

УДК 621.9.01

## ЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ОБРАБОТКИ НА ОПЕРАЦИЯХ ЧИСТОВОГО КОНЦЕВОГО ФРЕЗЕРОВАНИЯ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ДЕТАЛЕЙ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ

© 2012 Д. Л. Скуратов

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)

Представлена математическая модель для определения рациональных условий обработки при концевом фрезеровании, состоящая из линейной целевой функции и линейных ограничений-неравенств. В качестве целевой функции использовано уравнение, определяющее машинное время обработки, а в качестве ограничений-неравенств – ограничения, связанные с функциональными параметрами и параметрами, определяющими качество обработки.

*Концевое фрезерование, математическая модель, целевая функция, технические ограничения, рациональные условия обработки.*

Для решения задачи научно-обоснованного определения рациональных условий обработки на операциях чистового фрезерования концевыми фрезами необходимо выбрать целевую функцию, технические ограничения и на их базе разработать математическую модель, позволяющую получить рациональные режимы резания при различных вариантах управляемых параметров.

Чаще всего при определении рациональных условий резания (характеристики инструмента и его геометрии, режима резания, СОТС и т.д.) при обработке заготовок на металлорежущих станках в качестве целевой функции принимается себестоимость операции, которая может быть определена по формуле, приведенной, например, в работе [2].

При проектировании технологического процесса изготовления детали большое значение имеет правильный выбор периода стойкости режущего инструмента для каждой операции. В зависимости от конкретных условий и задач производства могут использоваться различные периоды стойкости:  $T_{\max}$  – максимальный период стойкости, мин;  $T_{\text{opt}}$  – период стойкости, соответствующий оптимальной скорости резания, мин;  $T_{\text{эк}}$  – экономический период стойкости,

соответствующий минимальной себестоимости операции;  $T_{\text{н.пр}}$  – период стойкости, соответствующий наибольшей (максимальной) производительности. В условиях производства наиболее часто используют экономический период стойкости и период стойкости, соответствующий наибольшей производительности:

$$T_{\text{эк}} = \frac{1-m}{m} \left( t_c + \frac{\mathcal{E}_u}{E} \right); \quad T_{\text{н.пр}} = \frac{1-m}{m} \cdot t_c,$$

где  $m$  – показатель относительной стойкости инструмента.

Работа с максимальной производительностью, как правило, не соответствует минимальной себестоимости обработки. В связи с этим определение рационального режима резания должно основываться на экономическом периоде стойкости. Обработка заготовок на режимах, соответствующих наибольшей производительности, в условиях производства ведется лишь в случаях крайней необходимости, когда требуется, не считаясь с затратами, изготовить максимально возможное количество деталей. Режимы резания, рассчитанные с использованием экономических периодов стойкости инструментов и обеспечивающие наименьшее время обработки, будут одновременно и наиболее экономичными [4].

Поэтому в качестве целевой функции при фрезеровании целесообразно использовать уравнение, определяющее машинное время обработки.

Уравнение целевой функции при однопроходном фрезеровании концевыми фрезами будет иметь вид

$$f_m = \frac{L}{S_m} = \frac{L}{n_\phi S_z z}, \quad (1)$$

где  $L$  - длина рабочего хода фрезы, мм;  $n_\phi$  - частота вращения фрезы, об/мин;  $S_m$  - минутная подача, мм/мин;  $S_z$  - продольная подача, мм/зуб;  $z$  - число зубьев фрезы.

В свою очередь

$$L = l_m + l_1 + l_2,$$

где  $l_m$  - длина пути фрезы в направлении подачи, мм;  $l_1$  - путь врезания фрезы, мм;  $l_2$  - перебега фрезы, мм.

Путь врезания фрезы при концевом фрезеровании составляет [1]

$$l_1 = 0,5D_\phi \sin \psi,$$

где  $D_\phi$  - диаметр концевой фрезы, мм;  $\psi = \arccos(1 - 2t_\phi/D_\phi)$ ;  $t_\phi$  - глубина фрезерования, мм.

