ББК 65.422
УДК 338

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН МОНОПОЛИСТА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ЕДИНОЙ ЦЕНЫ К ЦЕНОВОЙ ДИСКРИМИНАЦИИ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

© 2012 С. А. Болочев[1], А. Ю. Ситникова[2]

[1]Астраханский государственный университет
[2]Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

В статье предложена экономико-математическая модель, позволяющая выявлять направления изменения цен при переходе фирмы-монополиста от ценообразования на основе единой цены к практике ценовой дискриминации третьей степени на двух независимых рынках конечной продукции. Практическая реализация модели предполагает применение авторского алгоритма выявления функциональной зависимости на основе спектрального анализа.

*Ценообразование, ценовая дискриминация, монополия, спектральный анализ, функция, цифровая фильтрация, гармоника.*

**Введение.** В настоящее время в практику ценообразования значительного числа отечественных и зарубежных фирм, осуществляющих свою деятельность на рынках как конечных, так и промежуточных товаров, прочно вошли механизмы, в основе которых в той или иной степени лежат принципы дискриминации.

В ряде стран, в том числе и в России, подобные механизмы ценообразования являются объектом антимонопольного регулирования. Интерес со стороны антимонопольных структур к подобной практике обусловлен изменениями положения участников рынка и эффективности распределения ресурсов на нём. При этом в большинстве стран данные механизмы расцениваются как оказывающие негативное влияние на благосостояние потребителей и поэтому относятся к злоупотреблению хозяйствующим субъектом доминирующим положением.

При этом не учитывается тот факт, что в ряде случаев ценообразование на основе дискриминации способствует повышению общего благосостояния участников рынка. В некоторых случаях будет иметь место Парето-улучшение, например, если в результате дискриминации начнут функционировать рынки, не обслуживающиеся фирмой в условиях единого ценообразования. В этой ситуации запрет на осуществление ценовой дискриминации приведёт к тому, что часть потребителей (как правило, менее платежеспособных, а значит и менее социально защищённых) лишится возможности приобретения данного товара.

Важным этапом определения допустимости дискриминационной практики в сфере ценообразования является необходимость выявления направления изменения цен при переходе от единого ценообразования к дискриминации третьей степени. Данное обстоятельство обусловлено тем фактом, что переход к ценовой дискриминации, помимо наиболее вероятной ситуации разнонаправленного движения цен на разделённых рынках, может способствовать их изменению в одном направлении.

Однонаправленное движение цен (как правило, повышение) при переходе к дискриминационной практике может иметь место на рынке промежуточных товаров, что обусловлено наличием специфических характеристик данного типа рынков по сравнению с рынком конечных товаров. Подобный вывод можно встретить в работе М. Каца [1]. В то же время возможность подобного результата на рынке конечных товаров в случае осуществления ценовой дискриминации третьей степени представляется весьма парадоксальной. Так, согласно Джерри Хосману и Джефри Мэки-Мэйсону «если предельные издержки постоянны, то с больше чем одним рынком, обслуживаемым при едином ценообразовании, по крайней мере, одна дискриминационная цена должна быть выше единой цены» [2]. И всё же, такая возможность существует. Вывод о возможности однонаправленного движения цен при переходе к политике ценовой дискриминации можно найти в весьма плодотворной, но редко цитируемой в литературе по проблемам ценовой дискриминации работе Василия Леонтьева [3]. Он не только показал, что ценовая дискриминация может или повысить, или понизить цены на обоих рынках, если предельные издержки сокращаются (ситуацию с сокращающимися предельными издержками можно встретить ещё у Дж. Робинсон [4], Дж. Хосмана и Дж. Мэки-Мэйсона [2], а также в более поздней работе Стефана Лейсона [5]), но и то, что подобный результат может иметь место при постоянных предельных издержках, если одна из рыночных функций дохода имеет множество локальных максимумов.

Позднее данное положение получило развитие в работе Бабу Нахата, Крзыштофа Остачевски и Саху, где на примере фирмы с постоянными предельными издержками, действующей на двух независимых рынках, была показана возможность однонаправленного движения цен [6]. В своём анализе Б. Нахата и др. не ограничивали функции спроса строгой вогнутостью или строгой выпуклостью, предполагая лишь, что они являются непрерывными и дважды дифференцируемыми с отрицательным наклоном на всей области цен. Функция прибыли также не ограничивается строгой вогнутостью или выпуклостью, а кривая предельного дохода не должна быть строго непрерывно сокращающейся.

Используемые ими полиноминальные функции спроса, являясь более общим классом функций, позволяют обеспечить аналитическую основу для анализа других типов функций спроса, где подобные выводы сохраняются [6].

На рис. 1 при $p^0$ функция прибыли фирмы-монополиста на первом рынке является убывающей ($p_1'\left(p^0\right) < 0$), а на втором рынке, независимом от первого, – возрастающей ($p_2'\left(p^0\right) > 0$). Если при этом функции прибыли на обоих рынках являются вогнутыми, то обычной будет ситуация, когда $p_1^* < p^0 < p_2^*$. Можно отметить, что Нахата и др. под вогнутой функцией подразумевают функцию, обращённую выпуклостью вверх. Если, однако, функция прибыли второго рынка имеет локальный максимум, тогда возможно, что $p_1^* < p^0$ и $p_2^* < p^0$ (как справа на рис. 1) или $p_1^* > p^0$ и $p_2^* > p^0$, что Б. Нахата и др. и продемонстрировали на конкретном примере.

Хотя Б. Нахата и др. показали, что ценовая дискриминация может как снизить цены на обоих рынках, так и повысить их, условий, способствующих движению цен в одном направлении, они не рассматривали. Данный момент получил отражение в работе Патрика Деграбы, показавшего, что источником снижения или повышения цен на обоих рынках может служить достаточное замещение или утечка между этими двумя рынками [7].

