания в экономической сфере [Текст]/ Л.Г. Лабскер, Л.О. Бабешко. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998.

9. Венцель, Е.С. Теория случайных процессов и её инженерные приложения [Текст]/ Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000.

CHOOSING THE LAW OF DISTRIBUTING REQUEST INPUT FLOW IN THE MODELING OF A TRADE ENTERPRISE QUEUING SYSTEM

© 2012 V. M. Duplyakin, Yu. V. Knyazheva

Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The paper is devoted to the research of queuing systems (QS) of a trade enterprise in nonstationary conditions. The results of analyzing the influence of the request input flow distribution on the statistical characteristics of the system's output parameters, namely, on the profit and the queue of the QS are outlined.

Queuing system, nonstationarity, distribution law, queue, profit, trade enterprise.

Информация об авторах

Дуплякин Вячеслав Митрофанович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры экономики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: v.duplyakin@gmail.com. Область научных интересов: математические и инструментальные методы экономики, статистическое имитационное моделирование.

Княжева Юлия Владимировна, аспирант, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: julia_skr_2008@mail.ru. Область научных интересов: математические и инструментальные методы экономики, статистическое имитационное моделирование.

Duplyakin Vyacheslav Mitrofanovich, Dr. Sc. (Tech), professor of the department of economics, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: v.duplyakin@gmail.com. Area of research: mathematical and instrumental methods in economics, statistical simulation.

Knyazheva Yulia Vladimirovna, postgraduate student, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: julia_skr_2008@mail.ru. Area of research: mathematical and instrumental methods in economics, statistical simulation.