

УДК: 521.182.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ФОРМЕ ЭНКЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

© 2013 Д.А. Заусаев

Самарский государственный технический университет

Рассмотрено численное интегрирование дифференциальные уравнения движения малых тел Солнечной системы в форме Энке. Для короткопериодических комет и астероидов групп Аполлона и Атона проведено сопоставление результатов численного интегрирования уравнений движения в стандартной форме и форме Энке. Показано, что уравнения Энке предпочтительнее использовать для небесных тел, имеющих тесные сближения с возмущающими телами, а также при использовании методов численного интегрирования низкого порядка.

*Астероиды, дифференциальные уравнения, уравнения движения, численное интегрирование, метод Энке.*

### Введение

В связи с возросшим объёмом информации об элементах орбит малых тел, принадлежащих Солнечной системе, в настоящее время возрос интерес к проблеме астероидной опасности. Наибольшую опасность для Земли наряду с короткопериодическими кометами представляют астероиды групп Аполлона, Амура и Атона. Разработка численных теорий движения малых тел Солнечной системы является одним из составных этапов при решении проблемы, связанной с астероидной опасностью. Проверка различных математических моделей, описывающих движения малых тел Солнечной системы, и их сопоставление позволяет выбирать наиболее приемлемый вариант для каждого конкретного случая. В настоящее время в связи с развитием средств и методов наблюдения (радиолокационных, лазерных, космических и др.) больших планет и малых тел Солнечной системы значительно увеличилась точность определения координат этих объектов. Следовательно, предъявляются всё более высокие требования к математической модели, с помощью которой описывается движение

небесных объектов. Учёт лишь гравитационных взаимодействий, который заложен в стандартных уравнениях движения задачи  $n$  тел, оказывается недостаточным, что приводит к более сложной форме дифференциальных уравнений движения.

Следует отметить, что наряду с учётом действующих сил на точность полученных результатов существенное значение оказывает метод решения дифференциальных уравнений. Например, одна и та же классическая задача  $n$  тел описывается различными дифференциальными уравнениями в зависимости от применяемого метода решения. В методе Коуэлла уравнения движения в прямоугольных координатах интегрируются непосредственно. В методе Энке координаты не получаются непосредственно, а вместо этого интегрирование даёт разности между действительными координатами и координатами в оскулирующей орбите, т.е. тем положением, в котором находилось бы тело, если бы оно продолжало двигаться по коническому сечению, соответствующему координатам и компонентам скорости в

определённый момент времени, называемой эпохой оскуляции.

Целью данной работы является получение модифицированных дифференциальных уравнений Энке с учётом гравитационных и релятивистских эффектов для описания движения возмущаемого тела и численное интегрирование этих уравнений для исследования эволюции орбит короткопериодических комет и астероидов групп Аполлона, Амура и Атона.

### Дифференциальные уравнения движения в форме Энке

Пусть  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  – гелиоцентрические координаты возмущаемого тела с массой  $m$ , движущегося под действием притяжения Солнца. Тогда дифференциальные уравнения движения этого тела запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0 &= -k^2(1+m)\frac{x_0}{r_0^3}, \\ \ddot{y}_0 &= -k^2(1+m)\frac{y_0}{r_0^3}, \\ \ddot{z}_0 &= -k^2(1+m)\frac{z_0}{r_0^3},\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}. \quad (2)$$

Пусть  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  – приращения координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , создаваемые притяжениями со стороны планет и релятивистскими эффектами, обусловленными Солнцем. Тогда координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  возмущаемого тела, движущегося под действием притяжения Солнца и планет, с учётом релятивистских эффектов запишутся соотношениями:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \xi, \\ y &= y_0 + \eta, \\ z &= z_0 + \zeta\end{aligned}\quad (3)$$

