

## АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ТВЁРДОТОПЛИВНЫМ РАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

© 2012 В. Л. Балакин, А. В. Дорошин, М. М. Крикунов

Самарский государственный аэрокосмический университет  
имена академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Рассматривается движение космического аппарата (КА) переменного состава вокруг центра масс. Проводится анализ движения и синтез условий реализации требуемых режимов нутационно-прецессионного движения КА переменного состава с помощью качественного метода, основанного на вычислении кривизны фазовой траектории. Определяются возможные эволюции КА и причины этих эволюций. Проводится численное моделирование движения КА для нелинейных случаев изменения инерционно-массовых параметров.

*Космический аппарат, динамическая система, фазовое пространство, переменный состав, синтез режимов движения, численное моделирование.*

### Введение

Исследование динамики космического аппарата (КА) переменного состава является одной из задач механики космического полёта. Классические случаи движения КА переменного состава были рассмотрены ранее [1,2]. Некоторые аспекты динамика движения КА переменного состава исследовались для случаев нелинейного изменения инерционно-массовых параметров при наличии возмущений [3-6].

В ракетно-космической технике находят применение космические аппараты, на которых устанавливаются твёрдотопливные ракетные двигатели [7]. Заряды для таких двигателей могут иметь сложную форму [8, 9]. От формы и массы заряда, то есть от его инерционно-массовых характеристик, будет зависеть вектор тяги КА и динамика его движения вокруг текущего положения центра масс. Для исследования динамики движения КА переменного состава зарядами сложной формы целесообразно исследовать динамику КА, имеющего заряд простой формы. В статье рассматривается заряд, имеющий форму цилиндра.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается КА переменного состава, который удовлетворяет следующим четырём допущениям.

*Допущение 1.* Масса и геометрия КА переменного состава изменяется так, что при этом он все равно остается динамически симметричным в каждый момент времени  $t$ :

$$A(t) = B(t) \quad \forall t \in [t_0; t_k]. \quad (1)$$

Здесь  $A(t)$  и  $B(t)$  – зависимости моментов инерции с учётом движения центра масс вдоль оси  $Oz$  связанной системы координат, относительно его места нахождения в начальный момент времени.

*Допущение 2.* Движение рассматривается в отсутствии внешних возмущающих сил и моментов  $M^e$ :

$$\begin{aligned} M_x^e(p, q, r) &= M_y^e(p, q, r) = \\ &= M_z^e(p, q, r) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2)$$

*Допущение 3.*

*Допущение 3.* Рассматривается движение с КА переменного состава с гироскопической стабилизацией:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r} \ll 1. \quad (3)$$

*Допущение 4.* Считается, что центр масс корпуса КА в начальный момент времени совпадает с центром масс твёрдотопливного заряда.

### 2. Математическая модель

Для исследования динамики движения КА переменного состава построим математическую модель. Рассмотрим

прецессионное движение космического аппарата переменного состава. Уравнения невозмущённого движения записываются в виде [4]:

$$\begin{aligned} A(t)\dot{p} + (C(t) - A(t))qr &= 0, \\ A(t)\dot{q} - (C(t) - A(t))pr &= 0, \\ C(t)\dot{r} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $C(t)$  – момент инерции КА относительно оси  $Oz$  связанной системы координат.

Сделаем замену переменных [6]:

$$p = G(t)\sin F(t), \quad q = G(t)\cos F(t). \quad (5)$$

Продифференцировав (5) по времени и подставив в (4), получим уравнения движения в новых переменных:

$$\dot{F} = \left[ 1 - \frac{C(t)}{A(t)} \right] r, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{G} = 0. \quad (6)$$

Далее будем рассматривать движение КА переменного состава в углах Крылова [6]:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p \sin \varphi + q \cos \varphi, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\dot{\varphi} = r - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p \cos \varphi - q \sin \varphi).$$

Допущение 3 позволяет считать углы  $\gamma$  и  $\psi$  малыми (рис. 1).

