

УДК 539.319

СТЕСНЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ В КОРНЕВОМ СЕЧЕНИИ МОДЕЛИ КЕССОНА КРЫЛА ПРИ КРУЧЕНИИ

© 2012 В. И. Корольков

Воронежский государственный технический университет

В трёхмерной постановке представлено решение упругой задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошного защемлённого стержня произвольного поперечного сечения, нагруженного сосредоточенным крутящим моментом на свободном конце.

Перемещения, деформации, напряжения, стеснённое сечение.

Ограничение перемещений в одном из поперечных сечений \square подверженного крутящему моменту стержня вызывает местный всплеск напряжений и носит название эффекта Сен-Венана. Так как эта зона с точки зрения прочности конструкций является наиболее опасной, то определение уровня напряжений необходимо для повышения несущей способности подобных деталей. Подобных зон в конструкции летательного аппарата значительное число, но наиболее опасной и высоконагруженной является зона крепления кессона крыла к центроплану. В связи с тем, что в этой зоне наблюдается значительное изменение жёсткости, то происходит сингулярный всплеск напряжений. Точное знание напряжений в этой зоне необходимо для правильного выбора конструктивного решения. Существующие методы расчёта дают лишь приближённую оценку. Численные методы дают в этой зоне неустойчивое решение. Для выбора оптимального решения необходимо обладать достаточно простым, достоверным решением, позволяющим также оценить и качественную картину напряжений и деформаций.

Так как в данной зоне однозначно возникает трёхмерное напряжённо-деформированное состояние (НДС), то в качестве первого приближения рассмотрим модель в виде сплошного упругого стержня и оценим НДС вблизи стеснённого поперечного сечения при кручении сосредоточенным моментом.

1. Постановка задачи

Пусть стержень имеет произвольное поперечное сечение. Боковая поверхность свободна от внешних усилий. Один торец стержня полностью неизменяем. К другому торцу приложена произвольная система сил, статически эквивалентная действию крутящего момента $M_{кр}$. Начало декартовой системы координат xOy расположено в центре тяжести неизменяемого сечения, а ось z прямолинейна и проходит через центры тяжести поперечных сечений.

При отсутствии массовых сил перемещения произвольной точки данного тела должны удовлетворять уравнениям Ламе:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где u_i – перемещения произвольной точки стержня, вызванные его деформацией;
 $\lambda = Ev/(1+\nu)(1-2\nu)$, $\mu = E/2(1+\nu)$ – коэффициенты Ламе;

E , \square – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Также должны удовлетворяться граничные условия на боковой поверхности:

$$\sigma_{ij} n_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

и на торцах стержня:

$$z = 0; \quad u_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$z = l; \quad \iint_{\Omega} x \sigma_{33} d\Omega = M_y, \quad \iint_{\Omega} (x \sigma_{23} - y \sigma_{13}) d\Omega = 0, \quad (1.3)$$

$$\iint_{\Omega} y \sigma_{33} d\Omega = \iint_{\Omega} \sigma_{13} d\Omega = \iint_{\Omega} \sigma_{23} d\Omega = \iint_{\Omega} \sigma_{33} d\Omega = 0,$$

где σ_{ij} – составляющие тензора напряжений,

n_j – направляющие косинусы нормали к поверхности;

\square – площадь поперечного сечения,

l – длина стержня.

Требуется определить напряжённое и деформированное состояния стержня.

2. Метод решения

Известно, что вблизи стеснённого сечения возникает всплеск напряжений, имеющий затухающий экспоненциальный характер вдоль продольной координаты z . На удалении от стеснённого сечения существует однородное напряжённое состояние. Следовательно, используя концепцию пограничного слоя, можно получить асимптотическое решение, называемое внутренним, вблизи стеснённого сечения и срастить его по методу Ван-Дайка [1] с внешним решением для однородного напряжённого состояния. В качестве внешнего решения можно использовать любое известное решение для стержня заданной геометрии.