Величина перебега фрезы обычно не превышает 1...5 мм.

**Ограничение, связанное с режущими свойствами инструмента**

Скорость резания при концевом фрезеровании определяется из условия полного использования режущих свойств инструмента на основании неравенства:

$$v \leq v_m, \quad (2)$$

где  $v$  - скорость резания, м/мин;  $v_m$  - максимально допустимая скорость резания при заданной стойкости концевой фрезы, м/мин.

Подставив значения  $v$  и  $v_m$ , определяемые по формулам  $v = \frac{\pi D_\phi n_\phi}{1000}$ ,  $v_m = \frac{C_v D_\phi^{q_v}}{T^m S_z^{y_v} t_\phi^{x_v} B^{u_v} z^{p_v}}$ , в неравенство (2) и решая его относительно  $n_\phi S_z t_\phi$ , получим первое техническое ограничение:

$$n_\phi (100S_z)^{y_v} (100t_\phi)^{x_v} \leq \frac{318C_v D_\phi^{(q_v-1)} 100^{(x_v+y_v)}}{T^m B^{u_v} z^{p_v}}, \quad (3)$$

где  $C_v$  - коэффициент, характеризующий условия обработки;  $T$  - заданный период стойкости фрезы, мин;  $B$  - ширина фрезерования, мм;  $m, x_v, y_v, q_v, u_v, p_v$  - показатели степени, характеризующие соответственно влияние  $T, t_\phi, S_z, D_\phi, B, z$  на скорость резания.

В неравенстве (3) и последующих технических ограничениях для удобства вычислений принято вместо  $S_z \rightarrow 100S_z$ , а вместо  $t_\phi \rightarrow 100t_\phi$ , с соответствующими поправками в правой части.

**Ограничение, связанное с мощностью станка**

При фрезеровании заготовок, как и при других видах механической обработки, проводимой на металлорежущих станках, необходимо, чтобы эффективная мощность  $N_{эф}$  не превышала мощности, подводимой к шпинделю станка, то есть выполнялось условие [5]:

$$N_{эф} \leq 1,2N_{ин}, \quad (4)$$

где  $N_{эф}$  - эффективная мощность, кВт;  $N_{ин}$  - мощность, подводимая к шпинделю станка, кВт.

Для определения эффективной мощности при концевом фрезеровании за основу могут быть использованы формулы, приведенные в [1, 3]. Эти формулы можно представить в общем виде:

$$N_{эф} = C_N 10^{-5} D_\phi^{q_N} S_z^{y_N} t_\phi^{x_N} B z^{p_N} k_{N1} k_{N2}, \quad (5)$$

где  $C_N$  - коэффициент, характеризующий условия обработки при фрезеровании концевыми фрезами, для которых была получена вышеприведенная эмпирическая зависимость;  $k_{N1} = \left(\frac{\sigma_6}{750}\right)^{0,3}$ ,  $k_{N2}$  - поправочные коэффициенты, учитывающие соответственно влияние прочности обрабатываемого материала и величины переднего угла на эффективную мощность резания;  $x_N, y_N, q_N, z_N$  - показатели

степени, характеризующие соответственно влияние  $t_\phi$ ,  $S_z$ ,  $n_\phi$ ,  $D_\phi$  на мощность.

Подставим в неравенство (4) выражение (5) и  $N_{ум} = N_{эд}\eta$ . После решения неравенства относительно  $n_\phi S_z t_\phi$  второе техническое ограничение получим в следующем виде:

$$n_\phi^{z_N} (100S_z)^{y_N} (100t_\phi)^{x_N} \leq \frac{1,2N_{эд}\eta 100^{(x_N+y_N)}}{C_N 10^{-5} D_\phi^{q_N} Bz k_{N1} k_{N2}}, \quad (6)$$

где  $N_{эд}$  - мощность электродвигателя механизма главного движения станка, кВт;  $\eta$  - КПД кинематической цепи механизма главного движения.