и уравнения движения примут вид [1]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} \\ &+ \sum_i k^2 m_i \left( \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right) + \\ &+ \frac{k^2}{c^2} \left[ (4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4}x - (1+\alpha)\frac{\dot{x}^2}{r^3}x + \right. \\ &\left. + 3\alpha\frac{(x\dot{x})^2}{r^5}x + (4-2\alpha)\frac{(x\dot{x})}{r^3}\dot{x} \right]\end{aligned}\quad (4)$$

с аналогичными уравнениями для переменных  $y$  и  $z$ , где  $m$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела;  $m_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – массы и гелиоцентрические координаты больших планет;  $r$ ,  $\Delta_i$ ,  $r_i$  – расстояния, вычисляемые по формулам:  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $\Delta^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$ ,  $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$ ;  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$  – компоненты скорости возмущаемого тела;  $k$  – постоянная Гаусса,  $c$  – скорость света;  $\alpha$  – параметр, характеризующий выбор системы координат. Случай  $\alpha = 1$  соответствует стандартным координатам, случай  $\alpha = 0$  – гармоническим координатам.

Вычитая из уравнений (4) уравнения (1), получим уравнения для координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  в следующем виде:

$$\ddot{x} - \ddot{x}_0 = \ddot{\xi} = k^2(1+m)\left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right) + \sum_i k^2 m_i \left( \frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left[ (4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4}x - (1+\alpha)\frac{\dot{x}^2}{r^3}x + 3\alpha\frac{(x\dot{x})^2}{r^5}x + (4-2\alpha)\frac{(x\dot{x})}{r^3}\dot{x} \right] \quad (5)$$

и аналогичные уравнения для  $\ddot{\eta}$ ,  $\ddot{\zeta}$ .

### Банк данных координат больших планет, Луны и Солнца

Из уравнений (1) – (5) следует, что движение небесных тел описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка. При учёте возмущений от 9 больших планет и Луны данная система дифференциальных уравнений второго порядка сводится к системе 66-ти уравнений первого порядка. Решение системы можно существенно упростить, если известны координаты возмущающих тел на любой момент времени. Тогда система 66-ти уравнений сводится к 6-ти уравнениям первого порядка. Создание банка данных координат и компонентов скоростей больших планет, Луны и Солнца позволяет упростить систему дифференциальных уравнений движения возмущаемого тела.

В настоящее время одной из наиболее точных численных теорий движения больших планет является численная теория DE405 [2,3]. На её основе создан банк данных DE405, представляющий собой данные на внешнем носителе, состоящие из последовательности групп коэффициентов Чебышева, с помощью которых вычисляются координаты и скорости больших планет, Луны и Солнца на любой момент времени с 1660 по 2200 гг. Каждая группа охватывает интервал времени в 32 дня.

Подобная форма хранения коэффициентов полиномов Чебышева с тридцатидвухдневным интервалом времени была использована в более ранней работе [4] при создании банка данных эфемерид больших планет (Меркурий-Нептун) и Луны. В то время существовали трудности, связанные с объёмом внешней памяти, поэтому увеличение временного интервала до 32 дней приводило к усложнению алгоритма вычисления координат и скоростей Меркурия и Луны.

Вследствие этого, использование банка данных DE405 в программе численного интегрирования уравнений движения небесных тел оказалось неудобным, поскольку для вычисления координат и скоростей для Меркурия и Луны применяются различные алгоритмы по сравнению с вычислениями координат и скоростей других планет. Кроме того, коэффициенты полинома Чебышева в DE405 приведены для барицентра системы “Земля + Луна”, что затрудняет нахождение сближений возмущаемого тела с Землей или Луной в отдельности.

В качестве алгоритма численного интегрирования уравнений движения был выбран метод Эверхарта 27-го порядка [5]. Известно, что метод Эверхарта показал себя как самый эффективный по точности и быстродействию в эксперименте по исследованию алгоритмов и программ численного прогнозирования движения небесных тел, проведённом в СССР в 1986 году.