Для построения внутреннего разложения введём внутреннюю переменную

$$\chi = \frac{1}{k}(1 - e^{-nz}), \tag{2.1}$$

где k – малый параметр, характеризующий относительное сужение стержня; n – некоторая константа.

Запишем внутреннее разложение перемещений в виде ряда, обозначив $u = u_1, v = u_2, w = u_3$:

$$\begin{aligned} u^i &= ku_1^i(x, y, \chi) + k^2 u_2^i(x, y, \chi), \\ v^i &= kv_1^i(x, y, \chi) + k^2 v_2^i(x, y, \chi), \\ w^i &= kw_1^i(x, y, \chi) + k^2 w_2^i(x, y, \chi). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Затем, произведя замену переменных в уравнениях (1.1) и подставив в них разложения (2.2), получим, приравняв члены при одинаковых степенях k , систему шести уравнений.

Решение первых трёх уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (1.3) при $z=0$, будет иметь вид:

$$u_1 = a_1(x, y)\chi; \quad v_1 = b_1(x, y)\chi; \quad w_1 = c_1(x, y)\chi. \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в оставшиеся уравнения системы и, удовлетворяя граничным условиям (1.3) на торце $z=0$, получим выражения для перемещений.

Неизвестные функции поперечных координат $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ можно определить из условий срачивания внешнего и внутреннего (2.2) разложений:

$$(u^0)^i = (u^i)^0; \quad (v^0)^i = (v^i)^0; \quad (w^0)^i = (w^i)^0, \tag{2.4}$$

где индекс “ i ” означает разложение по внутренней координате (2.1), а “0” – по внешней координате z .

Записав условие срачивания (2.4) и приравняв члены одного порядка k , получим шесть уравнений относительно шести неизвестных функций, решением которых получим внутреннее разложение.

Далее, используя процедуру срачивания [1], можно получить составное равномерно пригодное для всего стержня решение. Однако составное решение может быть не единственным. Отличаться решения могут в зоне срачивания. Выбор определённым образом константы n , введённой во внутреннюю переменную (2.1), даёт возможность определить составное разложение единственным образом.

Логично использовать для этого принцип минимума потенциальной энергии деформации стержня [2]:

$$\delta \mathcal{E} / \delta n = 0, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{E} = \int_0^l \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{i,j} \varepsilon_{i,j} d\Omega dl$ – потенциальная энергия деформации стержня; ε_{ij} – составляющие тензора деформаций.

Уравнение (2.5) однозначно определяет константу n , которая является характеристикой эффекта стеснения.

3. Решение

Пространственная задача свободного кручения сплошных слабokonических стержней произвольного поперечного сечения решена Д.Ю.Пановым [3] методом малого параметра. Поэтому используем это решение в качестве внешнего разложения.

Так же, как и в работе [3], будем рассматривать стержень, боковая поверхность которого определяется уравнением:

$$f(x(1 - kz), y(1 - kz)) = 0. \tag{3.1}$$

$f(\xi, \eta) = 0$, если ввести вспомогательные переменные $\xi = x(1 - kz)$ и $\eta = y(1 - kz)$. Третья вспомогательная переменная ζ совпадает с осью z .

В качестве малого параметра используем величину относительного изменения поперечных размеров на единицу

длины стержня или относительное сужение стержня k . Будем считать в дальнейшем величину k настолько малой, что величиной k^2 можно пренебрегать по сравнению с k , если это специально не оговорено.

Во внутреннее разложение перемещений вида (2.2), учитывая в нём k второго порядка малости, подставим компоненты перемещений и получим внутреннее разложение с шестью неизвестными функциями. Для определения этих неизвестных функций необходимо использовать условия сращивания (2.4). Для этого приравняем внутреннее разложение, выраженное через внешнюю переменную z , и внешнее разложение [3] по внутренней переменной χ . Приравняв члены с одинаковыми степенями k , найдём неизвестные функции.