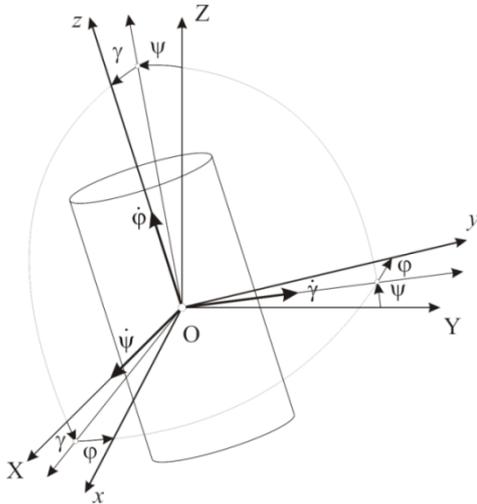


Рис. 1. Углы Крылова

Принимая во внимание (5) и допущение 3, запишем уравнения (7) в виде:

$$\dot{\gamma} = G \cos \Phi(t), \quad \dot{\psi} = G \sin \Phi(t), \quad \dot{\varphi} = r, \quad (8)$$

где  $\Phi(t) = F(t) - \varphi(t)$ .

Фазовый портрет системы (8) в плоскости углов Крылова ( $\gamma, \psi$ ) можно

интерпретировать как годограф вектора тяги ракетного двигателя твёрдого топлива (РДТТ). Следовательно, для повышения точности импульса, создаваемого РДТТ КА, необходимо добиться, чтобы продольная ось КА монотонно приближалась к оси прецессии и, следовательно, годограф апекса продольной оси (и вектора тяги) КА переменного состава, как фазовой траектории в плоскости ( $\gamma, \psi$ ), представлял собой скручивающуюся спираль. Для обеспечения такого движения необходимо монотонное увеличение квадрата (модуля) кривизны этой фазовой траектории (годографа).

Запишем выражение для квадрата кривизны параметризованной кривой [6]:

$$k^2 = \frac{(\dot{\gamma}\dot{\psi} - \dot{\psi}\dot{\gamma})^2}{(\dot{\gamma}^2 + \dot{\psi}^2)^3}. \quad (9)$$

С учетом (8) выражение (9) переписывается в виде:

$$k^2 = \dot{\Phi} / G^2. \quad (10)$$

Найдем производную функции кривизны, заданной неявно:

$$k\dot{k} = \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2 \quad (11)$$

Для того чтобы модуль кривизны был монотонно возрастающей функцией, необходимо, чтобы функция  $P = k\dot{k}$  была больше нуля:

$$|k| \uparrow \Rightarrow k\dot{k} > 0 \Rightarrow \dot{\Phi}\ddot{\Phi}G - \dot{G}\dot{\Phi}^2 = P(t) > 0. \quad (11)$$

С учётом (6) и (8), условие (12) переписывается в виде:

$$P(t) = \frac{CG_0}{A^3} (\dot{C}A - \dot{A}C) > 0. \quad (12)$$

Так как  $\frac{CG_0}{A^3} > 0 \quad \forall t \in [t_0; t_k]$ , то необходимо добиваться выполнения условия:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \frac{\dot{C}(t)A(t) - \dot{A}(t)C(t)}{A^2} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{C}{A} \right) > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этого можно сделать следующий важный вывод: *годограф вектора тяги РДТТ с цилиндрическим пороховым зарядом может изменить свой вид со*

скручивающейся спирали на раскручивающуюся (и наоборот) тогда и только тогда, когда отношение моментов инерции  $\frac{C}{A}$  достигает экстремального значения.

Задача синтеза динамики движения КА переменного состава сводится к отысканию таких параметров инерционно-массовых характеристик заряда РДТТ, при которых функцией  $\tilde{P}(t)$  была бы положительно определённой на рассматриваемом промежутке времени [7-9].

### 3. Анализ динамики движения

Применим построенную модель для анализа движения КА переменного состава при горении заряда цилиндрической формы. Моменты инерции относительно точки, в которой находился центр масс в начальный момент времени, записываются следующим образом:

$$A = B = A_0 + m \left( \frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right), \quad C = C_0 + \frac{mR^2}{2},$$

где  $A_0, C_0$  – моменты инерции корпуса К;  $m = \rho V = \pi R^2 H \rho$  – масса заряда в текущий момент времени;  $R$  – радиус заряда;  $H$  – высота заряда в текущий момент времени;  $\rho$  – плотность материала, из которого изготовлен заряд.