**Обобщенное ограничение, учитывающее марку обрабатываемого и инструментального материалов, жесткость упругой системы, шероховатость обработанной и форму обрабатываемой поверхностей**

При концевом фрезеровании различных групп материалов величина подачи, приходящаяся на один зуб фрезы, не должна превышать значения, определяемого из неравенства:

$$S_z \leq \frac{C_S D_\phi^{q_S} k_{S1} k_{S2} k_{S3} k_{S4}}{t_\phi^{x_S} B^{u_S}}, \quad (7)$$

где  $C_S$  - коэффициент, характеризующий уровень подачи;  $k_{S1}$  - коэффициент, учитывающий жесткость упругой технологической системы;  $k_{S2}$  - коэффициент, учитывающий инструментальный материал;  $k_{S3}$  - коэффициент, учитывающий шероховатость обработанной поверхности;  $k_{S4}$  - коэффициент, учитывающий форму обрабатываемой поверхности;  $x_S$ ,  $q_S$ ,  $u_S$  - показатели степени, характеризующие соответственно влияние  $t_\phi$ ,  $D_\phi$ ,  $B$  на величину подачи.

После решения (7) относительно  $S_z$ ,  $t_\phi$  третье техническое ограничение будет иметь вид:

$$(100S_z)(100t_\phi)^{x_S} \leq \frac{C_S D_\phi^{q_S} (100)^{(1+x_S)} k_{S1} k_{S2} k_{S3} k_{S4}}{B^{u_S}}. \quad (8)$$

**Ограничение, связанное с температурой резания при фрезеровании**

При чистовом концевом фрезеровании температура в зоне резания, а также время нагрева и охлаждения могут быть достаточными для того, чтобы в поверхностном слое произошли структурные и фазовые превращения. В связи с этим необходимо, чтобы температура в зоне контакта фрезы с заготовкой не превышала критических значений, то есть выполнялось условие:

$$\theta \leq \theta_{кр}, \quad (9)$$

где  $\theta$  - температура в зоне резания, °С;  $\theta_{кр}$  - критическая температура в зоне резания, °С.

Температура в зоне резания при фрезеровании заготовок концевыми фрезами может быть определена по эмпирической зависимости:

$$\theta = C_\theta v^{z_\theta} S_z^{y_\theta} B^{u_\theta} \left( \frac{t_\phi}{D_\phi} \right)^{x_\theta}, \quad (10)$$

где  $C_\theta$  - коэффициент, отражающий влияние условий обработки на температуру в зоне резания при фрезеровании;  $x_\theta$ ,  $u_\theta$ ,  $y_\theta$ ,  $z_\theta$  - показатели степени, характеризующие интенсивность влияния соответственно  $t_\phi$ ,  $B$ ,  $S_z$  и  $v$  на величину температуры резания.

Подставив зависимость (10) и формулу для расчета скорости резания в неравенство (9) и решив его относительно  $n_\phi S_z t_\phi$ , получим четвертое техническое ограничение:

$$n_\phi^{z_\theta} (100S_z)^{y_\theta} (100t_\phi)^{x_\theta} \leq \frac{318^{z_\theta} \cdot 100^{(x_\theta+y_\theta)} \theta_{кр}}{C_\theta D_\phi^{(z_\theta-x_\theta)} B^{u_\theta}}. \quad (11)$$

**Ограничения, связанные с кинематическими возможностями станка, используемого для фрезерования**

При обработке заготовки частота вращения концевой фрезы и минутная подача стола станка должны быть ограничены наибольшим и наименьшим

числом оборотов шпинделя и наибольшей и наименьшей подачами, приведенными в паспорте станка. Тогда технические ограничения, обусловленные кинематическими возможностями станка, будут иметь вид:

$$n_{\phi} \geq n_{cm \min}, \quad (12)$$

где  $n_{cm \min}$  - минимальная частота вращения шпинделя станка, об/мин;

$$n_{\phi} \leq n_{cm \max}, \quad (13)$$

где  $n_{cm \max}$  - максимальная частота вращения шпинделя станка, об/мин;

$$S_m \geq S_{m.cm \min},$$

где  $S_{m.cm \min}$  - минимальная минутная подача станка, мм/мин. Учитывая, что  $S_m = n_{\phi} S_z z$ , в окончательном виде седьмое ограничение будет иметь вид:

$$n_{\phi} (100 S_z) \geq \frac{100 S_{m.cm \min}}{z}; \quad (14)$$

$$S_m \leq S_{m.cm \max};$$

$$n_{\phi} (100 S_z) \leq \frac{100 S_{m.cm \max}}{z}, \quad (15)$$

где  $S_{m.cm \max}$  - максимальная минутная подача станка, мм/мин.