Таким образом, направление движения цен в условиях перехода от единого ценообразования к дискриминационной практике будет определяться формой кривых прибыли фирмы-монополиста на рассматриваемых рынках.

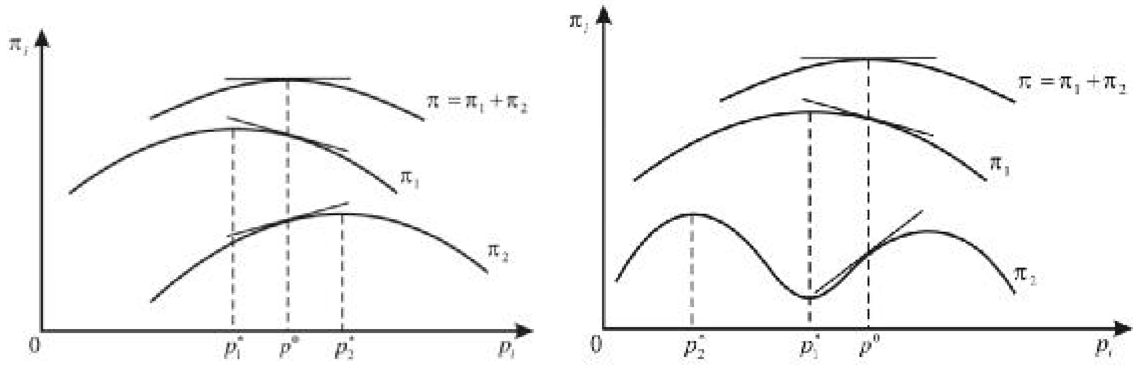


*Рис. 1. Ситуация разнонаправленного движения цен при переходе к ценовой дискриминации третьей степени (слева); ситуация однонаправленного движения цен при переходе к ценовой дискриминации третьей степени (справа)*

На данном этапе можно сформулировать определённый вывод относительно влияния дискриминационной практики на общественное благосостояние. Так, если в результате перехода к практике ценообразования на основе дискриминации третьей степени на независимых рынках цены на обоих рынках снизятся и при этом произойдет увеличение продаж на этих рынках, то будет наблюдаться увеличение излишков потребителей и излишка фирмы-монополиста (иначе не имел бы место переход к дискриминационной практике) и, как результат, переход к эффективному по Парето состоянию рынка. Другими словами, будет иметь место Парето-улучшение. В этой ситуации ценовая дискриминация третьей степени будет предпочтительнее по сравнению с единым ценообразованием и, соответственно, должна быть разрешена.

**Моделирование изменения цены монополиста.** Для выявления условий, определяющих однонаправленное движение цен при переходе от единого ценообразования к дискриминационной практике на двух независимых рынках, в статье предлагается модель, позволяющая не только определить ситуацию однонаправленного движения цен, но и выявить, будут ли они повышаться или снижаться.

Пусть фирма-монополист осуществляет свою деятельность на двух независимых рынках. При этом рынок 1 является сильным рынком, а рынок 2 – слабым. (Следуя терминологии Дж. Робинсон, сильным считается рынок с более эластичным спросом по сравнению с рынком, где спрос является менее эластичным.)

Спрос на первом рынке можно представить следующей функцией:

$$q_1 = q_1(p_1). \qquad (1)$$

Соответственно на втором рынке:

$$q_2 = q_2(p_2). \qquad (2)$$

Выполнение закона спроса гарантирует, что с ростом цены на данном рынке объем спроса на нём будет сокращаться, и наоборот:

$$dq_1(p_1)/dp_1 < 0 \text{ и } dq_2(p_2)/dp_2 < 0.$$

Функцию прибыли монополиста можно представить следующим образом:

$$p(p_1, p_2) = p_1 q_1(p_1) + p_2 q_2(p_2) - TC(q_1(p_1) + q_2(p_2)). \qquad (3)$$

Следуя рассуждениям В. Леонтьева и Р. Шмалензи, можно считать, что фирма-монополист, максимизирующая свою прибыль, в условиях ценовой дискриминации сталкивается с ограничением $p_1 - p_2 \le t$, где $t \ge 0$. Под $t$ можно понимать транспортные издержки, связанные с осуществлением арбитражных операций между рынками. Другими словами, разница в ценах, устанавливаемых на сильном и слабом рынках, должна быть, по крайней мере, не больше издержек, связанных с доставкой единицы товара с одного рынка на другой (с целью её последующей перепродажи). Выполнение данного неравенства гарантирует отсутствие арбитражных операций между рынками.

Итак, фирма-монополист, максимизирующая свою функцию прибыли посредством ценообразования на основе дискриминации третьей степени, сталкивается с ограничивающим условием, представляющим собой необходимость контроля разрыва между назначаемыми на двух рынках ценами с целью ограничения арбитражных операций.

Учитывая данное ограничение, построим функцию Лагранжа:

$$L = p_1 q_1(p_1) + p_2 q_2(p_2) - \\ - TC(q_1(p_1) + q_2(p_2)). \quad (4)$$

где $l > 0$ − число (множитель) Лагранжа.