В силу изменения геометрии заряда центр масс будет перемещаться вдоль оси  $Oz$  связанной системы координат:

$$z_c = \frac{1}{2}(H_0 - H(t)) = \frac{1}{2}ht.$$

Выпишем в явном виде моменты инерции и их производные:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0 + A_{з.ц.м.} + mz_c^2 = \\ &= A_0 + \alpha H + \beta H^3, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\alpha = \pi R^4 \rho / 4$ ,  $\beta = \pi R^2 \rho / 3$ ;

$$C(t) = C_0 + \mu H; \quad (16)$$

где  $\mu = \pi R^4 \rho / 2$ ;

$$\dot{A}(t) = \alpha \dot{H} + 3\beta H^2 \dot{H}; \quad (17)$$

$$\dot{C}(t) = \mu \dot{H}. \quad (18)$$

Подставим (15)-(18) в (14):

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t) &= \\ &= \frac{\dot{H}}{A^2} (A_0 \mu - C_0 \alpha - H^2 \beta (2\mu H + 3C_0)). \end{aligned} \quad (19)$$

Если моменты инерции корпуса не учитывать и рассматривать только горение заряда ( $A_0 = 0, C_0 = 0$ ), то функция  $\tilde{P}(t)$  будет иметь вид:

$$\tilde{P}(t) = -\frac{2\beta\gamma H^2 \dot{H}}{\alpha + \beta H^2}. \quad (20)$$

Пусть цилиндрический заряд поджигается с основания, и его высота изменяется по линейному закону:

$$H = H(t) = H_0 - ht, \quad (21)$$

где  $H_0$  – высота цилиндра в начальный момент времени;  $h$  – скорость выгорания заряда.

Рассмотрим два предельных случая:

- 1) моменты инерции корпуса пренебрежимо малы по сравнению с моментами инерции заряда (случай когда рассматривается только горение заряда);
- 2) моменты инерции заряда пренебрежимо малы по сравнению с моментами инерции корпуса КА (случай КА постоянного состава).

Рассмотрим сначала функцию  $\tilde{P}(t)$  без учёта моментов инерции корпуса КА. С учётом (21) выражение (20) примет следующий вид:

$$\tilde{P}(t) = \frac{2h\beta\gamma(H_0 - ht)^3}{\alpha + \beta(H_0 - ht)^2}. \quad (22)$$

Так как на промежутке горения заряда, то из (22) следует, что при линейном сгорании твёрдотопливного заряда его параметры не могут повлиять на эволюции движения годографа вектора тяги, который будет представлять из себя скручивающуюся спираль.

В качестве примера на рис. 2 представлены графики зависимостей моментов инерции от времени для значений параметров:  $A_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $C_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $R = 0,3 \text{ м}$ ;  $H_0 = 0,5 \text{ м}$ ;  $h = 0,01 \text{ м/с}$ .

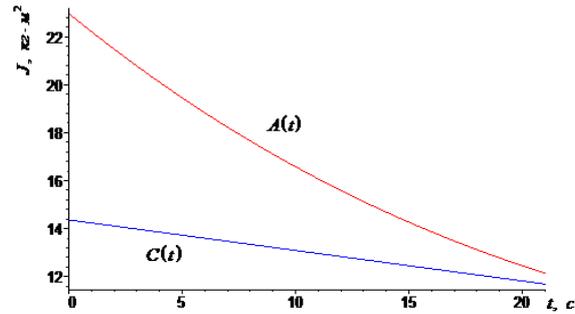
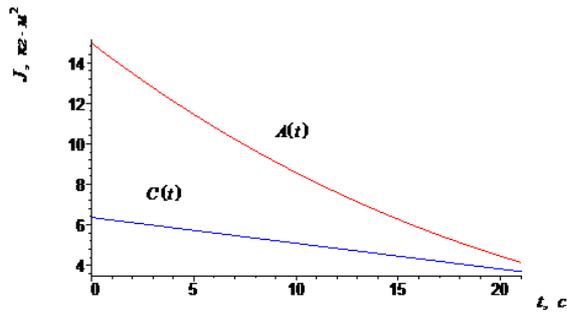


Рис. 2. Моменты инерции для заряда цилиндрической формы

На рис. 3 представлен график функции  $\tilde{P}(t)$  для рассматриваемого случая.