В программе не предусматривалось использование банка данных координат и компонентов скоростей для возмущающих тел, и поэтому необходимо было её модифицировать. Вследствие того, что в процессе интегрирования требуется информация о координатах и скоростях на значительном количестве подшагов, требовалось оперативно получать их, затрачивая при этом минимальное

время. Отсюда возникла необходимость в создании банка данных координат больших планет на интервале времени с 1660 по 2200 гг., где координаты планет внутри промежутка вычисляются единым алгоритмом на любой момент времени с заданной точностью. Кроме того, следовало получить координаты и компоненты скоростей для Земли и Луны отдельно.

Для устранения вышеуказанных трудностей было проведено исследование точности вычисления координат планет и Луны с помощью полиномов Чебышева в зависимости от величины интервала интерполяции и степени полинома. Результаты исследования показали, что наиболее оптимальным интервалом для вычисления координат и скоростей с помощью коэффициентов Чебышева для всех планет, Луны и Солнца является десятидневный интервал при максимальной степени полинома равной также десяти.

Создание банка данных коэффициентов полиномов Чебышева проводилось на основе банка данных DE405. Предварительно был создан банк данных координат и компонентов скоростей Земли, Луны, Солнца и всех планет с шагом 10 дней на интервале времени с 1660 по 2200 гг. с использованием банка данных DE405. Затем для каждого десяти дневного интервала находились коэффициенты полинома Чебышева [6]. Таким образом, на интервале времени с 1660 по 2200 гг. был создан банк данных на жёстком диске, представляющий собой последовательность групп коэффициентов разложений координат и скоростей больших планет, Луны и Солнца в ряды по полиномам Чебышева. В каждой группе объединены коэффициенты разложений, соответствующие одному десяти дневному интервалу. Хронологически упорядоченная последовательность этих групп

записана на жёстком диске в двоичном формате в виде файла прямого доступа.

Координаты и компоненты скоростей всех планет, Луны и Солнца на интервале времени с 1660 по 2200 гг. были вычислены и сопоставлены с помощью полученных коэффициентов Чебышева и данных DE405. Результаты сопоставления показали, что величины максимальных отклонений от данных DE405 в прямоугольных координатах и скоростях на всём исследуемом интервале времени на 2-3 порядка меньше ошибок наблюдений. Наибольшие отклонения имеются в координатах и скоростях Меркурия и Луны. Однако, учитывая их малую массу по сравнению с другими планетами, можно заключить, что учёт возмущений от этих объектов существенно не повлияет на результаты численного интегрирования уравнений движения небесных тел.

#### **Численное интегрирование модифицированных уравнений Энке, описывающих движение малых тел Солнечной системы**

Созданный банк данных для получения координат больших планет и Луны на интервале времени с 1660 по 2200 гг. позволил модифицировать алгоритм и программу метода Эверхарта. Совместное интегрирование системы 66-ти дифференциальных уравнений первого порядка свелось к решению системы из 6-ти дифференциальных уравнений первого порядка, описывающих движение возмущаемого тела.

Начальными данными при использовании стандартной программы численного интегрирования уравнений движения методом Эверхарта являются координаты и скорости возмущающих тел. Результатом численного интегрирования являются координаты и скорости возмущаемого тела. В модифицированном варианте результатом численного интегрирования являются

последовательности коэффициентов полиномов Чебышева возмущаемого тела. Получение результатов численного интегрирования возмущаемого тела в форме последовательности коэффициентов полиномов Чебышева обладает преимуществом по сравнению со стандартным выводом результатов в виде координат и скоростей, так как позволяет получать всю необходимую информацию об эфемеридах на любой момент времени. Это особенно важно при планировании и проведении наблюдений.

Основное требование к методу численного интегрирования уравнений движения малых тел Солнечной системы (наряду с устойчивостью) – метод должен обладать высокой степенью точности. Известно, что метод Эверхарта обладает сильной устойчивостью [5,8]. Увеличение точности можно добиться двумя путями: либо повышением порядка метода, либо уменьшением шага интегрирования. Точность результатов вычислений зависит также от учёта действия возмущающих сил и от применяемого метода интегрирования.

