

УДК 624+539. 3/6

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛА В РАСЧЁТАХ НА ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ

© 2012 Л. М. Савельев

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Для материала, не имеющего площадки текучести, предлагается явное представление зависимости напряжения от деформации при одноосном деформировании, опирающееся на стандартные характеристики материала. Данная аппроксимация диаграммы деформирования позволяет находить в замкнутой форме критические напряжения стержней и пластин за пределом пропорциональности.

*Диаграмма деформирования, аппроксимация, касательный модуль, устойчивость, стержень, пластина.*

Расчёты элементов конструкций за пределом пропорциональности требуют знания диаграмм деформирования соответствующих материалов. Для практических целей желательно иметь аналитическое представление зависимости напряжения от деформации. Это тем более необходимо, когда экспериментальная диаграмма отсутствует, а в распоряжении расчётчика имеются лишь некоторые характерные величины. Для материала, не имеющего площадки текучести, к ним могут относиться модуль упругости  $E$ , предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$ , условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ , предел прочности  $\sigma_b$ . Для построения по этим данным диаграммы деформирования можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{при} \quad \sigma < \sigma_{\text{пц}}; \quad (1)$$

$$\bar{\sigma} = a_1 - \frac{a_2}{\bar{\varepsilon} - a_3} + a_4\bar{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \sigma > \sigma_{\text{пц}}. \quad (2)$$

Здесь  $a_1 \dots a_4$  — параметры аппроксимации;  $\sigma, \varepsilon$  — напряжение и деформация:

$$\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_{\text{пц}}, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_{\text{пц}}, \quad \varepsilon_{\text{пц}} = \sigma_{\text{пц}}/E. \quad (3)$$

Касательный модуль  $E_k$  на участке упрочнения определяется при этом следующим образом:

$$\bar{E}_k = \frac{E_k}{E} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{a_2}{(\bar{\varepsilon} - a_3)^2} + a_4. \quad (4)$$

Достоинством предлагаемой аппроксимации является явный вид зависимости  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  в отличие от тех

работ, где она строится в неявной форме  $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$  (например, [1]). Участок упрочнения представлен здесь единым выражением (2), что удобно при практических расчётах. Параметры аппроксимации связаны между собой условиями непрерывности функций  $\sigma(\varepsilon)$  и  $E_k(\varepsilon)$  в точке  $\varepsilon = \varepsilon_{\text{пц}}$  (точка  $A$  на рис. 1). Полагая  $\bar{\sigma} = 1$  и  $\bar{E}_k = 1$  при  $\bar{\varepsilon} = 1$ , получаем согласно (2), (4) равенства

$$a_1 - \frac{a_2}{1 - a_3} + a_4 = 1; \quad \frac{a_2}{(1 - a_3)^2} + a_4 = 1.$$

Отсюда можно получить соотношения

$$a_3 = 2 - \alpha, \quad a_2 = (\alpha - 1)^2(1 - a_4), \quad (5)$$

где

$$\alpha = a_1/(1 - a_4). \quad (6)$$

Потребуем далее, чтобы аппроксимирующая кривая проходила через точку  $B$  (рис. 1), в которой

$$\sigma = \sigma_{0,2}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{0,2} = \sigma_{0,2}/E + 0,002$$

или, иначе,

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{0,2}; \quad \bar{\varepsilon}_{0,2} = \bar{\sigma}_{0,2} + \kappa,$$

где обозначено

$$\bar{\sigma}_{0,2} = \sigma_{0,2}/\sigma_{\text{пц}}; \quad \kappa = 0,002E/\sigma_{\text{пц}}. \quad (7)$$

Подставив эти значения  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\varepsilon}$  в выражение (2), после тождественных преобразований можно прийти к равенству

$$\alpha = (1 - 2a_4)\bar{\sigma}_{0,2} + (1 - a_4)(\bar{\sigma}_{0,2} - 1)^2/\kappa + a_4(2 - \kappa). \quad (8)$$

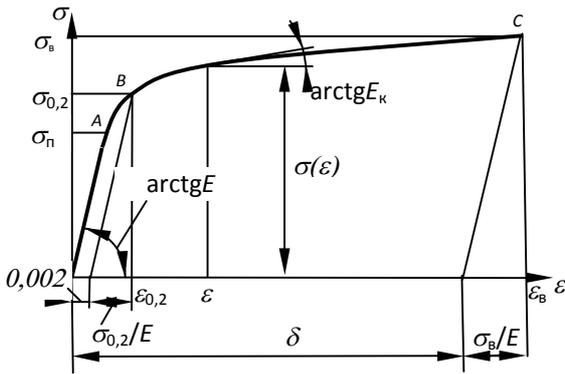


Рис. 1.

