УДК 519

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ И МЕХАНИЗМА ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ ИПОТЕЧНОГО КРЕДИТА С ПРОЦЕДУРОЙ АМОРТИЗАЦИИ ДОЛГА РАВНЫМИ СУММАМИ

© 2005 Г. М. Гришанов

Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассмотрен вид кредита с фиксированной выплатой основной суммы долга, сформированы план его погашения во времени и математическая модель механизма принятия решений по выбору параметров с учетом платежеспособности заемщика.

В практике ипотечного кредитования широко применяется кредит с фиксированной выплатой основной суммы долга. При этом заемщик осуществляет равновеликие платежи в счет погашения основной суммы долга, а проценты начисляются на оставшуюся часть долга и вносятся в составе общего платежа. Таким образом, величина ежемесячного платежа изменяется в сторону уменьшения [1].

Рассмотрим вначале модель, формализующую задачу амортизации такого кредита.

Пусть кредит в сумме D погашается в течение n лет. В этом случае сумма, ежегодно идущая на его погашение, составит постоянную во времени величину

$$R = D / n = const. \qquad (1)$$

При известной сумме, идущей на погашение кредита в размере R, легко определить величину погашенной задолженности:

$$W_k = kR,\ k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Последний член этого ряда nR равен сумме займа D:

$$W_n = nR = D.$$

Сумма погашенной задолженности на начало года k равна

$$W_k^н = (k-1)R, \quad k = 1,2, \ldots, n. \qquad (3)$$

Остаток кредита на начало года k при известной задолженности $W_k^н$ равен

$$D_k^н = D - (k-1)R,\ k = 1,2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что размер кредита на начало последнего года кредита n составляет величину

$$D_n^н = D - (n-1)R = R.$$

Величина остатка кредита на конец каждого года при известной погашенной задолженности на конец года также образует последовательный ряд сумм:

$$D_k = D - kR,\ k = 1,2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Из (5) следует, что сумма долга на конец срока кредита n составит

$$D_n = D - nR = 0,$$

т. е. долг отсутствует.

Определим величину процентов J_k, которые выплачивает заемщик в каждом периоде. Так как проценты начисляются на остаток кредита, то они соответствующим образом уменьшаются по годам. Пусть проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке i. Тогда величины процентов, выплачиваемых в конце каждого года, равны

$$J_k = D_k^н i = (D - (k-1)R)i, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

Рассчитаем величину расходов по кредиту (срочную уплату), выплачиваемую заемщиком в каждом периоде и представляющую собой сумму двух величин – платы процентов и расходов на погашение основного долга.

Обозначим величину расходов по кредиту через V. Тогда срочная уплата в конце года k составит

$$V_k = Di + R - (k-1)R_i\,,\ k = 1{,}2,\ \ldots,\ n. \qquad (7)$$

Из (7) находим, что расходы по кредиту в последний год n, равны

$$V_n = Di + R - (n-1)Ri = R(1+i), \qquad (8)$$

т. е. срочная уплата в последний год кредита составляет наращенную сумму величины R.

Используя (1) - (8), можно сформировать план погашения кредита в случае, когда ежегодно идущая на погашение сумма является постоянной величиной. План-график погашения долга во времени представлен в общем виде в таблице 1.

Подставляя значения конкретных параметров контракта D, R, n, i в приведенные в таблице 1 формулы, можно рассчитать план погашения кредита во времени.

Графики изменения расходов на погашение кредита, процентов и их суммы при R=*const* представлены на рис. 1. Из графиков видно, что снижение расходов на погашение процентов и снижение расходов по кредиту происходит по одному линейному ритму. Снижение каждой из этих величин за срок кредита происходит на одну величину. Таким образом, на рисунке две наклонные прямые V_k и J_k являются параллельными, расстояние между ними ΔV характеризует допустимую область изменения текущих ежегодных взносов в счет погашения кредита, при которой платежеспособность заемщика сохраняется.