При $t = 0$ будет иметь место единое ценообразование, т.е. $p_1 = p_2 = p^0$. Пусть $\bar{t}$ обозначает наибольшее значение параметра $t$, для которого ограничение всё ещё сохраняется. При $t > \bar{t}$ $l = 0$ и для $t \le \bar{t}$ $l > 0$. Для $t \le \bar{t}$ условия максимизации прибыли первого порядка можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial p_1} = \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1} - l = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial p_2} = \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2} + l = 0, \quad (5)$$
$$\frac{\partial L}{\partial l} = t - p_1 + p_2 = 0,$$

где $\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1}$ и $\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2}$ − частные производные первого порядка от функции прибыли по $p_1$ и $p_2$:

$$\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1} = p_1 \frac{\partial q_1(p_1)}{\partial p_1} + q_1(p_1)\frac{\partial p_1}{\partial p_1} - TC'\big(q_1(p_1) + q_2(p_2)\big)\frac{\partial q_1(p_1)}{\partial p_1} = \\ = q_1(p_1) + \big(p_1 - TC'\big(q_1(p_1) + q_2(p_2)\big)\big)\frac{\partial q_1(p_1)}{\partial p_1} \quad (6)$$

и

$$\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2} = p_2 \frac{\partial q_2(p_2)}{\partial p_2} + q_2(p_2)\frac{\partial p_2}{\partial p_2} - TC'\big(q_1(p_1) + q_2(p_2)\big)\frac{\partial q_2(p_2)}{\partial p_2} = \\ = q_2(p_2) + \big(p_2 - TC'\big(q_1(p_1) + q_2(p_2)\big)\big)\frac{\partial q_2(p_2)}{\partial p_2}. \quad (7)$$

На данной стадии построения модели можно сделать важный вывод. При едином ценообразовании (при $t = 0$ и $l > 0$):

$$\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1} = l\,,$$

следовательно

$$\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1} > 0\,, \quad \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2} = -l$$

и

$$\frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2} < 0\,.$$

Поскольку уровень монополистической прибыли растёт по мере сокращения $p_2$ и увеличения $p_1$, то, если существует способ наложить ограничение на возможность монополиста повышать $p_1$ (например, устанавливая верхний предел (потолок) цены по однородной монопольной цене, т.е. ограничивая максимальную цену на первом рынке ценой, которая установилась бы на нем при едином ценообразовании), ценовая дискриминация будет иметь своим результатом Парето-улучшение.

Ниже представлено условие максимизации прибыли фирмы-монополиста первого порядка с помощью полной производной функции прибыли:

$$\frac{dp\,(p_1, p_2)}{dp_1} = \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dp_1} + \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dp_1} = \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_1} + \frac{\partial p\,(p_1, p_2)}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dp_1} = 0\,. \quad (8)$$

С учетом того, что $\frac{dp_1}{dp_1}-\frac{dp_2}{dp_1}=0$ и, следовательно, $\frac{dp_2}{dp_1}=1$, получается:

$$\frac{\partial p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1}+\frac{\partial p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2}=0\,. \tag{9}$$

Полный дифференциал условия (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}dp_1+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}dp_2+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}dp_1+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}dp_2 \tag{10}$$

или, после преобразования:

$$\left(\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\right)dp_1+\left(\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\right)dp_2\,, \tag{11}$$

где $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}$ и $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}$ – частные производные второго порядка от функции прибыли по $p_1$ и $p_2$; $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}$ и $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2\partial p_1}$ – смешанные частные производные второго порядка от функции прибыли (причём $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}=\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2\partial p_1}$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}&=2\frac{\partial q_1\left(p_1\right)}{\partial p_1}+\left(p_1-TC'\left(q_1\left(p_1\right)+q_2\left(p_2\right)\right)\right)\frac{\partial q_1^2\left(p_1\right)}{\partial p_1^2}-\\&-TC''\left(q_1\left(p_1\right)+q_2\left(p_2\right)\right)\left(\frac{\partial q_1\left(p_1\right)}{\partial p_1}\right)^2,\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}&=2\frac{\partial q_2\left(p_2\right)}{\partial p_2}+\left(p_2-TC'\left(q_1\left(p_1\right)+q_2\left(p_2\right)\right)\right)\frac{\partial q_2^2\left(p_2\right)}{\partial p_2^2}-\\&-TC''\left(q_1\left(p_1\right)+q_2\left(p_2\right)\right)\left(\frac{\partial q_2\left(p_2\right)}{\partial p_2}\right)^2,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}=-TC''\left(q_1\left(p_1\right)+q_2\left(p_2\right)\right)\frac{\partial q_1\left(p_1\right)}{\partial p_1}\frac{\partial q_2\left(p_2\right)}{\partial p_2}. \tag{14}$$

Ниже приведено условие максимизации прибыли фирмы-монополиста:

$$\frac{d^2 p\left(p_1,p_2\right)}{dp_1^2}=\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\frac{dp_2}{dp_1}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2\partial p_1}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}\frac{dp_2}{dp_1}<0 \tag{15}$$

или, учитывая, что $\frac{dp_2}{dp_1}=1$ и $\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}=\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2\partial p_1}$:

$$\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+2\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}<0\,. \tag{16}$$

Для анализа изменения цены фирмы-монополиста при изменении ограничивающего параметра $t$ необходимо продифференцировать (10) по $dt$:

$$\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}\frac{dp_2}{dt} \tag{17}$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\right)\frac{dp_1}{dt}+\left(\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\right)\frac{dp_2}{dt}. \quad (18)$$

Учитывая, что дифференцирование $p_1 - p_2 = t$ даёт $\frac{dp_1}{dt}-\frac{dp_2}{dt}=1$, получаем:

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}}{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+2\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}} \quad (19)$$

и

$$\frac{dp_2}{dt}=\frac{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}}{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+2\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}}. \quad (20)$$

Принимая во внимание, что $l=\frac{\partial p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1}=-\frac{\partial p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2}$ и, таким образом, $\frac{d\,l}{dt}=\frac{d\left(\frac{\partial p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1}\right)}{dt}$, получаем:

$$\frac{d\,l}{dt}=\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}\frac{dp_1}{dt}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\frac{dp_2}{dt}=$$

$$=\frac{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}-\left(\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}\right)^2}{\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1^2}+2\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_1\partial p_2}+\frac{\partial^2 p\left(p_1,p_2\right)}{\partial p_2^2}}. \quad (21)$$

Полученное отношение позволяет оценивать норму изменения $p_1$, $p_2$ и $l$ в зависимости от изменения $t$. Выполнение условия максимизации прибыли второго порядка гарантирует, что выполняется (16) и поскольку:

$$\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}-\left(\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1\partial p_2}\right)^2<0,$$

то $\frac{d\,l}{dt}<0$.