Составное решение, удовлетворяющее поставленной задаче на всем отрезке $[0, l]$, будет определяться следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} u &= u^0 + u^i - (u^i)^0, \\ v &= v^0 + v^i - (v^i)^0, \\ w &= w^0 + w^i - (w^i)^0. \end{aligned}$$

Подставив разложения перемещений, получим равномерно пригодное решение задачи с точностью до k^2 :

$$\begin{aligned} u &= -\tau y z + \frac{\tau}{3n} \left(y + \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) (1 - e^{-nz}) e^{-nz} + \\ &+ 2k\tau y z^2 + k\tau P_1(1 - e^{-nz}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} v &= -\tau x z + \frac{\tau}{3n} \left(x - \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) (1 - e^{-nz}) e^{-nz} - \\ &- 2k\tau x z^2 + k\tau P_2(1 - e^{-nz}), \\ w &= \frac{2}{3} \tau \Phi(1 - e^{-nz}) + \frac{1}{3} \tau \Phi(1 - e^{-nz})^2 + k\tau P_3(x, y), \end{aligned}$$

где τ - относительное закручивание стержня на единицу длины;

$$P_1(x, y) = -\frac{1}{2} y(x^2 + y^2) + x\Phi(x, y) - (1 - 2\nu) \left(\int_0^x \Phi dx + h_1(y) \right);$$

$$P_2(x, y) = -\frac{1}{2} x(x^2 + y^2) + y\Phi(x, y) - (1 - 2\nu) \left(\int_0^y \Phi dy + h_2(x) \right);$$

$$P_3(x, y) = -2\Phi(x, y) - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi}{\partial y};$$

$\Phi(x, y)$ - функция кручения.

Используя известные формулы линейной теории упругости, находим напряжения, соответствующие полученной системе перемещений (3.2)

Условие (2.5) даёт возможность однозначно определить константу n .

Таким образом, выражениями перемещений (3.2) и напряжений полностью определяют решение задачи стеснённого кручения стержня заданной геометрии.

4. Призматический стержень

Полученное решение показывают, что при стеснённом кручении стержней малой конусности все напряжения и перемещения отличны от нуля. Рассмотрим теперь предельный случай перехода слабokonического стержня в призматический, устремив в решениях параметр k к нулю.

Тогда получим для призматических стержней перемещения в виде:

$$\begin{aligned} u &= -\tau y z + \frac{1}{3n} \tau \left(y - \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) (1 - e^{-nz}) e^{-nz}, \\ v &= -\tau x z - \frac{1}{3n} \tau \left(x - \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) (1 - e^{-nz}) e^{-nz}, \\ w &= \frac{2}{3} \tau \Phi(1 - e^{-nz}) + \frac{1}{3} \tau \Phi(1 - e^{-nz})^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Получаем, что и призматический стержень в зоне стеснения имеет сложное напряжённое состояние. На удалении от этой зоны e^{-nz} стремится к нулю и выражения (3.3) дают решение Сен-Венана.

Если рассмотреть закреплённое сечение ($z=0$), то получим, что здесь нормальные напряжения могут даже превышать касательные, а касательное напряжение σ_{12} , как и следовало ожидать, равно нулю. Наибольшим из нормальных напряжений будет продольное напряжение σ_{33} .

Например, при коэффициенте Пуассона $\nu=1/3$ продольное нормальное напряжение σ_{33} будет в два раза больше поперечных.

5. Стержни частных видов поперечных сечений

Рассмотрим подробнее решение задачи для некоторых конкретных областей поперечного сечения □.

Пусть область □ представляет собой эллипс с полуосями a и b в сечении $Z=0$ и определяется уравнением:

$$f(\xi, \eta) = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1,$$

где $\xi = X(1 - KZ)$, $\eta = Y(1 - KZ)$.