Схема погашения кредита с R = *const* является удобной и простой при формировании финансовых потоков для составления графиков погашения, а также экономичной для заемщика, что позволяет рекомендовать ее для широкого использования на практике.

Для решения задачи выбора параметров ипотечного кредита сформируем модель целевой функции и модель ограничений, совокупность которых описывает стратегию поведения кредитора в области допустимых решений.

В качестве целевой функции кредитора примем сумму процентного дохода, получаемого кредитором за весь срок кредита.

С учетом (6) уравнение для определения процентного дохода будет иметь вид

$$J_\Sigma(D,n,i) = \sum_{k=1}^{n} J_k = \sum_{k=1}^{n}(D-(k-1)R)i =$$

$$= nDi - Ri\sum_{k=1}^{n}(k-1) =$$

$$= \ n(D - \frac{1}{2}(n\text{-}1)R)i \rightarrow max\,.$$

Если процентная ставка устанавливается внешней средой, то процентный доход бу-

Таблица 1

План-график погашения задолженности во времени

Год	Расходы на погашение долга	Погашенный долг		Остаток долга		Плата процентов	Расходы по займу
	R	$W_k^н$	W_k	$D_k^н$	D_k	J_k	V_k
1	R	0	R	D	$D - R$	D_i	$D_i + R$
2	R	R	$2R$	$D - R$	$D - 2R$	$(D - R)i$	$D_i + R - Ri$
3	R	$2R$	$3R$	$D - 2R$	$D - 3R$	$(D - 2R)i$	$D_i + R - 2Ri$
. . .							
t	R	$(k-1)R$	kR	$D - (k-1)R$	$D - kR$	$(D - (k-1)R)\ i$	$D_i + R - (k-1)Ri$
. . .							
n	R	$(n-1)R$	nR	$D - (n-1)R$	$D - nR$	$(D - (n-1)R)\ i$	$D_i + R - (n-1)Ri$