Далее необходимо определить знаки $\Delta p_1=\int_0^{\bar t}\frac{dp_1}{dt}dt$ и $\Delta p_2=\int_0^{\bar t}\frac{dp_1}{dt}dt$, зависящие, в свою очередь, от отношений $\frac{dp_1}{dt}$ и $\frac{dp_2}{dt}$. Последние при изменении $t$ от $0$ до $\bar t$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если для любого значения $t\in\left(0,\bar t\right]$ отношение $\frac{dp_1}{dt}$ положительно, то в результате перехода к ценовой дискриминации цена на сильном рынке увеличится. Если для любого значения $t\in\left(0,\bar t\right]$ отношение $\frac{dp_2}{dt}$ отрицательно, то в результате перехода к ценовой дискриминации цена на слабом рынке снизится. Другими словами, достаточным условием разнонаправленного движения цен на рассматриваемых рынках в результате перехода к ценовой дискриминации является выполнение неравенств $\frac{dp_1}{dt}>0$ и $\frac{dp_2}{dt}<0$ для всех $t\in(0,\bar{t}]$.

Так как выполняется (16), то цена должна вырасти на сильном рынке и снизиться на слабом рынке, если $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}\le 0$ на всём интервале $(0,\bar{t}]$. Даже при условии, что $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}>0$, цена будет увеличиваться на сильном рыке и сокращаться на слабом рынке до тех пор, пока $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}$ будет меньше $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}$ и $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}$ по абсолютному значению.

Однако, если $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}$ больше по абсолютному значению $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}$, т.е. $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}+\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}>0$, то $\frac{dp_1}{dt}<0$. Выполнение условия (16) подразумевает в этом случае, что $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}+\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}<0$ и, следовательно, $\frac{dp_2}{dt}<0$. Таким образом, достаточное условие для сокращения цен на обоих рынках при ценовой дискриминации состоит в том, чтобы неравенство $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}>-\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}$ выполнялось для любого $t\in(0,\bar{t}]$.

Если же $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}$ больше по абсолютному значению $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}$, т.е. $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}+\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}>0$, то $\frac{dp_2}{dt}>0$. В этом случае выполнение условия (16) подразумевает, что $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}+\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}<0$ и, следовательно, $\frac{dp_1}{dt}>0$. Отсюда следует, что достаточное условие для повышения цен на обоих рынках при переходе от единого ценообразования к ценовой дискриминации заключается в том, чтобы неравенство $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1 \partial p_2}>-\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}$ выполнялось для любого $t\in(0,\bar{t}]$.

Итак, ценовая дискриминация может способствовать как снижению цен, так и их повышению на обоих обслуживаемых фирмой-монополистом рынках. Следует отметить, что в экономической литературе чаще упоминается именно снижение цен на обоих рынках в результате перехода к дискриминационной практике, нежели их повышение. Однако предположение, что оба рынка обслуживаются при установлении единой цены, позволяет сделать вывод о том, что более вероятным результатом ценовой дискриминации станет увеличение цен, нежели их снижение на обоих рынках. Если спрос на сильном рынке менее чувствителен к его собственной цене по сравнению со спросом на слабом рынке, то абсолютное значение $\frac{dq_1(p_1)}{dp_1}$ будет меньше, чем $\frac{dq_2(p_2)}{dp_2}$. Тогда, вероятно, $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_1^2}$ по абсолютному значению будет меньше, чем $\frac{\partial^2 p(p_1,p_2)}{\partial p_2^2}$ и, следовательно, более вероятным является выполнение достаточного условия повышения цен на обоих рынках при переходе к ценовой дискриминации, чем достаточного условия их снижения на обоих рынках. В этом случае, скорее всего, ценовая дискриминация приведёт к повышению цен на обоих рынках, чем к их снижению.

Итак, для того, чтобы цены двигались в одном направлении, недостаточно, чтобы $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1 \partial p_2}$ было положительно. Необходимо, чтобы $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1^2}$ и $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_2^2}$ различались в достаточной мере. Если же $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1^2}=\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_2^2}$, то можно получить, что $\frac{dp_1}{dt}=-\frac{dp_2}{dt}$, т.е. темп увеличения в цене на сильном рынке равняется темпу уменьшения в цене на слабом рынке.

Значение $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1 \partial p_2}$ будет равно нулю, если предельные издержки являются постоянными ($MC'(Q)=0$), отрицательным, если предельные издержки являются возрастающими ($MC'(Q)>0$) и положительным, если предельные издержки являются убывающими ($MC'(Q)<0$). При $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1 \partial p_2} \le 0$ получится, что $\frac{dp_1}{dt}>0$ и $\frac{dp_2}{dt}<0$.

Отсюда следует, что достаточными условиями для повышения цены на сильном рынке и снижения цены на слабом рынке являются независимость спроса и постоянные или возрастающие предельные издержки.

Если предельные издержки сокращаются достаточно резко, то существует вероятность, что цены могут или вырасти, или снизиться на обоих рынках при переходе к политике ценовой дискриминации. Снижающиеся предельные издержки не только увеличивают значение $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1 \partial p_2}$, но также и уменьшают абсолютное значение $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_1^2}$ и $\frac{\partial^2 p\left(p_1, p_2\right)}{\partial p_2^2}$, делая более вероятным изменение цен в одном направлении.

Однако при попытке практической реализации предложенной модели возникает проблема, которая заключается в том, что стороне, реализующей модель (например, антимонопольной службе), не известна в явном виде функция прибыли той или иной компании. Она может лишь иметь в своём распоряжении данные бухгалтерской отчётности компании за разные периоды времени, т.е. дискретные данные прибыли и соответствующих ей цен на продукцию. Таким образом, возникает проблема выявления функции прибыли фирмы от цены, с которой можно бы было проводить математические операции, в частности дифференцирование, что предполагается предложенной выше моделью.