При численном интегрировании уравнений Энке на каждом шаге решаются дифференциальные уравнения (1) и (5). При этом для задачи двух тел, описываемой уравнениями (1), находится точное решение путём вычисления элементов орбит по известным координатам и скоростям в начале шага. В конце шага по элементам орбит вычисляются координаты и скорости возмущаемого тела, с использованием формул, приведённых в [7]. Решая уравнения (1), можно выбирать достаточно большой шаг интегрирования, однако величина шага ограничивается решением уравнений (5). Координаты астероида или кометы на шаге получаются путём сложения значений  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  со

значениями координат  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  в конце шага интегрирования.

Для определения области применимости данного алгоритма исследовалась эволюция орбит 10 короткопериодических комет и 10 астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона. Начальные данные элементов орбит комет и астероидов взяты из каталогов [9,10], причём все 10 комет взяты из начала списка каталога, в то время как 10 астероидов находятся в конце списка каталога. Выбор комет, имеющих минимальные порядковые номера, обусловлен тем, что эти кометы имеют достаточно точные элементы орбит. Выбор астероидов связан с распределением их минимальных расстояний с Землей. Следует отметить, что элементы орбит астероидов в каталоге расположены в порядке возрастания их минимальных расстояний с Землей.

Для численного интегрирования уравнений (4) использовался метод Эверхарта 27-го порядка с постоянным шагом интегрирования. Численно интегрировались уравнения в форме Энке (1), (5), а также решались уравнения (4). Шаг и порядок в методе Эверхарта при решении уравнений (1), (5) и (4) выбирался таким образом, чтобы результаты численного интегрирования на конце отрезка интегрирования совпадали с требуемой точностью.

Данные численного интегрирования уравнений Энке, сопоставлены с данными каталогов [9,10], которые получены путём совместного интегрирования. Следует отметить, что при совместном интегрировании уравнений движения рассматриваемых объектов решались уравнения, которые использовались при создании DE405. В табл. 1 приведены элементы орбит 5-ти комет, полученные в результате интегрирования первым и

вторым способами (обозначены соответственно

– сов. интегр. и мет. Энке);  $\Delta S$  – абсолютное значение величин разности орбитальных элементов, полученных первым и вторым методами.

Как видно из табл. 1 максимальные расхождения в элементах кометных орбит для 5-ти комет в обоих методах на конце интервала интегрирования незначительны. При этом в угловых элементах максимальное расхождение наблюдается в средней аномалии у комет P/Encke и D/Biela – 0.0030 и 0.0043 градуса, соответственно, что составляет около 11 и 15 угловых секунд. Отличия в остальных элементах орбит не превышают точности оптических наблюдений. Так как оба метода дают незначительные расхождения в элементах орбит, то это позволяет считать, что уравнения (1), (5) и (4) можно использовать для исследования эволюции орбит короткопериодических комет на интервале времени около 200 лет.

По сравнению с короткопериодическими кометами, астероиды групп Аполлона, Амура и Атона представляют наибольшую потенциальную опасность для Земли в случае столкновения с ней. В настоящее время, по данным сайта [smallbodies.ru](http://smallbodies.ru), выявлено около 900 астероидов групп Аполлона и Атона, проходящих от Земли на геоцентрическом расстоянии менее 0.01 а.е. в течение периода с 1800 по 2204 гг. Исследование эволюции орбит астероидов, сближающихся с большими планетами, представляет собой сложную задачу из-за проблем устойчивости.

В табл. 2 приведены элементы орбит 5-ти астероидов, принадлежащих к группам Аполлона и Атона. Каждый

из рассматриваемых астероидов на интервале времени с 1800-2200 гг. сближается с Землёй на расстоянии менее 0.01 а.е. У трёх из этих астероидов – это Aten / 2001 CP36, Apollo / 2001 BF10, Aten / 2002 VX91 – расхождение с совместным интегрированием элементов орбит на конце интервала интегрирования значительное, достигая в средней аномалии 0,14, 6,83 и 0,54 градуса, соответственно. Основная причина этих расхождений связана с орбитальной устойчивостью.