Функция кручения для данной области, как известно, имеет вид

$$\Phi(\xi, \eta) = C\eta\xi,$$

где $C = -(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$

Относительный угол закручивания стержня на единицу длины равен

$$\tau = \frac{M_Z(a^2 + b^2)}{\pi\mu a^3 b^3}.$$

Используя формулы (3.2), запишем выражения для перемещений:

$$u = -\gamma Z(1 - 2KZ) + \frac{1}{3n} \gamma \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} C \right) (1 - e^{-nZ}) e^{-nz} + K\tau C \gamma \left[x^2 - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \left(x^2 - \frac{1}{3} y^2 \right) \right] (1 - e^{-nz}) - \frac{1}{2} K\tau \gamma (x^2 + y^2) \cdot (1 - e^{-nz}), \quad (5.1)$$

$$v = \alpha Z(1 - 2KZ) - \frac{1}{3n} \alpha \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\lambda + \mu}{\mu} C \right) (1 - e^{-nZ}) e^{-nz} + K\tau C \alpha \left[y^2 - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \left(y^2 - \frac{1}{3} x^2 \right) \right] (1 - e^{-nz}) + \frac{1}{2} K\tau \alpha (x^2 + y^2) \cdot (1 - e^{-nz}),$$

$$\omega = \frac{2}{3} \tau C \gamma (1 - e^{-nZ}) + \frac{1}{3} \tau C \gamma (1 - e^{-nZ})^2 - 4K\tau C \gamma z.$$

Для нахождения коэффициента n запишем уравнение (2.5), представляющее алгебраическое уравнение четвертой степени. Разрешить это уравнение относительно n не представляет труда. Решению задачи удовлетворяет только действительный положительный корень.

Параметр n является важной характеристикой эффекта стеснения, обуславливающей не только величину зоны распространения краевого эффекта от стеснения, но и интенсивность и характер изменения напряжений в этой зоне. Кроме того, параметр n даёт возможность проводить качественный анализ

напряжённо-деформированного состояния материала в области влияния эффекта стеснения от геометрических размеров стержня, и характеристик материала. Параметр n , а следовательно и эффект стеснения, в случае призматического стержня не зависит от его длины, что подтверждает тем самым гипотезу Сен-Венана. Конусность же имеет некоторое, но не сильное, влияние на параметр n . Уменьшение же нормального напряжения σ_{33} в стеснённом сечении $Z=0$ с увеличением конусности подтверждает вывод Е.П.Гроссмана [5] о том, что эффект стеснения и эффект конусности создают при кручении нормальные напряжения разных знаков.

Зависимости коэффициента n от отношения полуосей эллипса при кручении призматического стержня дают возможность сделать некоторые качественные выводы: во-первых, коэффициент n имеет минимальное значение при $b/a=0.85-0.9$, т.е. стержни с таким соотношением полуосей имеют наибольшую зону распространения краевого эффекта от стеснения; во-вторых, с увеличением коэффициента Пуассона зона краевого эффекта, в связи с возрастанием n , уменьшается, а нормальные напряжения несколько возрастают; в-третьих, у круглого стержня ($b/a \rightarrow 1$) и очень тонкой пластинки ($b/a \rightarrow 0$), как и следовало ожидать, эффект стеснения исчезает, т.к. коэффициент $n \rightarrow \infty$.

Сравнение графиков распределения нормального безразмерного напряжения $\sigma_{33}^* = \sigma_{33} a^3 / M_Z$ вдоль призматического стержня эллиптического сечения при следующих расчётных данных: $\nu=0.32$, $b/a=0.5$, $a/b=0.25$, $x/a=0.75$, $y/a=-0.33$ (рис. 1) показывает, что σ_{33}^* имеет одинаковый характер поведения во всех трёх сравниваемых решениях. Расхождение наблюдается в численных значениях и достигает между представленным в работе решением и решением Н.В.Зволинского [6] в стесненном сечении 25%. С результатами А.Феппля [2] различие значительно меньше.