### **Ограничения, связанные с глубиной резания**

При концевом фрезеровании глубина резания  $t_{\phi}$  не может быть меньше некоторой определенной для каждого инструмента и обрабатываемого материала величины  $t_{\phi.min}$ .

С другой стороны глубина резания не может быть больше  $t_{\phi.max}$ , которая равна диаметру фрезы. Тогда технические ограничения, обусловленные глубиной резания, будут иметь вид

$$100 t_{\phi} \geq 100 t_{\phi.min}; \quad (16)$$

$$100 t_{\phi} \leq 100 t_{\phi.max}. \quad (17)$$

### **Ограничения, связанные с результатами исследования кинетики тепловых процессов**

Возникновение структурных и фазовых превращений в поверхностном слое заготовок связано не только с температурой в зоне резания, но также со скоростью его нагрева и в большей степени со скоростью охлаждения.

При фрезеровании скорость охлаждения заготовок зависит от скорости подачи СОЖ в зону резания и от скорости резания. Увеличение скорости резания на операциях фрезерования, во-первых, приводит к повышению температуры в зоне резания за счет увеличения общего тепловыделения  $Q = P_z v$ , во-вторых, как правило, к небольшому уменьшению главной составляющей силы резания  $P_z$  и, в-третьих, к росту скорости охлаждения.

При постоянной скорости подачи СОЖ в зону резания ограничения, обусловленные результатами исследования кинетики тепловых процессов, основаны на использовании диаграмм, связывающих метастабильные диаграммы состояния материалов со скоростью резания [6]. Исходя из этих диаграмм, производительная обработка материалов при гарантированном отсутствии структурных и фазовых изменений в поверхностном слое возможна в том случае, если выполняются условия:

$$v \geq v_{pr. \text{наим}}; \quad (18)$$

$$v \leq v_{pr. \text{наиб}}; \quad (19)$$

где  $v_{pr. \text{наим}}$  - наименьшая предельная допустимая скорость резания, м/мин;  $v_{pr. \text{наиб}}$  - наибольшая предельная допустимая скорость резания.

Наименьшая предельная допустимая скорость резания при чистовом фрезеровании связана с требованиями, предъявляемыми к производительности и качеству обработки, а наибольшая предельная допустимая скорость резания обусловлена требованиями, предъявляемыми к себестоимости обработки.

Решив неравенства (18) и (19) относительно  $n_{\phi}$ , предварительно представив в них  $v$ , как  $\frac{\pi D_{\phi} n_{\phi}}{1000}$ , получим шестое и седьмое технические ограничения:

$$n_{\phi} \geq \frac{1000v_{\text{пр.наим}}}{\pi D_{\phi}}; \quad (20)$$

$$n_{\phi} \leq \frac{1000v_{\text{пр.наиб}}}{\pi D_{\phi}}. \quad (21)$$

Выбранные и описанные выше технические ограничения, отражающие с определенной степенью точности физический процесс резания в совокупности с целевой функцией, позволяют построить математическую модель для определения рациональных условий обработки.