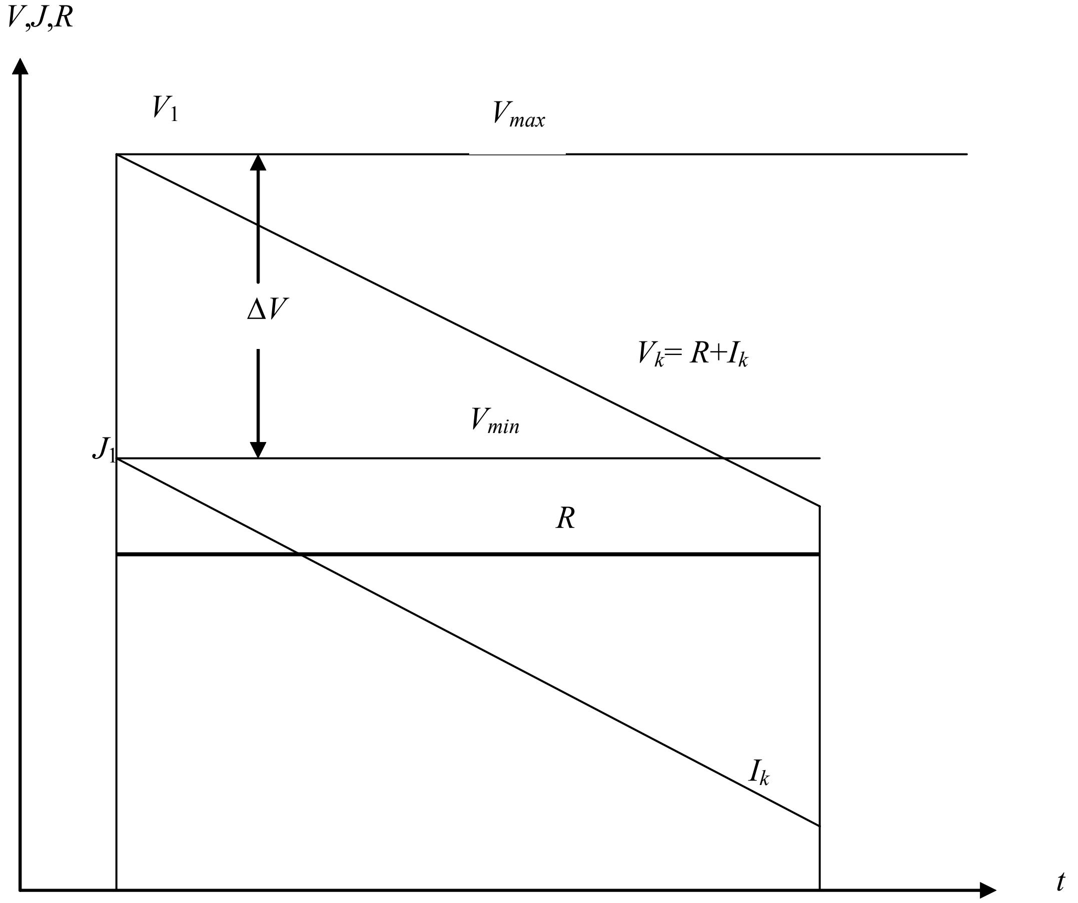

Рис. 1. Динамика изменения расходов на погашение кредита, процентов при R = const

дет представлять собой функцию от двух переменных: объема кредита D и его срока n:

$$J_{\Sigma}(D,n) = n(D - \frac{1}{2}\ (n\text{-}1)R)i = \frac{1}{2}\ (n+1)Di\ . \quad (9)$$

Исследуем влияние изменения переменных D, n, i на величину процентного дохода.

Интенсивность роста процентного дохода по каждому параметру можно количественно оценить коэффициентами чувствительности:

$$\frac{\partial J}{\partial D} = \frac{1}{2}(n+1)i\ ,\ \frac{\partial J}{\partial n} = \frac{1}{2}Di\ ,$$

$$\frac{\partial J}{\partial i} = \frac{1}{2}(n+1)D\ . \quad (10)$$

Для сравнения влияния параметров на операционный доход определим значения коэффициентов эластичности операционного дохода к изменению объема ипотечного кредита D, срока n и процентной ставки i:

$$Э_D^J = \frac{\partial J}{\partial D}\frac{D}{J}\ ,\ Э_n^J = \frac{\partial J}{\partial n}\frac{n}{J} = \frac{n}{n+1}\ ,\ Э_i^J = \frac{\partial J}{\partial i}\frac{i}{J}\ . \quad (11)$$

Сравнивая коэффициенты эластичности между собой, можно заключить, что наименьшее влияние на операционный доход оказывает изменение срока кредита n. С увеличением объема кредита и процентной ставки на один процент операционный доход увеличится на один процент.

Сформируем модель ограничений, которую необходимо учитывать при решении задачи выбора оптимальных параметров ипотечного кредита с процедурой амортизации кредита равными суммами ($R = const$). Объем кредита должен удовлетворять требованию кредитора о величине первоначального взноса:

$$D \le КИЗ \cdot C, \quad (12)$$

где $КИЗ$ – коэффициент ипотечной задолженности, характеризующий долю стоимости собственности, взятую заемщиком в кредит;

C – стоимость собственности (оценка собственности), покупаемой заемщиком.