Наконец, последнее соотношение между параметрами получим, потребовав, чтобы аппроксимирующая кривая проходила через ещё одну точку, для которой известны экспериментальные значения  $\varepsilon = \varepsilon_1$  и  $\sigma = \sigma_1$ , то есть известны относительные величины  $\bar{\varepsilon}_1$  и  $\bar{\sigma}_1$ . Положив

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\sigma}_1 + \kappa_1,$$

из равенства (2) получим выражение, аналогичное (8):

$$\alpha = (1 - 2a_4)\bar{\sigma}_1 + (1 - a_4)(\bar{\sigma}_1 - 1)^2 / \kappa_1 + a_4(2 - \kappa_1).$$

Приравнивание правых частей этого выражения и выражения (8) приводит к уравнению относительно  $a_4$ , решение которого можно записать в виде

$$a_4 = (C_1 - C_0) / (D_1 - D_0), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= \bar{\sigma}_{0,2} + (\bar{\sigma}_{0,2} - 1)^2 / \kappa; \\ D_0 &= (\bar{\sigma}_{0,2} + \kappa - 1)^2 / \kappa; \\ C_1 &= \bar{\sigma}_1 + (\bar{\sigma}_1 - 1)^2 / \kappa_1; \\ D_1 &= (\bar{\sigma}_1 + \kappa_1 - 1)^2 / \kappa_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Если, в частности, в качестве  $\sigma_1$  взять

$\sigma_b$  (точка C на рис. 1), то в этом случае в выражениях (11) следует положить

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_b / \sigma_{\text{мц}}; \quad \kappa_1 = \delta E / \sigma_{\text{мц}}, \quad (12)$$

где  $\delta$  – остаточная деформация, соответствующая  $\sigma_b$ .

Формулы (5) и (7) – (11) совместно с равенством

$$a_1 = \alpha(1 - a_4), \quad (13)$$

вытекающим из (6), дают искомые значения параметров аппроксимации.

В случае, когда возникающие деформации не слишком велики, можно воспользоваться более простым представлением диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ . Оно получится, если опустить в выражении (2) слагаемое  $a_4 \bar{\varepsilon}$  и, соответственно, отказаться от требования, чтобы кривая проходила через дополнительную точку с координатами  $\varepsilon_1, \sigma_1$ . Остальные условия сохраняются неизменными. В итоге вместо (2), (4) можно получить соотношения вида

$$\bar{\sigma} = b_1 - \frac{b_2}{\bar{\varepsilon} - b_3}; \quad \bar{E}_\kappa = \frac{b_2}{(\bar{\varepsilon} - b_3)^2}, \quad (14)$$

где

$$b_1 = \bar{\sigma}_{0,2} + (\bar{\sigma}_{0,2} - 1)^2 / \kappa; \quad (15)$$

$$b_2 = (b_1 - 1)^2; \quad b_3 = 2 - b_1. \quad (16)$$

Эти соотношения могут быть представлены в более удобной форме

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^* - \frac{(\sigma^* - \sigma_{\text{мц}})^2}{E\varepsilon + \sigma^* - 2\sigma_{\text{мц}}}; \\ E_\kappa &= E \frac{(\sigma^* - \sigma_{\text{мц}})^2}{(E\varepsilon + \sigma^* - 2\sigma_{\text{мц}})^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\sigma^* = \sigma_{0,2} + \frac{(\sigma_{0,2} - \sigma_{\text{мц}})^2}{0,002E}. \quad (18)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим материал Д16, имеющий характеристики:  $E = 7 \cdot 10^4$  МПа;  $\sigma_{\text{мц}} = 190$  МПа;  $\sigma_{0,2} = 280$  МПа;  $\sigma_b = 440$  МПа;  $\delta = 0,12$ .

Согласно (7), (12) находим для него  $\bar{\sigma}_{0,2} = 1,474$ ;  $\kappa = 0,7368$ ;  $\bar{\sigma}_1 = 2,316$ ;  $\kappa_1 = 44,21$ . Параметры аппроксимации (2) имеют значения

$$a_1 = 1,730; \quad a_2 = 0,5592;$$

$$a_3 = 0,2474; \quad a_4 = 0,01285,$$

а параметры аппроксимации (14) – значения  $b_1 = 1,778$ ;  $b_2 = 0,6056$ ;  $b_3 = 0,2218$ .

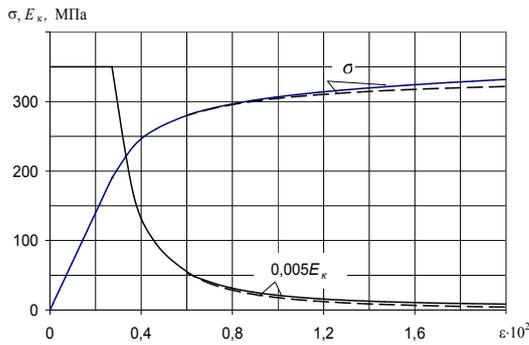


Рис. 2.