**Моделирование функциональной зависимости прибыли монополиста от цены на основе спектрального анализа.** В целом график, описывающий динамику изменения прибыли компании, может иметь произвольную форму: гладкую, негладкую, ломаную или даже разрывную. В математике такие функции называют неаналитическими. Но даже такая неаналитическая функция согласно теореме Фурье может быть разложена на ограниченном интервале на ряд простых гармонических колебаний (синусоид и/или косинусоид) и, в конечном счёте, представлена тригонометрическим рядом вида [8]:

$$y = f(t) = A_0 + A_1 \sin\left(\frac{2p}{T}t + f_1\right) + A_2 \sin\left(2\frac{2p}{T}t + f_2\right) + ... \qquad (22)$$

Данная теорема предполагает наличие временного ряда, который вследствие преобразований может быть однозначно представлен функцией частоты, называемой частотным спектром. Такая функция описывает временную функцию в частотной области. Так, синусоидальная последовательность в частотной области представляется единственной точкой, координаты которой характеризуют частоту и амплитуду колебания. Поскольку любая функция может быть представлена конечной суммой синусов, то и в частотной области эта функция будет описываться конечным числом точек, отражающих амплитуду и частоту колебания каждой гармонической составляющей.

Переход от временного описания сигнала к частотному описанию, т.е. вычисление частотного спектра, для детерминированных (неслучайных) сигналов осуществляется с помощью преобразования Фурье.

Поскольку ряд дискретный, то можно использовать соответствующее преобразование Фурье (ДПФ):

$$Y(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2p\,km/N}, \qquad (23)$$

где $X(k)$ – $k$-й элемент центрированного динамического ряда; $k$ – индекс динамического ряда во временной области $k \in [0;\, N-1]$; $N$ – длина динамического ряда значений исследуемого экономического показателя; $Y(m)$ – $m$-й компонент ДПФ; $m$ – индекс ДПФ в частотной области $m \in [0;\, N-1]$; $j$ – мнимая единица [9].

Используя формулу Эйлера

$$e^{-jj} = \cos(j) - j\sin(j), \qquad (24)$$

можно записать эквивалентное уравнение для ДПФ в тригонометрическом виде, разделив комплексную экспоненту на действительную и мнимую части:

$$Y(m) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j2p\,km/N} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\cos(2p\,km/N) + j\sin(2p\,km/N)\right]. \qquad (25)$$

Хотя дискретный ряд данных зависимости прибыли монополиста от цены его продукции и не является динамическим, но при проведении определённого ряда преобразований он может быть адаптирован для возможности применения спектрального анализа и, как следствие, может быть однозначно описан в виде функции зависимости прибыли от цены, над которой можно проводить различные математические операции − в частности дифференцирование, требуемое предложенной ранее экономико-математической моделью для определения направления изменения цен при переходе от единого ценообразования к ценовой дискриминации третьей степени.

Предлагается использовать алгоритм выявления функциональной зависимости на основе спектрального анализа, первым этапом которого является выбор исходного ряда данных из представленной бухгалтерской отчётности компании (рис. 2).

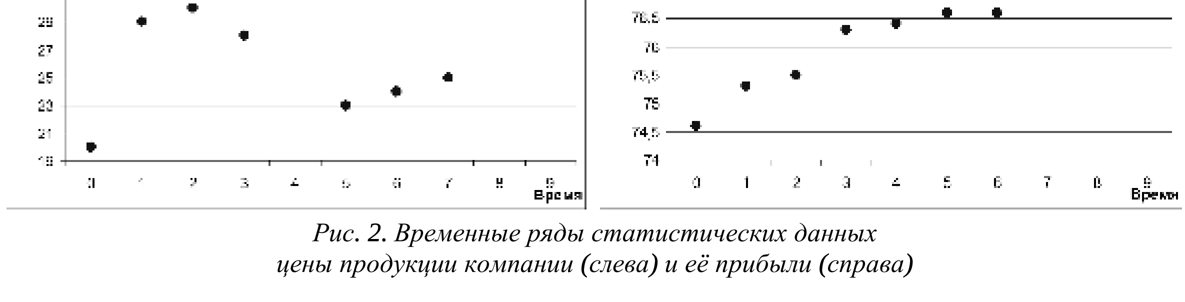


*Рис. 2. Временные ряды статистических данных цены продукции компании (слева) и её прибыли (справа)*

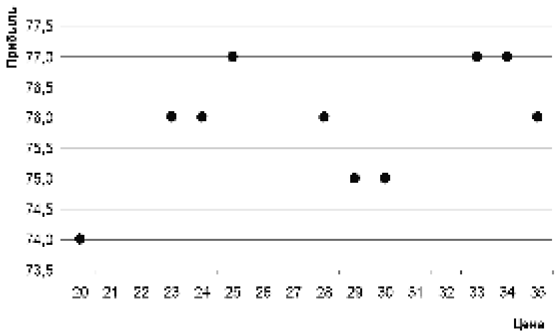


*Рис. 3. Статистический ряд зависимости прибыли от цены продукции компании*

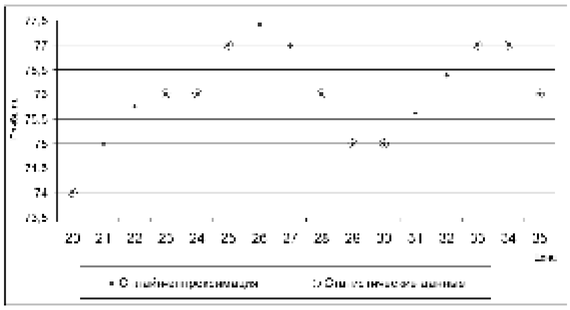

*Рис. 4. Сплайн-аппроксимация статистического ряда зависимости прибыли от цены продукции компании*

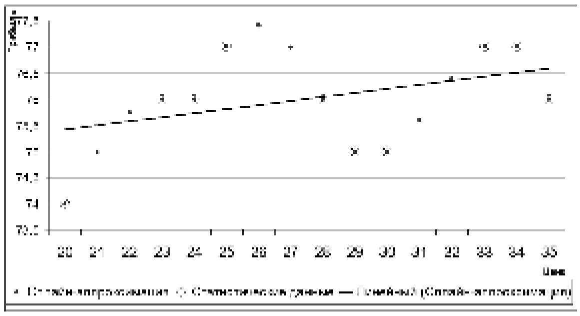

*Рис. 5. Подбор линии тренда для «очищения» ряда данных от направленности*

На втором этапе значения прибыли упорядочиваются по росту значения цены с постоянным шагом, чтобы ряд принял вид, аналогичный временному (рис. 3).