Существенное нарушение орбитальной устойчивости происходит при тесных сближениях астероида с большими планетами. Например, причиной вышеуказанных расхождений в элементах орбит астероида Apollo / 2001 BF10 является его сближение с Землёй в 2085 г. на расстояние 0.009788 а.е. [9]. Тестовые расчёты показали, что изменение начальных данных большой полуоси у астероида Aten / 2002 VX91 на величину  $\Delta a = 10^{-7}$  а.е. приводит к расхождению средней аномалии в конце интервала интегрирования почти на 60 градусов. Вследствие того, что орбита астероида Aten / 2002 VX91 лежит вблизи плоскости эклиптики, а большая полуось близка к большой полуоси Земли, возмущающее действие Земли постоянно оказывает существенное влияние на движение этого астероида, являясь причиной орбитальной неустойчивости. У других астероидов в табл. 2 отклонения в элементах орбит, вычисленных двумя методами, можно считать приемлемыми, так как эти отклонения значительно меньше отклонений, вычисленных каждым из методов с начальными данными, взятыми на различные моменты оскуляции.

Таблица 1. Оскулирующие элементы орбит короткопериодических комет

T = 2190 12 26

<b>P/Halley</b>	<b>M</b>	<b>a</b>	<b>e</b>	<b><math>\omega</math></b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>i</b>
Сов. Интегр.	273.2761	17.745133	0.967199	115.3018	62.6713	161.6867
Мет. Энке	273.2790	17.745040	0.967199	115.3018	62.6714	161.6867
$\Delta S$	0.0029	0.000093	0	0	0.0001	0
<b>P/Encke</b>	<b>M</b>	<b>a</b>	<b>e</b>	<b><math>\omega</math></b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>i</b>
Сов. Интегр.	232.9695	2.211109	0.851064	191.5234	330.9684	9.6482
Мет. Энке	232.9665	2.211110	0.851064	191.5234	330.9684	9.6482
$\Delta S$	0.0030	0.000001	0	0	0	0
<b>D/Biela</b>	<b>M</b>	<b>a</b>	<b>e</b>	<b><math>\omega</math></b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>i</b>
Сов. Интегр.	113.4167	3.521668	0.764597	323.0907	143.3537	13.8526
Мет. Энке	113.4124	3.521675	0.764598	323.0896	143.3548	13.8519
$\Delta S$	0.0043	0.000007	0.000001	0.0011	0.0011	0.0007
<b>P/Faye</b>	<b>M</b>	<b>a</b>	<b>e</b>	<b><math>\omega</math></b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>i</b>
Сов. Интегр.	292.0967	3.798059	0.592634	217.8278	176.4265	6.2071
Мет. Энке	292.0967	3.798059	0.592634	217.8279	176.4265	6.2071
$\Delta S$	0	0	0	0.0001	0	0
<b>D/Borsen</b>	<b>M</b>	<b>a</b>	<b>e</b>	<b><math>\omega</math></b>	<b><math>\Omega</math></b>	<b>i</b>
Сов. Интегр.	189.9286	3.080769	0.862202	73.1468	39.9301	6.7641
Мет. Энке	189.9282	3.080765	0.862202	73.1433	39.9336	6.7643
$\Delta S$	0.0004	0.000004	0	0.0035	0.0035	0.0002

Как уже отмечалось, повышение точности численного интегрирования можно достичь двумя путями: путём увеличения порядка метода или уменьшением шага интегрирования. При численном интегрировании уравнений (4) величина шага интегрирования зависит от порядка метода. Для интегрирования уравнений движения короткопериодических комет при использовании метода Эверхарта 27-го порядка и для астероидов групп Аполлона и Атона при совместном интегрировании использовался переменный шаг. Для уравнений Энке при исследовании эволюции орбит короткопериодических комет максимальная длина шага интегрирования равнялась 0.5 дня, а для астероидов групп Аполлона и Атона –

0.25 дня. При этом затраты машинного времени на исследование эволюции орбиты одного объекта на интервале времени с 2006 по 2190 гг. сократилось почти на порядок в связи с использованием банка данных координат больших планет.

