УДК 629.735.45

МОДЕЛИРОВАНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ВЕРТОЛЁТА С ГРУЗОМ НА ТРОСЕ

© 2012 С. П. Безгласный

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Решена задача о построении асимптотически устойчивых произвольных плоских программных движений для вертолёта с грузом на тросе. Программное и стабилизирующее управления получены в виде точного аналитического решения в классе непрерывных функций. Задача решена на основе прямого метода Ляпунова теории устойчивости с использованием функций Ляпунова со знакопостоянными производными.

Двойной маятник, устойчивость, активное управление, стабилизация, функция Ляпунова.

Введение

Задачи по реализации управляемых пространственных движений механической системы имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются во многих работах, например [1-6]. В данной работе ставится и решается задача об определении управлений, реализующих и стабилизирующих произвольно заданные плоские программные движения вертолёта с грузом на тросе постоянной длины. Решение проводится построением активного управления, приложенного к системе тел и представляющего собой совокупность программного управления и стабилизирующего управления, осуществляемого по принципу обратной связи. Исследование программного движения сводится к анализу нулевого решения неавтономной системы на основе прямого метода Ляпунова [7] с использованием метода предельных систем [8, 9]. Искомое управление получено в замкнутой аналитической форме в классе непрерывных функций.

Постановка задачи

Рассмотрим плоские движения вертолёта с грузом, прикрепленным на тросе, моделируемого двойным маятником с подвижной точкой подвеса. Пусть вертолёт имеет массу m_1, а груз – массу m_2. Точки O, O_2 есть центры масс вертолёта и груза, точка O_1 – точка крепления троса к вертолёту; l_1 – расстояние от центра масс вертолёта до точки крепления троса, l_2 – длина троса, постоянная величина. Считаем, что трос не деформируется, нерастяжим и невесом. Тем самым имеем механическую систему – двойной маятник, представляющий собой математический маятник, закрепленный на твердом теле, совершающем плоские вращательные движения относительно подвижного центра масс.

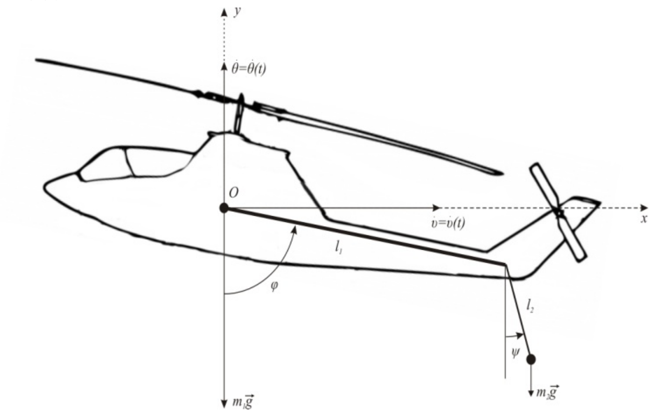

Рис. 1. Схема вертолета с грузом

Пусть OXY есть абсолютная неподвижная система координат. Движение центра масс вертолёта (тела) в плоскости OXY описывается заданным законом: $\upsilon=\upsilon(t)$ вдоль оси OX и $\theta=\theta(t)$ вдоль оси OY.

Исследуем плоские движения описанной механической системы. Поставим задачу о реализации управляющими силами, прикладываемыми к системе, произвольно заданных (программных) движений вертолёта и груза и задачу о стабилизации этих движений.

Программным (желательным движением) назовем пару $\left(\overline{r}(t),\dot{\overline{r}}(t)\right)$, где $\overline{r}(t)$ – ограниченная, дважды кусочно-непрерывная дифференцируемая вектор-функция, описывающая некоторое заданное движение механической системы.