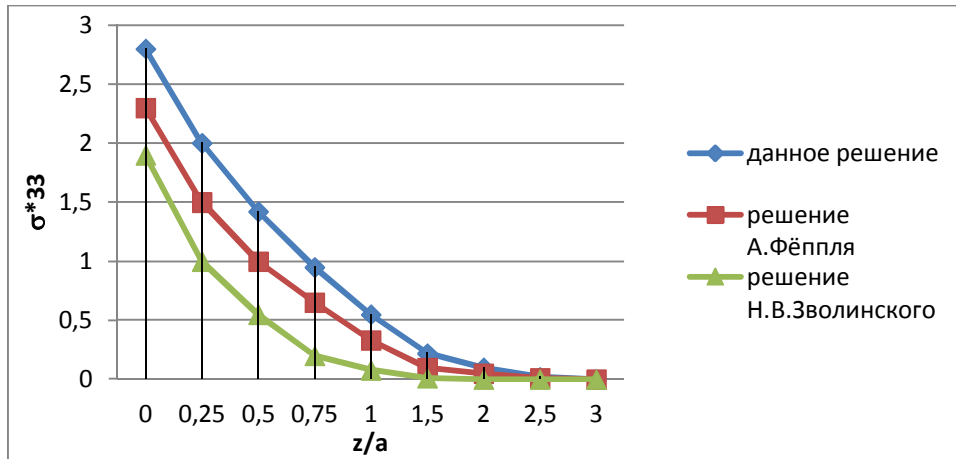


Рис. 1. Сравнительные графики распределения безразмерного продольного нормального напряжения σ_{33}^* при кручении эллиптического стержня

Решения Н.В.Зволинского, А.Фёппля и С.П.Тимошенко [7] не удовлетворяют всем уравнениям статической теории упругости. В первом решении не удовлетворяются точно уравнения равновесия, а в других двух решениях не выполняются условия совместности деформаций, т.е. они являются приближёнными решениями. Решение, представленное в данной работе, имеет более общий характер, т.к. оно справедливо для стержней произвольного поперечного

сечения, как призматических, так и имеющих отклонение от призматичности.

На рис.2 даны сравнительные графики распределения безразмерных нормальных и касательных напряжений $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} \cdot a^3 / M_z$ вдоль оси z при кручении призматического эллиптического стержня. Расчётные данные прежние. Нормальное поперечное напряжение σ_{22}^* будет равно σ_{11}^* , т.к. стержень имеет постоянное по длине сечение.

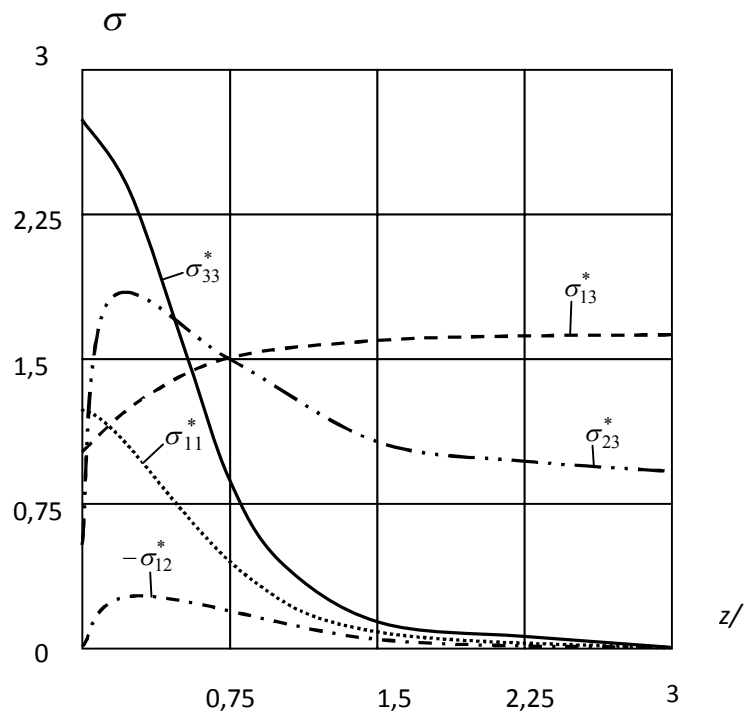


Рис. 2. Сравнительные графики распределения нормальных и касательных напряжений вдоль оси z при кручении стержня эллиптического поперечного сечения

Таким образом, так как для многих видов поперечных сечений функция кручения $\Phi(\xi, \eta)$ известна, то, следовательно, для них также несложно записать выражения для перемещений и напряжений при стесненном кручении.