На рис. 2 зависимости  $\sigma$  и  $E_k$  от  $\varepsilon$ , вытекающие из соотношений (2) и (4), даны для этого материала сплошными линиями, а из соотношений (14) – штриховыми. Для сравнительно небольших значений  $\varepsilon$  обе аппроксимации дают близкие результаты. Так, при  $\varepsilon = 0,01$  (что соответствует величине  $\bar{\varepsilon} = 3,68$ ) по формуле (2) находим  $\bar{\sigma} = 1,62$  (то есть  $\sigma = 307$  МПа), а по первой из формул (14) имеем  $\bar{\sigma} = 1,60$ , что меньше более строгого значения на 0,7%. Для касательного модуля упрощённый вариант при той же деформации даёт значение  $E_k = 3,54 \cdot 10^3$  МПа, что на 16% меньше величины  $E_k = 4,21 \cdot 10^3$  МПа, вытекающей из выражения (4).

Упрощённый вариант диаграммы деформирования особенно удобен в расчётах на устойчивость, где он позволяет во многих случаях находить критические напряжения для стержней и пластин в виде относительно простых формул. Рассмотрим, например, сжатый стержень, для которого критическое напряжение изгибной потери устойчивости в предположении о справедливости закона Гука даётся формулой Эйлера

$$\sigma_{кр}^0 = c\pi^2 EI / (l^2 A), \quad (19)$$

где  $l$ ,  $A$ ,  $I$  – длина стержня, площадь и момент инерции сечения, соответственно;  $c$  – коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня на концах.

При  $\sigma_{кр}^0 > \sigma_{пц}$  для определения критического напряжения используем формулу Энгессера – Шенли [2]

$$\sigma_{кр} = c\pi^2 E_k I / (l^2 A) = \sigma_{кр}^0 E_k / E. \quad (20)$$

Значения напряжения  $\sigma_{кр}$  и касательного модуля  $E_k$  должны

определяться в одной и той же точке диаграммы деформирования материала. Считая, что эта диаграмма описывается в нелинейной области выражениями (14), и подставляя последние в равенство (20), приходим к уравнению относительно критической деформации  $\varepsilon_{кр}$ :

$$b_1 - \frac{b_2}{\bar{\varepsilon}_{кр} - b_3} = \bar{\sigma}_{кр}^0 \frac{b_2}{(\bar{\varepsilon}_{кр} - b_3)^2},$$

где

$$\bar{\varepsilon}_{кр} = \varepsilon_{кр} / \varepsilon_{пц}; \quad \bar{\sigma}_{кр}^0 = \sigma_{кр}^0 / \sigma_{пц}.$$

Отсюда вытекает квадратное уравнение относительно  $(\bar{\varepsilon}_{кр} - b_3)$ . Отбросив посторонний корень, находим

$$\bar{\varepsilon}_{кр} - b_3 = b_2 (s + 1) / (2b_1),$$

где

$$s = \sqrt{1 + 4\bar{\sigma}_{кр}^0 b_1 / b_2}.$$

Подстановка этого результата в первую из формул (14) позволяет прийти к выражению

$$\sigma_{кр} = \sigma_{пц} b_1 (s - 1) / (s + 1).$$

С учётом соотношений (15), (16) и (18) расчётным формулам можно придать вид

$$\sigma_{кр} = \sigma^* \frac{s - 1}{s + 1}; \quad s = \sqrt{1 + \frac{4\sigma^* \sigma_{кр}^0}{(\sigma^* - 2\sigma_{пц})^2}} \quad (21)$$

Таким образом, расчёт сводится здесь к предварительному вычислению напряжения  $\sigma_{кр}^0$  по формуле Эйлера (19).

Если окажется, что эта величина превышает  $\sigma_{пц}$ , то она должна быть скорректирована согласно выражениям (18) и (21).

В качестве другого примера рассмотрим прямоугольную пластину, равномерно сжатую в продольном направлении. В предположении о справедливости закона Гука критическое напряжение определяется по формуле [3]

$$\sigma_{кр}^0 = kE (h/b)^2, \quad (22)$$

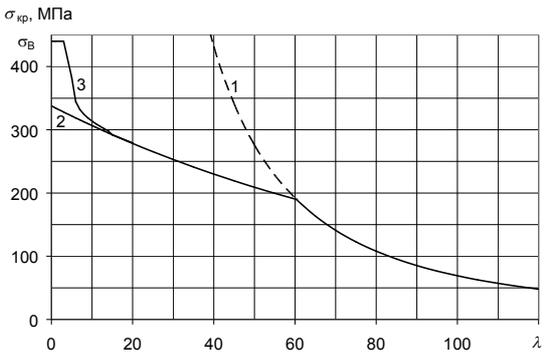


Рис.3.