Уравнения движения

Уравнения движения исследуемой системы составим в форме уравнений Лагранжа второго рода [10]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q\ . \qquad (1)$$

Пусть центр масс тела движется в плоскости OXY со скоростью $\left(\upsilon,\dot{\theta}\right)^T$, где символ $\left(\ \right)^T$ обозначает транспонирование. Положение вертолёта относительно кениговой системы координат Oxy будет характеризоваться углом φ, а положение троса – углом ψ, отсчитываемым от вертикали. Примем данные углы за обобщенные координаты и запишем кинетическую энергию системы:

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\upsilon}^2+\dot{\theta}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\varphi}^2+2l_1l_2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+\right.$$
$$+l_2^2\dot{\psi}^2+2l_1\dot{\varphi}\dot{\upsilon}\cos(\varphi)+2l_2\dot{\psi}\dot{\upsilon}\cos(\psi)+2l_1\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin(\varphi)+$$
$$\left.+2l_2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\psi)+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\dot{\upsilon}^2+\dot{\theta}^2\right),$$

где I_1 – момент инерции корпуса вертолёта. Представим $T=T_2+T_1+T_0$, где $T_2=\frac{1}{2}\dot{\overline{q}}^TA(t,q)\dot{\overline{q}}$ – квадратичная форма скоростей $\dot{\overline{q}}$, задаваемая симметричной матрицей $A(t,q)$; $T_1=B^T(t,q)\dot{\overline{q}}$ – линейная форма скоростей $\dot{\overline{q}}$, определяемая вектором-столбцом $B(t,q)$; $T_0=T_0(t,q)$ – скалярная функция. Тогда уравнения (1) запишутся в следующем виде:

$$A\ddot{\overline{q}}+M+\left(\frac{\partial B}{\partial x^T}-\frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\overline{q}}+\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial \overline{q}}=Q, \quad (2)$$

где через $M=M\left(\overline{q},\dot{\overline{q}}\right)$ обозначен-вектор столбец с компонентами, вычисляемыми по формуле:

$$M_i=\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_k\dot{q}_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_k\dot{q}_j, \qquad \left(i=\overline{1,2}\right).$$

Вектор обобщенных сил $Q=Q_p+Q_s$ в правой части (2), представляет собой сумму программных Q_p и стабилизирующих Q_s сил. Предполагаем, что движение происходит без воздействия внешних возмущающих сил. Запишем уравнения движения в скалярном виде:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi}+m_2l_1^2\ddot{\varphi}+m_2l_1\ddot{\upsilon}\cos(\varphi)+m_2l_1\ddot{\theta}\sin(\varphi)- \\ -m_2l_1l_2\ddot{\psi}\cos(\varphi-\psi)+m_2l_1l_2\dot{\psi}^2\sin(\varphi-\psi)+ \\ +m_2gl_1\sin(\varphi)=Q_p^{\varphi}+Q_s^{\varphi}, \\ m_2l_2^2\ddot{\psi}+m_2l_2\ddot{\upsilon}\cos(\psi)+m_2l_2\ddot{\theta}\sin(\psi)+ \\ +m_2l_1l_2\ddot{\varphi}\cos(\varphi-\psi)-m_2l_1l_2\dot{\varphi}^2\sin(\varphi-\psi)+ \\ +m_2gl_2\sin(\psi)=Q_p^{\psi}+Q_s^{\psi}. \end{cases}$$

Построение программного и стабилизирующего управлений

Пусть необходимо, чтобы система совершала некоторое программное данное движение системы $\overline{r}^T(t)=\left(\varphi^*(t),\psi^*(t)\right)$, $\dot{\overline{r}}^T(t)=\left(\dot{\varphi}^*(t),\dot{\psi}^*(t)\right)$ Определим, как и в [6], управляющие силы, реализующие это движение:

$$Q_p=A\ddot{\overline{r}}+M\left(\overline{r},\dot{\overline{r}}\right)+\left(\frac{\partial B}{\partial q^T}-\frac{\partial B^T}{\partial q}\right)\dot{\overline{r}}+\frac{\partial B}{\partial t}-\frac{\partial T_0}{\partial \overline{q}}.$$

Подставив силы в уравнения (2), имеем управляемую систему, для которой программное движение $\overline{r}(t),\dot{\overline{r}}(t)$ является решением, но, вообще говоря, не является устойчивым. Исследуем и решим задачу о его стабилизации, состоящую в определении сил, обеспечивающих асимптотическую устойчивость исследуемого движения.