По причине того, что цены продукции взяты на основе реальной статистики, точки полученного на втором этапе ряда располагаются, скорее всего, на разном расстоянии друг от друга, т.е. изменение цены приводится с непостоянным шагом.

Для получения приемлемой представительности функции в промежутках между узловыми точками на третьем этапе алгоритма необходимо провести сплайн-аппроксимацию проранжированного ряда (рис. 4).

На четвёртом этапе проводится «очищение» полученного ряда данных прибыли от направленности. Наиболее распространённым способом выявления тренда в статистическом ряде является метод наименьших квадратов (рис. 5).

На пятом этапе над «очищенными» данными осуществляется ДПФ.

На шестом этапе оценивается спектральный состав колебаний. Обычно случайные процессы представляются спектральной плотностью мощности (СПМ). В литературе оценку СПМ авторегрессионного процесса часто называют спектральным анализом [10]. Современные методы спектрального анализа включают в себя два основных класса: параметрические и непараметрические методы. К категории параметрических методов спектрального анализа относятся те, в которых задаётся некоторая модель спектральной плотности и ставится задача оценки параметров оценки на основании результатов наблюдения соответствующего процесса на ограниченном промежутке. Непараметрические методы спектрального оценивания отличаются отсутствием каких-либо заранее заданных моделей в постановке задачи спектрального оценивания.

В связи с тем, что в данном исследовании анализируются ограниченные ряды зависимости прибыли от цены, а не непрерывная бесконечная функция, как предполагается в теории цифровой обработки сигналов, то ряд методов даёт несостоятельные оценки спектра. Невозможно получить качественную оценку СПМ, используя классические непараметрические методы спектрального оценивания, базирующиеся на вычислении ДПФ. Для поставленной задачи лучшим образом подходит использование параметрических методов спектрального анализа, которые способны получить состоятельную оценку СПМ по относительно короткой дискретной выборке.

В рамках данного исследования применялся метод максимальной энтропии (ММЭ), впервые предложенный Дж. Бергом [8]. Под энтропией понимается некоторая мера «неопределённости», связанная с появлением некоторого события. Чем выше энтропия, тем выше неопределённость появления данного события. Основная идея ММЭ состоит в выборе такого спектра, который соответствует наиболее случайному (наименее предсказуемому) временному ряду, чья корреляционная функция совпадает с заданной последовательностью оценённых величин. Это условие эквивалентно предсказанию вида корреляционной функции наблюдаемого временного ряда путём максимизации энтропии процесса. Именно поэтому анализ по ММЭ обеспечивает значительное повышение разрешающей способности спектральной оценки. Оценка СПМ по ММЭ имеет такую же аналитическую форму, как и оценка СПМ, получаемая с помощью авторегрессионной (АР) модели порядка $r$ вида:

$$S(e^{j2p/n})=\left|\frac{b_0}{1+a_1e^{-j2p/n}+a_2e^{-j4p/n}+\ldots+a_r{}^{-j2rp/n}}\right|^2. \tag{26}$$

Идентификация параметров $a_1$, $a_2$, …, $a_p$, $b_0$ АР-модели выполняется путём решения $r+1$ уравнений Юла-Уокера, которые в матричном виде записывают как:

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(-1) & \ldots & r_x(-r) \\ r_x(1) & r_x(0) & \ldots & r_x(-r+1) \\ \ldots & & & \\ r_x(r) & r_x(r-1) & \ldots & r_x(0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |b_0|^2 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

где $r_x(i-j)$ $(1\le i\le r+1,\ 1\le j\le r+1)$ – автокорреляционные коэффициенты, рассчитываемые по формуле:

$$r_x(i-j)=\frac{1}{T-|i-j|}\sum_{k=0}^{N-1-|i-j|}x(k)\,x(k+|i-j|). \tag{28}$$

Система Юла-Уокера решается при помощи метода Левинсона-Дарбина.

Для выявления функциональной зависимости прибыли от цены продукции на основе спектрального анализа предлагается алгоритм (см. рис. 6), включающий в себя адаптацию данного метода.