Другое ограничение заключается в том, что размер периодического взноса, часть которого идет на погашение кредита в сумме R, а другая – на выплату процентов, должен удовлетворять критериям платежеспособности заемщика:

$$V \leq min\ (V^1, V^2) = V_{max}. \quad (13)$$

Однако при реализации ипотечного кредита с $R = const$ сумма выплат V является переменной величиной, и поэтому неравенство (13) должно соблюдаться для любого k-го периода ($k = 1,2, \ldots, n$):

$$V_k \leq min\ (V^1, V^2) = V_{max}, \quad k = 1,2, \ldots, n,$$

$$V^1 = \gamma^1\ ДЗ,\ V^2 = \gamma^2\ ДЗ. \quad (14)$$

Величина периодических выплат при реализации кредита с $R = const$ определяется из (7), откуда следует, что величина выплат убывает по линейному закону с ростом периода от максимальной величины в первом периоде $V_1 = (Di + R)$ до минимальной величины в конце срока $V_n = R\ (1 + i)$. Тогда, если неравенство (14) выполняется для V_1, то оно выполняется и для всех других V_k, $k = 2, 3, \ldots, n$. В связи с этим (14) для ипотечного кредита с $R = const$ можно представить в следующем виде:

$$V_1 \leq min\ (V^1, V^2) = V_{max},\ V_1 = Di + R,\ \ R = D/n,$$

$$V^1 = \gamma^1\ ДЗ,\ V^2 = \gamma^2\ ДЗ. \quad (15)$$

В общем виде ограничение на выбор переменных периодических выплат V_k, $k = 1, \ldots, n$ с учетом платежеспособности заемщика (7), (14) запишем в виде

$$V_k \leq V_{max} = min\ (V^1, V^2),\ V_k = (\ Di + R) - (k-1),$$

$$k = 1, 2, \ldots, n, \quad R = D/n,$$

$$V^1 = \gamma^1\ ДЗ,\ V^2 = \gamma^2\ ДЗ. \quad (16)$$

Верхнее $V_{max} = min\ (V^1, V^2)$ ограничение образует область выбора значений периодических выплат при выдаче ипотечного кредита с $R = const$.