где  $b, h$  – ширина и толщина пластины,  $k$  – коэффициент устойчивости, зависящий от характера граничных условий и соотношения сторон пластины. В случае, когда  $\sigma_{кр}^0 > \sigma_{пл}$ , для нахождения  $\sigma_{кр}$  воспользуемся концепцией Блейха [4], согласно которой

$$\sigma_{кр} = \sigma_{кр}^0 \sqrt{E_k/E}.$$

Учитывая первое равенство (16), на основании (14) можно получить в этом случае следующее выражение для  $\varepsilon_{кр}$ :

$$\bar{\varepsilon}_{кр} - b_3 = (b_1 - 1 + \bar{\sigma}_{кр}^0)(b_1 - 1)/b_1.$$

Первое из соотношений (14) позволяет далее вывести расчётную формулу для  $\sigma_{кр}$ . С учётом (15), (16) и (18) можно представить её в виде

$$\sigma_{кр} = \sigma^* \sigma_{кр}^0 / (\sigma_{кр}^0 + \sigma^* - \sigma_{пл}). \quad (23)$$

Как видим, и в этом случае дело сводится к предварительному расчёту критического напряжения по формуле (22) и, при необходимости, последующему уточнению результата согласно (23).

На рис. 3 представлена зависимость  $\sigma_{кр}$  от параметра гибкости  $\lambda = l/i$  ( $i = \sqrt{I/A}$  – радиус инерции сечения) для сжатого стержня, шарнирно опёртого на концах. Стержень изготовлен из рассмотренного материала. Кривая 1 представляет гиперболу Эйлера  $\sigma_{кр}^0 = \pi^2 E / \lambda^2$ , вытекающую из формулы (19) при  $c=1$ , а кривая 2 получена в соответствии с выражениями (18), (21). Кривая 3 даёт для сравнения результаты итерационного расчёта  $\sigma_{кр}$  с использованием аппроксимации (2), (4). В

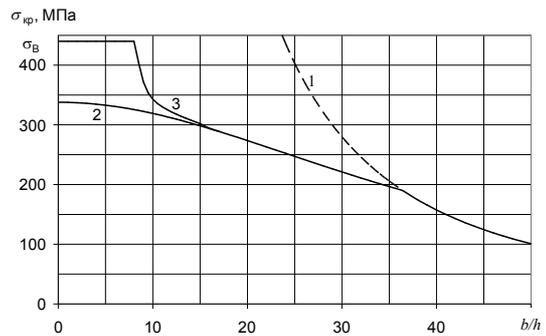


Рис.4.

наиболее существенном для практики диапазоне  $\lambda$  кривые (2) и (3) совпадают.

Аналогично на рис. 4 представлены результаты расчёта критического напряжения для случая равномерного одноосного сжатия прямоугольной пластины, шарнирно опёртой по всем сторонам. Коэффициент  $k$  в выражении (22) принят равным 3,6. Как следует из рисунка, формула (23), представленная кривой 2, даёт хорошие результаты для  $b/h > 10$ . Для более толстых пластин использование простейшей аппроксимации приводит, как и в случае коротких стержней, к заниженным значениям критических напряжений; возникающая погрешность идёт, очевидно, в запас прочности.

**Библиографический список**

1. Моссаковский, В.И. Прочность ракетных конструкций [Текст] /В.И. Моссаковский, А.Г. Макаренков, П.И. Никитин и др.; Под ред. В.И. Моссаковского. – М.: Высш. шк., 1990. – 359 с.
2. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела [Текст] / Ю.Н. Работнов – М.: Наука, 1988. – 712 с.
3. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А.С. Вольмир – М.: Наука, 1967. – 984 с.

Блейх, Ф. Устойчивость металлических конструкций [Текст] / Ф. Блейх - М.: 1959. – 544 с.

## **ANALYTICAL DESCRIPTION OF STRESS–STRAIN DIAGRAM IN STRESS AND STABILITY ANALYSIS**

© 2012 L. M. Saveljev

Samara State Aerospace University  
named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

A simple approximation of stress–strain diagram in direct form is proposed. The dependence permit to obtain bars and plates critical stresses beyond proportional limit as closed formulas.

*Deformation curve, approximation, tangent modulus, stability, beam, plate.*

### **Информация об авторе**

**Савельев Леонид Макарович**, кандидат технических наук, доцент кафедры прочности летательных аппаратов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [proch@ssau.ru](mailto:proch@ssau.ru). Область научных интересов: прочность конструкций летательных аппаратов.

**Saveljev Leonid Makarovich**, Candidate of Technical Science, Associate Professor of Aircraft Strength Department, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [proch@ssau.ru](mailto:proch@ssau.ru). Area of research: Strength of Vehicle Structures.