Преобразуем полученные выше неравенства, связывающие технические ограничения с элементами режима резания, а также целевую функцию в линейные ограничения-неравенства и линейную целевую функцию. Решение полученной системы линейных уравнений при заданных определяющих и управляемых параметрах позволит на стадии проектирования технологического процесса определить рациональные условия обработки для операций чистового концевое фрезерования и гарантированно обеспечивать при этом заданное значение конструктивных параметров. Для получения системы линейных ограничений-неравенств и линейной целевой функции, моделирующих процессы концевое фрезерования заготовок, прологарифмируем зависимости (3), (6), (8), (11)-(17), (20), (21) и (1), которые после введения обозначений будут иметь вид:

$$f_0 = c_0 - x_1 - x_2,$$

где  $x_1 = \ln n_{\phi}$ ;  $x_2 = \ln(100S_z)$ ;  $x_3 = \ln(100 t_{\phi})$ ;

$$b_1 = \ln \frac{318C_v D_{\phi}^{(q_v-1)} 100^{(x_v+y_v)}}{T^m B^{u_v} z^{p_v}};$$

$$b_2 = \ln \frac{1,2N_{\text{эд}} \eta 100^{(x_N+y_N)}}{C_N 10^{-5} D_{\phi}^{q_N} Bz k_{N1} k_{N2}};$$

$$b_3 = \ln \frac{C_S D_{\phi}^{q_S} (100)^{(1+x_S)} k_{S1} k_{S2} k_{S3} k_{S4}}{B^{u_S}};$$

$$b_4 = \ln \frac{318z_{\theta} 100^{(x_{\theta}+y_{\theta})} \theta_{\text{кр}}}{C_{\theta} D_{\phi}^{(z_{\theta}-x_{\theta})} B^{u_{\theta}}};$$

$$b_5 = \ln n_{\text{cm min}}; \quad b_6 = \ln n_{\text{cm max}};$$

$$b_7 = \ln \frac{100S_{\text{м.см min}}}{z};$$

$$b_8 = \ln \frac{100S_{\text{м.см max}}}{z}; \quad b_9 = \ln(100 t_{\phi, \text{min}});$$

$$b_{10} = \ln(100 t_{\phi, \text{max}});$$

$$b_{11} = \ln \frac{1000v_{\text{пр.наим}}}{\pi D_{\phi}}; \quad b_{12} = \ln \frac{1000v_{\text{пр.наиб}}}{\pi D_{\phi}};$$

$$f_0 = \ln f_m; \quad c_0 = \ln A = \ln \left( \frac{100L}{z} \right).$$

Полученная система линейных ограничений-неравенств (22) и линейная функция  $f_0$  представляют собой математическую модель для определения рациональных режимов резания при фрезеровании заготовок концевыми фрезами на чистовых операциях.

Решение задачи может быть упрощено за счет приведения системы (22) к трем неизвестными к системе с двумя неизвестными, в результате чего аналитическое и графическое решение задачи осуществляется в двумерном пространстве. Для проведения

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 + y_v x_2 + x_v x_3 \leq b_1; \\ z_N x_1 + y_N x_2 + x_N x_3 \leq b_2; \\ x_2 + x_s x_3 \leq b_3; \\ z_{\theta} x_1 + y_{\theta} x_2 + x_{\theta} x_3 \leq b_4 \\ x_1 \geq b_5; \\ x_1 \leq b_6; \\ x_1 + x_2 \geq b_7; \\ x_1 + x_2 \leq b_8; \\ x_3 \geq b_9; \\ x_3 \leq b_{10}; \\ x_1 \geq b_{11}; \\ x_1 \leq b_{12}; \end{array} \right. \quad (22)$$

преобразований выразим  $x_1$  из ограничения-неравенства, связанного с режущими свойствами инструмента, которые в значительной мере определяются его стойкостью:

$$x_1 = b_1 - y_v x_2 - x_v x_3,$$

и подставим его значение во все остальные неравенства системы (22). При фрезеровании ограничение, связанное с режущими свойствами инструмента, является одним из основных ограничений. В результате получим новую систему, содержащую два неизвестных  $x_2$  и  $x_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (y_N - y_v z_N)x_2 + (x_N - x_v z_N)x_3 \leq b_2 - z_N b_1; \\ x_2 + x_v x_3 \leq b_3; \\ (y_\theta - y_v z_\theta)x_2 + (x_\theta - x_v z_\theta)x_3 \leq b_4 - z_\theta b_1 \\ - y_v x_2 - x_v x_3 \geq b_5 - b_1; \\ - y_v x_2 - x_v x_3 \leq b_6 - b_1; \\ (1 - y_v)x_2 - x_v x_3 \geq b_7 - b_1; \\ (1 - y_v)x_2 - x_v x_3 \leq b_8 - b_1; \\ x_3 \geq b_9; \\ x_3 \leq b_{10}; \end{array} \right. \quad (23)$$