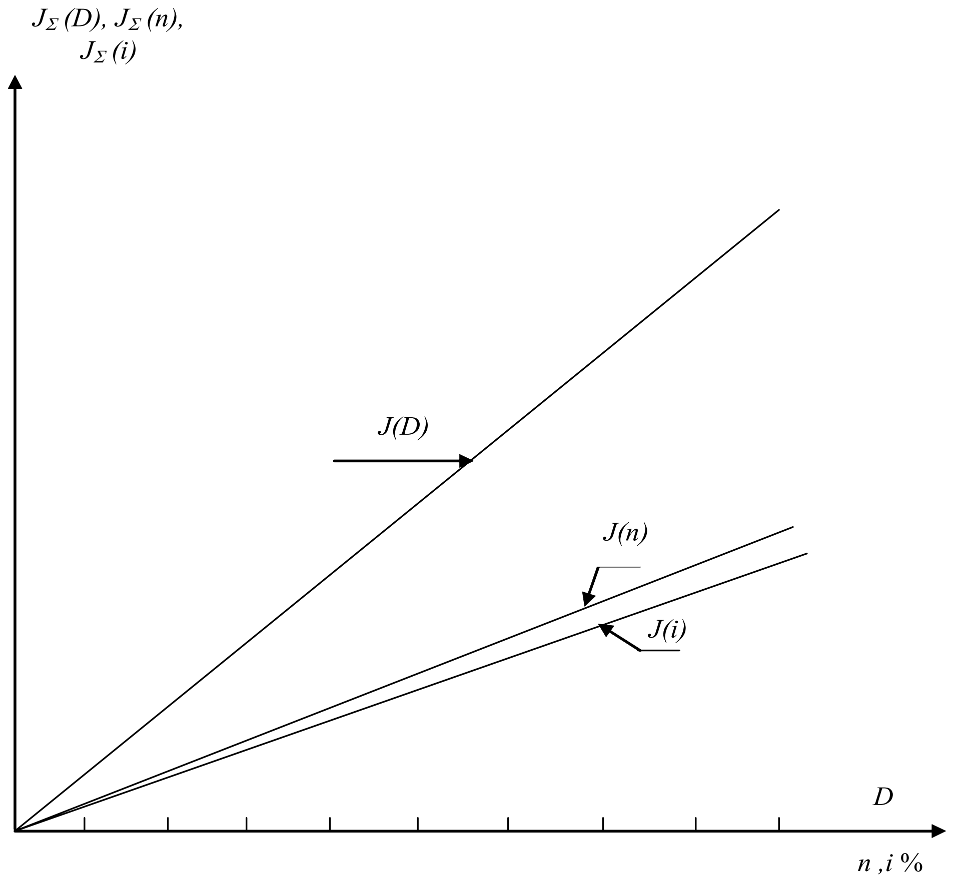

Рис. 2. Зависимости процентного дохода от параметров кредита с R = const

Совокупность ограничений (12) и (16) образует допустимую область выбора объема ипотечного кредита D и величины периодических выплат V_k, $k = 1,2, \ldots, n$:

$$D \le D_{max}, D_{max} = КИЗ \cdot C, V_k \le V_{max},$$

$$V_{max} = min\,(V^1, V^2);$$

$$V_k = (Di + R) - (k-1)Ri, k = 1,2, \ldots, n,$$

$$R = D/n, V^1 = \gamma^1 ДЗ, V^2 = \gamma^2 ДЗ. \qquad (17)$$

В общем случае в соответствии с целевой функцией (9) и ограничениями (17) задача принятия решений кредитором состоит в выборе объема ипотечного кредита, срока кредита и соответствующей им величины периодических выплат, обеспечивающих при заданной процентной ставке максимальное значение процентного дохода.

Математическая модель механизма принятия решений будет иметь вид:

$$J_\Sigma(D,n) = nDi - Ri\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}(n+1)Di \to max, \qquad (18)$$

$$D \le D_{max},\ D_{max} = КИЗ \cdot C, V_k \le V_{max},$$

$$V_{max} = min\,(V^1, V^2),$$

$$V_k = (Di + R) - (k-1)Ri,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$R = D/n, V^1 = \gamma^1 ДЗ, V^2 = \gamma^2 ДЗ.$$

Так как расходы по кредиту V_k, $k = 1, \ldots, n$ являются убывающей функцией от времени, ограничение $V_{max} \le V_k$, $k = 1, \ldots, n$ соблюдается для каждого периода, если выполняется условие

$$V_1 \le V_{max}, V_1 = Di + R, \qquad (19)$$

т. е. выплаты в первый год не превышают допустимого значения V_{max}.

В связи с этим модель задачи выбора параметров ипотечного кредита (18) с учетом (19) примет следующий вид:

$$J_\Sigma(D,n) = nDi - Ri\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}(n+1)Di \to max,$$

$$D \le D_{max}, D_{max} = КИЗ \cdot C, V_1 \le V_{max},$$

$$V_{max} = min\,(V^1, V^2), V_k = (Di + R),$$

$$R = D/n, V^1 = \gamma^1 ДЗ, V^2 = \gamma^2 ДЗ, n \le n_{max}. \qquad (20)$$

Решение (20) сводится к установлению максимальной величины кредита в соответствии с уравнением $D_{max} = КИЗ \cdot C$ и максимально допустимой величины выплаты по кредиту в первый год срока кредита:

$$V_1 = V_{max} = Di + R = Di + D/n = \frac{D}{n}\,(1 + in) =$$

$$= min\,(V^1, V^2). \qquad (21)$$

Определенная таким образом величина выплаты в первый период, как наибольшая из выплат во всех других последующих периодах, удовлетворяет критериям платежеспособности заемщика.

При определенных значениях $D^0 = D_{max}$ и $V_1^0 = V_{max}$ из уравнения (21) определяется срок кредита n, в течение которого может быть погашен долг:

$$n^0 = D_{max} / (V_{max} - D_{max} i). \qquad (22)$$

Полученный из уравнения (22) срок кредита должен удовлетворять неравенству $n^0 \le n_{max}$. Если найденное значение срока превышает установленное кредитором, то необходимо уменьшить объем кредита за счет уменьшения цены собственности, т. е. заемщик должен подобрать другую собственность по цене меньше первоначальной.