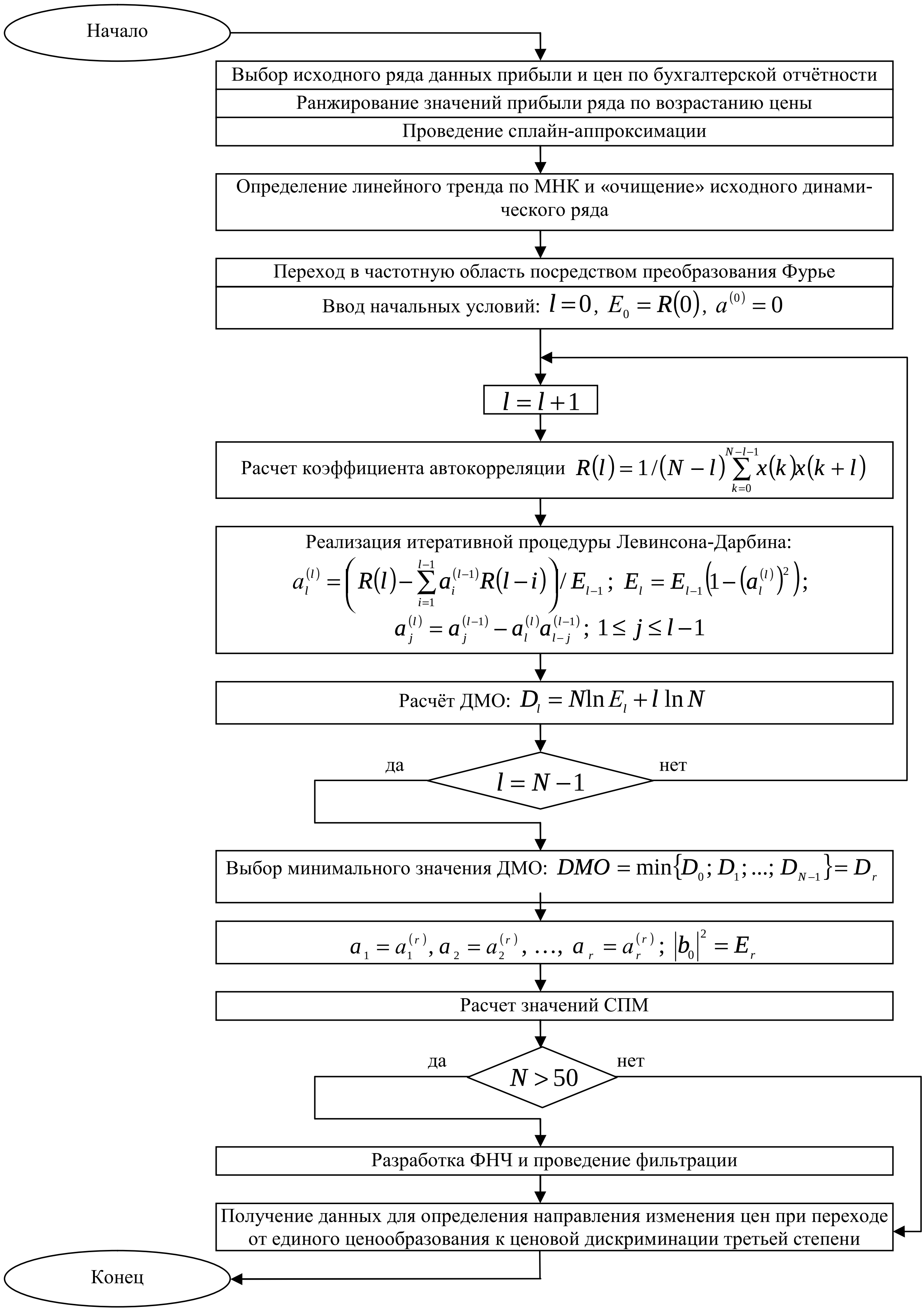


*Рис. 6. Алгоритм выявления функциональной зависимости прибыли компании от цены ее продукции на основе спектрального анализа*

Если выбранный порядок $r$ модели слишком мал, то спектральные оценки получаются сильно сглаженными, если слишком большой – увеличивается разрешение, но в оценке появляются ложные спектральные пики. Таким образом, применительно к авторегрессионному спектральному оцениванию выбор порядка модели эквивалентен компромиссу между разрешением и величиной дисперсии для классических методов спектрального оценивания.

Следует увеличивать порядок АР-модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка предсказания не достигнет максимума. Но, как правило, дисперсия ошибки монотонно убывает с увеличением порядка $r$ модели. Поэтому для определения порядка АР-модели используется статистически значимый критерий, своего рода целевая функция, – критерий длины минимального описания [9]:

$$ДМО[r] = N \ln|b_0|^2 + r \ln N \qquad (29)$$

где $r$ – порядок АР-модели; $|b_0|^2$ – оценочное значение дисперсии белого шума, которая используется в качестве ошибки линейного предсказания и находится в процессе реализации итеративной процедуры Левинсона-Дарбина.

После анализа полученных оценок СПМ на седьмом этапе необходимо провести цифровую фильтрацию, которая представляет собой процесс изменения частотного спектра сигнала в некотором желаемом направлении. Этот процесс может привести к усилению или ослаблению частотных составляющих в некотором диапазоне частот, к подавлению или выделению какой-либо конкретной частотной составляющей. Проектируемый фильтр должен представлять собой фильтр нижних частот (ФНЧ), т.е. хорошо подавлять мелкие и случайные колебания.

Цифровую фильтрацию следует проводить только в случае наличия большого количества исходных статистических данных. Таким образом, исходный ряд статистических данных зависимости прибыли компании от цены её продукции описан в виде суммы конечного числа синусоид и косинусоид (рис. 7).

Указанные гармоники, накладываясь друг на друга, образуют искомую функцию зависимости прибыли компании от цены её продукции (рис. 8), для которой в любой точке может быть найдено значение производной прибыли по цене для определения направления изменения цен при переходе от единого ценообразования к ценовой дискриминации третьей степени [11].