Введем отклонения $\overline{x}=\overline{q}-\overline{r}(t)$. В силу линейности замены и линейности оператора дифференцирования структура уравнений Лагранжа при переходе к уравнениям в отклонениях не изменится, и, аналогично [11], уравнения возмущенного движения примут вид:

$$A\ddot{\bar{x}} + M + M' + \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\bar{x}} + A\ddot{\bar{r}} + \\ + M'' + \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\bar{r}} + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial \bar{q}} = Q_s + Q_p, \quad (3)$$

где через M, M' и M'' обозначены соответственно компоненты квадратичной, линейной и нулевой по скоростям векторных форм:

$$M_i = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j,$$

$$M'_i = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{r}_j + \\ + \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{x}_j,$$

$$M''_i = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{r}_k\dot{r}_j - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{r}_k\dot{r}_j, \left(i = \overline{1,2}\right).$$

Функцию Ляпунова выберем в виде:

$$V\left(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}}\right) = \frac{1}{2}\bar{x}^T C\bar{x} + \frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^T A\dot{\bar{x}}. \quad (4)$$

Функция (4) является определенно-положительной и имеет производную в силу системы (3):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^T\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \bar{x}^T}\dot{\bar{r}}\right)\dot{\bar{x}} + \dot{\bar{x}}^T C\bar{x} - \dot{\bar{x}}^T M'' + \\ + \dot{\bar{x}}^T\left[-M' + \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\bar{x}} - \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\bar{r}} - \right. \\ \left. - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{\bar{x}} - \frac{\partial A}{\partial t}\dot{\bar{r}} - \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial T_0}{\partial \bar{x}} - A\ddot{\bar{r}} + \frac{1}{2}N + Q_c\right],$$

где символом N обозначен вектор-столбец с компонентами

$$N_i = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i}\dot{x}_k\dot{x}_j - \sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_k\dot{x}_j, \qquad \left(i = \overline{1,2}\right).$$

Определим стабилизирующее управление равенством:

$$Q_s = -Cx - D\dot{x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x^T} - \frac{\partial B^T}{\partial x}\right)\dot{\bar{r}} + \\ + M'' + \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial T_0}{\partial \bar{x}} + A\ddot{r} + Q_p, \quad (6)$$

где матрицы C и D являются ограниченными и неисчезающими и выбираются из условий:

$$c_0 E \le C = const \le c_1 E, \quad \left(0 < c_0 < c_1 - const\right);$$
$$d_0 E \le D\left(t, q\right) = const \le d_1 E, \quad \left(0 < d_0 < d_1 - const\right);$$
$$2D + \frac{dA}{dt} \ge \alpha_0 E, \quad \left(0 < \alpha_0 - const\right).$$

Тогда производная функции (4) имеет оценку

$$\frac{dV}{dt} \cong -\dot{\bar{x}}^T\left(\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} + D\right)\dot{\bar{x}} \le -\frac{\alpha_0}{2}\left\|\dot{\bar{x}}\right\|^2 \le 0$$

и является определенно-отрицательной функцией по скоростям. Таким образом, на основе теоремы об асимптотической устойчивости из [9] имеем асимптотическую устойчивость исследуемого программного движения.

Приведем стабилизирующие управления в скалярном виде

$$Q_c^{\varphi} = -c_{11}x_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{x}_2^2 \sin\left(\varphi^* + x_1 - \psi^* - x_2\right) + \\ + d_{11}\dot{x}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\psi}^{*2}\sin\left(\varphi^* + x_1 - \psi^* - x_2\right) + \\ + 2I_1\ddot{\varphi}^* + m_2 l_1 \dot{\upsilon}\cos\left(\varphi^* + x_1\right) + m_2 l_1 \ddot{\theta}\sin\left(\varphi^* + x_1\right) + \\ + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\psi}^*\cos\left(\varphi^* + x_1 - \psi^* - x_2\right) + 2m_2 l_1^2 \ddot{\varphi}^* - \\ - m_2 l_1 \dot{\varphi}^* \upsilon \sin\left(\varphi^* + x_1\right) + m_2 l_1 \dot{\varphi}^* \dot{\theta}\cos\left(\varphi^* + x_1\right);$$