Из уравнения (22) следует, что долг может быть погашен за конечное число лет при условии, что $V_{max} > D_{max} i$. Если параметры ипотечного кредита таковы, что имеет место равенство ($V_{max} = D_{max} i$), то долг практически не может быть погашен. В этом случае, как было отмечено, следует уменьшать объем выдаваемого кредита.

В сформированной модели задачи (20) не учтены условия погашения ипотечного кредита в срок, определенный из уравнения (22).

При выполнении условий погашения задолженности (2), (5), (6) погашенный кредит в конце срока ипотечного кредита становится равным сумме кредита, как следует из (2), а величина остаточной задолженности – равной нулю, как следует из (5).

Сформулируем задачу оптимизации, решаемую кредитором при определении параметров кредита и формировании финансовых потоков, обеспечивающих амортизацию кредита в условиях установленной на ипотечном рынке процентной ставки.

Решение задачи оптимизации осуществляется в два этапа. На первом этапе определяются при заданной процентной ставке такие суммы ипотечного кредита D, срок его погашения n и соответствующие им величины периодических выплат $V(D, n)$, которые обеспечивают возвратность кредита и максимум суммы процентного дохода.

На втором этапе при найденных оптимальных параметрах кредита формируются такие финансовые потоки, направленные на погашение задолженности, выплату процентов в каждом периоде, которые обеспечивают амортизацию кредита в течение заданного срока кредита.

Математическая модель сформулированной задачи с учетом (20) и (2), (5), (6) будет иметь следующий вид:

$$J_{\Sigma}(D,n) = nDi - Ri\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}(n+1)Di \rightarrow max,$$

ограничения на выполнение условий кредитоспособности и платеже- способности заемщика

$$D \le D_{max},\ D_{max} = КИЗ \cdot C,\ V_1 \le V_{max},$$

$$V_{max} = min\,(V^1, V^2),\ V_1 = (Di + R),$$

$$R = D/n,\ V^1 = \gamma^1 ДЗ,\ V^2 = \gamma^2 ДЗ,\ n \le n_{max}, \quad (23)$$

ограничения на выполнение условий погашения задолженности

$$W_k = kR,\ W_n = nR = D,\ D = D - kR,\ D_n = 0,$$

$$J_k = Di,\ k = 1, 2, \ldots, n. \quad (24)$$

Таким образом, кредитор в результате решения задачи (23)-(24) определяет параметры кредитного договора D, n, V на основе платежеспособности заемщика, а затем формирует план погашения кредита в установленный срок.

От модели с ежегодными выплатами на погашение кредита и процентов легко перейти к модели с ежемесячными выплатами, заменяя i на $i/12$, а n на $12n$.

Рассмотренная в работе модель механизма принятия кредитором решений позволяют формализовать выбор параметров ипотечного кредита, процедуру его погашения и на основе этого обосновать и обеспечить его реализуемость, возвратность и эффективность.

Предложенные методы формирования моделей механизмов принятия оптимальных решений по выбору финансовых параметров ипотечного кредита могут быть применимы и для реализации кредитов с переменными платежными потоками, а также кредитов с переменными процентными ставками и другими вариантами возвращения ссуды.

Список литературы

1. Методические рекомендации по организации и порядку осуществления программ ипотечного кредитования/ Под общ. ред. Н. Б. Косыревой. – М.: Фонд «Институт экономики города», 2003.

SIMULATING FINANCIAL FLOWS AND MECHANISM OF CHOOSING MORTGAGE CREDIT PARAMETERS WITH THE PROCEDURE OF DEBT DEPRECIATION BY EQUAL SUMS

© 2005 G. M. Grishanov

Samara State Aerospace University

The paper deals with a king of debt fixed payment credit, formulates the plan of debt repayment in time and a mathematical model of the decision-taking mechanism for choosing parameters with regard to the borrower's solvency.