С целью проверки полученного аналитического решения было проведено экспериментальное изучение распределения напряжений, порождаемых эффектом стеснения, в сплошных стержнях. Использовался метод фотоупругости [8] в связи с тем, что с его помощью представляется возможность получения полной картины напряжений. Для получения картин полос использовался метод замораживания на моделях прямоугольного поперечного сечения из оптически чувствительного материала ЭД20-МТГФА.

Эксперименты полностью подтвердили картину распределения и уровень напряжений вблизи стеснённого сечения.

Представленное решение позволяет оценить уровень всех напряжений и деформаций в зависимости от формы сечения и упругих характеристик материала.

Так как получено решение упругой задачи, то записав аналогично решения для других нагрузок и применив принцип суперпозиции, получим решение для реального случая нагружения.

CONSTRAINT STRAIN IN THE ROOT SECTION WING MODEL WITH TORSION

© 2012 V. I. Korolkov

Voronezh State Technical University

In the three-dimensional formulation is presented the solution of the problem of determining the elastic stress-strain state of solid clamped rod of arbitrary cross section loaded by concentrated torque at the free end.

Displacement, strain, stress, constrained by section.

Информация об авторе

Корольков Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Самолётостроение», Воронежский государственный технический университет. E-mail: korolkov_vi@bk.ru. Область научных интересов: математическое моделирование процессов локального циклического пластического формообразования тонкостенных оболочечных деталей, разработка методик расчёта на прочность конструкций с учётом зон сингулярного характера напряжений, моделирование браковочных признаков и изменений технологических параметров листовых материалов в процессе деформирования.

Библиографический список

1. Ван-Дайк, М. Методы возмущений в механике жидкости [Текст] / М. Ван-Дайк – М.: Мир, 1967. – 310с.
2. Феппл, А. Сила и деформация [Текст] / А. Феппл, Л. Феппл – М.; Л.:ОНТИ НКТП СССР, 1936. Т.2. – 408с.
3. Панов, Д.Ю. О кручении стержней, близких к призматическим [Текст] / Д.Ю. Панов // Докл. АН СССР.- 1939. Т.20, №4.- С.251-254.
4. Найфе, А.Х. Введение в методы возмущений [Текст] / А.Х. Найфе - М.:Мир, 1984.-536с.
5. Гроссман, Е.П. Расчёт на прочность лонжеронных крыльев [Текст] / Е.П. Гроссман // Труды ЦАГИ.- 1947.- Вып.628.- 77с.
6. Зволинский, Н.В. Приближённое решение задачи кручения упругого цилиндрического бруса с одним неизменяемым сечением [Текст] / Н.В. Зволинский // Изв. АН СССР, ОТН. 1939.- №8. – С.91-100.
7. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С. П. Тимошенко – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 451.
8. Хесин, Г.Л. Метод фотоупругости [Текст] / Под ред. Г.Л. Хесина – М.: Стройиздат, 1975. Т.1. – 460 с.

Korolkov Vladimir Ivanovich, Dr. Sc. Sciences, head of the Department "Aircraft Manufacturing", Voronezh State Technical University, E-mail: korolkov_vi@bk.ru. Area of research: mathematical modeling of local cyclic Plastic Forming thin shell components, the development of methodologies for calculating the strength of structures subject areas of the singular nature of the stress, modeling for rejection and changes of process parameters in sheet metal deformation process.