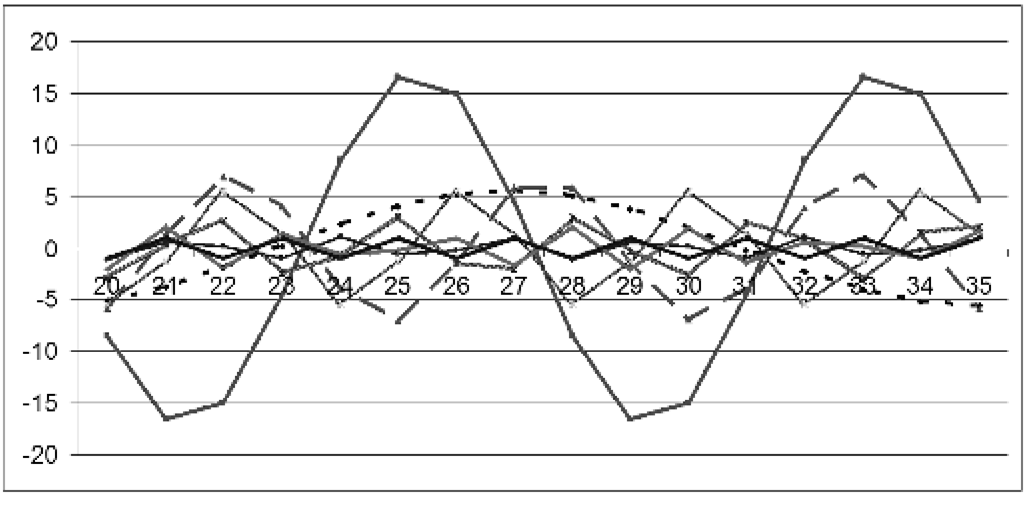


*Рис. 7. Гармонические составляющие функции прибыли от цены*


*Рис. 8. Функция зависимости прибыли компании от цены*

**Выводы.** Предложенная экономико-математическая модель позволяет осуществить оценку направления изменения цен при переходе от единого ценообразования к дискриминационной практике на двух независимых рынках. Благодаря применению спектрального анализа, позволяющего выявить однозначную функциональную зависимость прибыли компании-монополиста от цены его продукции, предлагаемая модель может найти своё применение в практике разработки и реализации государственной конкурентной политики, направленной на повышение эффективности и благосостояния экономических агентов.

Кроме того, данная модель может послужить основой для построения комплексного алгоритма оценки антимонопольной структурой допустимости дискриминационной практики фирм на рынках как конечных, так и промежуточных товаров.

Упрощённая реализация модели может быть проведена при помощи существующих программных средств, позволяющих проводить БПФ – Microsoft Excel, MathCad и др. Однако для получения более точных результатов реализации модели требуется создание специального программного продукта при помощи стандартных языков программирования.

### Библиографический список

1. Katz, M. The Welfare Effects of Third Degree Price Discrimination in Intermediate Goods Markets [Text] M. Katz // American Economic Review, 1987, vol. 77, pp. 154-167.

2. Hausman, J.A. Price Discrimination and Patent Policy [Text] J.A. Hausman, J.K. Mackie-Mason // Rand Journal of Economics, 1988, vol. 19, pp. 253-265.

3. Leontief, W. The Theory of Limited and Unlimited Discrimination [Text] W. Leontief // Quarterly Journal of Economics, 1940, vol. 54, pp. 490-501.

4. Робинсон, Дж. Экономическая теория несовершенной конкуренции [Текст] / Дж. Робинсон; пер. с англ. И.М. Осадчей. − М.: Прогресс, 1986.

5. Layson, S.K. Third-Degree Price Discrimination with Independent Demands [Text] S.K. Layson// Journal of Industrial Economics, 1998, vol. 46, pp. 511-524.

6. Nahata B. Direction of Price Changes in Third-Degree Price Discrimination [Text] B. Nataha, K. Ostaszewski, P.K. Sahoo // American Economic Review, 1990, vol. 80, pp. 1254-1258.

7. DeGraba P. The Relationship between Optimal Third-Degree Discriminatory

Prices and the Optimal Uniform Price [Text] P. DeGraba// Working Paper, Cornell University, 1991.

8. Кравчук, В.К. Спектральный анализ колебаний валютного курса EUR/USD по методу максимальной энтропии [Текст] / В.К. Кравчук // Валютный спекулянт. - 2001. - № 1. - С. 14-17.

9. Лэй, Э. Цифровая обработка сигналов для инженеров и технических специалистов [Текст] / Э. Лэй. – М.: Группа ИДТ, 2007.

10. Кравчук, В.К. Новый адаптивный метод следования за тенденцией и рыночными циклами [Текст] / В.К. Кравчук // Валютный спекулянт. - 2000. - № 12. - С. 48-53.

11. Ситникова, А.Ю. Метод спектрального анализа для выявления циклов экономической конъюнктуры [Текст] / А.Ю. Ситникова // Вестн. Самар. гос. эконом. ун-та. - 2009. - № 9 (59). - С. 107-112.

## MODELING CHANGES IN A MONOPOLIST'S PRICES IN THE TRANSITION FROM A SINGLE PRICE TO DISCRIMINATORY PRACTICES ON THE BASIS OF SPECTRAL ANALYSIS

© 2012 S. A. Bolochev[1], A. Yu. Sitnikova[2]

[1]Astrakhan State University
[2]Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov
(National Research University)

The article presents an economic-mathematical model that makes it possible to detect the direction of changes in prices as the monopolist company moves from pricing based on a single price to the practice of third-degree price discrimination on two independent markets of the final product. The practical implementation of the model implies the application of the authors' algorithms for the detection of functional dependence on the basis of spectral analysis.

*Pricing, price discrimination, monopoly, function, spectral analysis, digital filtering, harmonic.*

### Информация об авторах

**Болочев Сергей Александрович**, доцент кафедры экономической теории, Астраханский государственный университет. E-mail: bolochev@list.ru. Область научных интересов: микроэкономика, макроэкономика, экономика отраслевых рынков, ценообразование.

**Ситникова Анастасия Юрьевна**, доцент кафедры экономики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: sitnikova_au@mail.ru. Область научных интересов: инвестиционный рынок, технический анализ, спектральный анализ, экономические циклы.

**Bolochev Sergey Aleksandrovich**, associate professor of the department of economics, Astrakhan State University. E-mail: bolochev@list.ru. Area of research: microeconomics, macroeconomics, economics of branch markets, pricing.

**Sitnikova Anastasiya Yurievna**, associate professor of the department of economics, Samara State Aerospace University. E-mail: sitnikova_au@mail.ru. Area of research: investment market, technical analysis, spectral analysis, economic cycles.