Важным с точки зрения практического вычисления является ответ на вопрос, в каких случаях лучше использовать дифференциальные уравнения (1) и (5), а в каких случаях решать уравнения (4). Анализируя классические уравнения Энке, следует отметить, что имеют место два случая, когда вместо уравнений Коуэлла следует решать уравнения Энке: а) случай тесных сближений; б) при использовании метода численного интегрирования низкого порядка.

Таблица 2. Оскулирующие элементы орбит астероидов групп Аполлона и Атона

T = 2190 12 26

<b>Aten/2001 CP36</b>	M	<i>a</i>	<i>e</i>	$\omega$	$\Omega$	<i>i</i>
Сов. Интегр.	294.6851	0.714290	0.407943	355.0110	329.0142	10.3659
Мет. Энке	294.5422	0.714294	0.407915	355.0071	329.0143	10.3672
$\Delta S$	0.1429	0.000004	0.000028	0.0039	0.0001	0.0013
<b>Apollo / 2001 BF10</b>	M	<i>a</i>	<i>e</i>	$\omega$	$\Omega$	<i>i</i>
Сов. Интегр.	307.8254	1.601057	0.437917	136.7574	33.7891	1.4297
Мет. Энке	300.9952	1.609232	0.439981	137.7591	33.3185	1.4494
$\Delta S$	6.8302	0.008175	0.002064	1.0017	0.4706	0.0197
<b>Aten / 2002 VX91</b>	M	<i>a</i>	<i>e</i>	$\omega$	$\Omega$	<i>i</i>
Сов. Интегр.	252.6824	0.986436	0.201223	83.3291	210.9324	2.4900
Мет. Энке	253.2195	0.986498	0.201175	83.1782	210.9058	2.4954
$\Delta S$	0.5378	0.000062	0.000048	0.1509	0.0266	0.0054
<b>Apollo / 2004 BN41</b>	M	<i>a</i>	<i>e</i>	$\omega$	$\Omega$	<i>i</i>
Сов. Интегр.	316.4616	2.046776	0.511493	151.1058	326.8218	0.3602
Мет. Энке	316.4636	2.046775	0.511493	151.1061	326.8216	0.3602
$\Delta S$	0.0020	0.000001	0	0.0003	0.0002	0
<b>Apollo / 2005 WM3</b>	M	<i>a</i>	<i>e</i>	$\omega$	$\Omega$	<i>i</i>
Сов. Интегр.	95.3909	2.675825	0.618286	197.8569	235.7882	1.3833
Мет. Энке	95.3915	2.675825	0.618286	197.8569	235.7883	1.3833
$\Delta S$	0.0016	0	0	0	0.0001	0

В случае тесного сближения небесного тела с большой планетой к уравнениям Коуэлла следует применять регуляризацию, например, с помощью преобразований Кустанхейма – Штифеля [11], в то время как для уравнений Энке нет необходимости в применении данных преобразований. Это свойство отмечается Эверхартом [5]. Данное заключение основано на том, что правые части дифференциальных уравнений (5) малы, а уравнения (1) имеют точное аналитическое решение.

При использовании многошаговых методов численного интегрирования следует использовать методы низкого порядка, так как с увеличением порядка метода область абсолютной устойчивости быстро сокращается [12]. В этом случае предпочтение следует отдавать уравнениям Энке по сравнению с уравнениями Коуэлла, так как они обладают лучшей устойчивостью, а полученные решения – более высокой степенью точности.