$$Q_c^{\psi} = -c_{22}x_2 + d_{22}\dot{x}_2 + m_2 l_2 \dot{\upsilon}\cos\left(\psi^* + x_2\right) - \\ - m_2 l_1 l_2\left(\dot{\varphi}^{*2} + \dot{x}_1^2\right)\sin\left(\varphi^* + x_1 - \psi^* - x_2\right) + \\ + m_2 l_2\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^* \upsilon\right)\sin\left(\psi^* + x_2\right) + 2m_2 l_2^2 \ddot{\psi}^* + \\ + 2m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}^*\cos\left(\varphi^* + x_1 - \psi^* - x_2\right) + \\ + m_2 l_2 \dot{\psi}^* \dot{\theta}\cos\left(\psi^* + x_2\right).$$

Отметим, что при выборе программного и стабилизирующего управлений предложенным способом заданные движения реализуются при любых законах плоского движения центра масс вертолёта O: $\upsilon = \upsilon\left(t\right)$, $\theta = \theta\left(t\right)$.

Результаты работы развивают и обобщают соответствующие результаты из [5, 6, 11].

Библиографический список

1. Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления [Текст] / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.

2. Летов, А.М. Динамика полета и управление [Текст] / А.М. Летов – М.: Наука, 1969. – 359 с.

3. Галиуллин, А.С. Построение систем программного движения [Текст] / А.С. Галиуллин, И.А. Мухаметзянов, Р.Г. Мухарлямов, В.Д. Фурасов – М.: Наука, 1971. – 352 с.

4. Зубов, В.И. Проблема устойчивости процессов управления [Текст] / В.И. Зубов – Л.: Судостроение, 1980. – 375 с.

5. Безгласный, С.П. О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел [Текст] /С.П. Безгласный, О.А. Мысина // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 80-90.

6. Bezglasnyi, S.P. The stabilization of program motions of controlled nonlinear mechanical system [Text] // Korean J. Comput. Appl. Math. 2004. V. 14, № 1-2. P. 251-266.

7. Руш, Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости [Текст] / Н. Руш, П. Абетс, М. Лаула – М.: Мир, 1980. – 301 с.

8. Artstein Z. Topological dynamics of an ordinary equations // J.Differ. Equat. 1977. V. 23. P.216-223.

9. Андреев, А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы [Текст] / А.С. Андреев // ПММ 1984. Т. 48. Вып.2. С. 225-232.

10. Маркеев, А.П. Теоритическая механика: учеб. для вузов. Издание второе, дополненное [Текст] / А.П. Маркеев – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.

11. Безгласный, С.П. Стабилизация программных движений уравновешенного гиростата [Текст] / С.П. Безгласный, М.А. Худякова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьтерные науки. 2010. Вып 4. С. 31-38.

STABILIZATION OF STEADY MOTIONS OF A SINGLE ROTOR GYROSTAT WITH A CAVITY FILLED WITH A LIQUID OF HIGH VISCOSITY

Samara State Aerospace University
named after academician S.P. Korolyov (National Research University)

The problem of constructing asymptotically stability arbitrarily given flat program motions of the helicopter with tethered payload is solved. Program control and stabilizing control is done in the form of an exact analytical solution in the class of continuous functions. The problem is solved by direct method of Lyapunov stability theory with Lyapunov’s functions with constant sign of the derivatives.

Double pendulum, stability, active control, stabilization, Lyapunov’s function.

Информация об авторе

Безгласный Сергей Павлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: bezglasnsp@rambler.ru. Область научных интересов: теоретическая механика, теория управления и устойчивости, динамика систем твёрдых тел.

Bezglasnyi Sergey Pavlovich, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor. Samara State Aerospace University. E-mail: bezglasnsp@rambler.ru. Area of research: theoretical mechanic, theory of control and stability, dynamics of systems of rigid bodies.