$$f_0 = (c_0 - b_1) + (y_v - 1)x_2 + x_v x_3.$$

Так как в условиях конкретной задачи  $c_0 - b_1$  является величиной постоянной, то целевая функция  $f_0$  достигнет наименьшего значения в том случае, когда неизвестное  $x_2$  примет максимально ( $(y_v - 1)$  - отрицательная величина), а  $x_3$  - минимально допустимые значения, удовлетворяющие системе ограничений (23).

Таким образом, получена математическая модель, позволяющая

определить наивыгоднейшие условия обработки на чистовых операциях концевого фрезерования заготовок.

### Библиографический список

1. Баранчиков, В.И. Прогрессивные режущие инструменты и режимы резания металлов: Справочник [Текст] / В.И. Баранчиков, А.В. Жаринов, Н.Д. Юдина [и др.]; Под общ. ред. В.И. Баранчикова. - М.: Машиностроение, 1990. - 400 с.
2. Бобров, В.Ф. Основы теории резания металлов [Текст] / В.Ф. Бобров - М.: Машиностроение, 1975. - 344 с.
3. Волков, А.Н. Режимы резания авиационных материалов при фрезеровании: Учебное пособие [Текст] / А.Н. Волков - Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 1994.- 90 с.
4. Горанский, Г.К. Расчет режимов резания при помощи электронно-вычислительных машин [Текст] / Г.К. Горанский - Минск: Госиздательство БССР, 1963.- 192 с.
5. Локтев, А.Д. Общемашиностроительные нормативы режимов резания: Справочник: В 2-х т.: Т. 1 [Текст] / А.Д. Локтев, И.Ф. Гуцин, В.А. Батуев [и др.] - М.: Машиностроение, 1991. - 640 с.
6. Ласточки, Д.А. Совершенствование метода определения рациональных условий формообразования поверхностей на окончательных операциях механической обработки заготовок / Д.А. Ласточкин, Д.Л. Скуратов // Вестник Самар. гос аэрокосм. ун-та, 2006. - №2 (10). - Ч.1.- С. 197-202.

## LINEAR MATHEMATICAL MODEL FOR THE DETERMINATION OF RATIONAL TREATMENT CONDITIONS ON THE FINISHING END MILLING OPERATIONS IN THE MANUFACTURE OF AIRCRAFT PARTS

© 2012 D. L. Skuratov

Samara State Aerospace University  
named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

The mathematical model is submitted for definition of rational conditions of processing at the end-milling, consisting of linear objective function and linear restrictions – inequalities. As objective function the equation

determining machine time of processing is used, and as restrictions – inequalities, the restrictions connected in functional parameters and parameters, determining quality of processing.

*End milling, mathematical model, objective function, engineering constraints, efficient conditions of treatment.*

### **Информация об авторе**

**Скуратов Дмитрий Леонидович**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой механической обработки материалов, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет). E-mail: [skuratov.sdl56@yandex.ru](mailto:skuratov.sdl56@yandex.ru). Область научных интересов: структурно-параметрическая оптимизация технологических процессов механической обработки, процессы абразивной обработки и поверхностно-пластического деформирования

**Skuratov Dmitry Leonidovich**, Doctor of Engineering, Professor, the Head of department mechanical processing of materials, Samara State Aerospace University named after academician S.P. Korolyov (National Research University). E-mail: [skuratov.sdl56@yandex.ru](mailto:skuratov.sdl56@yandex.ru). Area of research: structure and parameter optimization of processes related to mechanical operations, abrasive machining, and surface plastic strain.