В случае применения одношаговых методов численного интегрирования методы низкого порядка эффективны для задач, в которых основным требованием является требование устойчивости, а не точности. В этом случае также следует отдавать предпочтение уравнениям Энке по сравнению с уравнениями Коуэлла.

При использовании методов численного интегрирования уравнений движения небесных тел более высокого порядка (выше 15-го) предпочтительнее использовать уравнения в форме Коуэлла, так как полученное решение имеет большую точность по сравнению с решениями уравнений в форме Энке.

В заключение следует отметить, что исследование эволюции орбит малых тел Солнечной системы, не имеющих тесных сближений с возмущающими планетами, можно

проводить на интервале 400 лет (1800 – 2200 гг.) путём решения уравнений (4) методом Эверхарта 27-го порядка с использованием банка данных координат больших планет. Для небесных тел, проходящих через сферы действия больших планет, следует использовать уравнения в форме Энке. Метод Энке с использованием низкого порядка эффективен также для задач, не требующих высокой точности, но обладающих высокой степенью устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП 2.534.2011).

### Библиографический список

1. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972. - 382 с.
2. Newhall X.X., Standish E.M., Williams Jr. and J.G. DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries //Astron.Astrophys. 1983. № 125. P.150-167.
3. Standish E.M.. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // Jet Prop Lab Technical Report. IOM 312.F-048. 1998. P.1-7.
4. Bretagnon P., "Théorie du mouvement de l'ensemble des planètes. Solution VSOP82" (PDF 1.23MB), Astronomy & Astrophysics 114 (1982) P. 278–288.
5. Everhart . E. Implist single methods for integrating orbits // Celestial Mechanics, 1974, v.10, P.35-55.
6. Монтенбург О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере (+CD) – СПб: Питер, 2002. – 320 с.
7. Заусаев А.Ф., Заусаев Д.А. Численное интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы с использованием оскулирующих элементов больших планет//

- Математическое моделирование и краевые задачи. Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3. Самара: 2009, СамГТУ. - С. 125-130.
8. *Заусаев А.Ф., Заусаев А.А.* Применение модифицированного метода Эверхарта для решения задач небесной механики // Математическое моделирование. Т. 20. № 11. М.: – 2008. – С. 109–114.
9. *Заусаев А.Ф., Заусаев А.А.* Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1800 по 2204 гг. М.: Машиностроение - 1, 2007. - 410 с.
10. *Заусаев А.Ф., Абрамов В.В., Денисов С.С.* Каталог орбитальной эволюции астероидов, сближающихся с Землей с 1800 по 2204 гг. . М.: Машиностроение - 1, 2007. - 608 с.
11. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. - 304 с.
12. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. М.: Мир. 1979. - 312 с.

### USE OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE FORM OF ENCKE FOR THE STUDY OF MOTION SMALL SOLAR SYSTEM BODIES

© 2013 D.A. Zausaev

Samara State Technical University

The numerical integration of differential equations of motion of small bodies in the solar system is considered in the form of Encke. For short-period comets and asteroids Apollo and Aten, a comparison of the results of numerical integration of the equations of motion in standard form and shape of the Encke is conducted. In this article has shown that the equations of Encke is preferable to use for celestial bodies, with close rapprochement with perturbing planets, as well as the use of methods of numerical integration of the low order.

*Asteroids, differential equations, equations of motion, numerical integration, Encke's method.*

#### Информация об авторах:

**Заусаев Дмитрий Анатольевич**, аспирант, кафедра «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет. E-mail: [zadmitriy@gmail.com](mailto:zadmitriy@gmail.com). Область научных интересов: численные методы, небесная механика.

**Zausaev Dmitriy Anatolyevich**, postgraduate student, «Applied Mathematics and Informatics» department, Samara State Technical University. E-mail: [zadmitriy@gmail.com](mailto:zadmitriy@gmail.com). Area of research: Numerical methods, Celestial Mechanics.