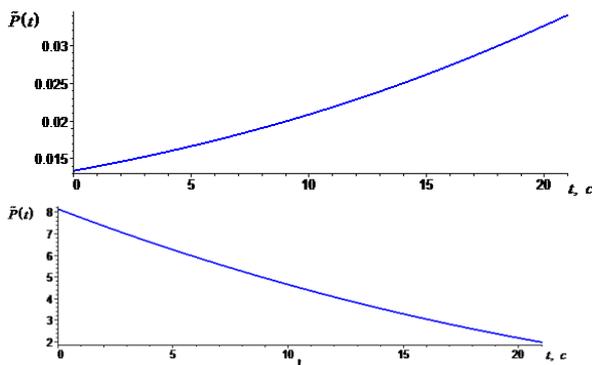


Рис. 3. Функция  $\tilde{P}(t)$  для заряда цилиндрической формы

Функция  $\tilde{P}(t)$  в рассматриваемом случае является положительно определённой на всём рассматриваемом интервале (от 0 до 20 с).

На рис. 4 представлен годограф вектора тяги РДТТ для рассматриваемого случая.

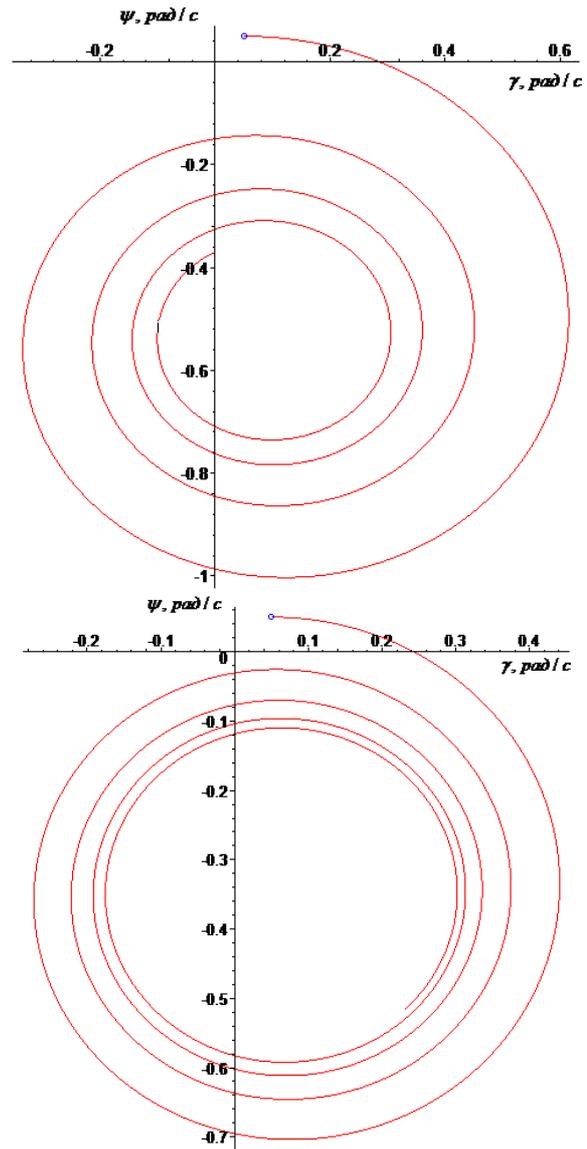


Рис. 4. Годограф вектора тяги РДТТ с зарядом цилиндрической формы в плоскости углов Крылова  $\gamma - \psi$ ,  $\gamma_0 = 0,05 \text{ рад}$ ,  $\psi_0 = 0,05 \text{ рад}$

**Из следует, что функция  $\tilde{P}(t)$  может иметь нули на рассматриваемом промежутке времени:**

**при**

$$H = const \text{ . следует, что } \tilde{P}(t) \equiv 0 \text{ .}$$

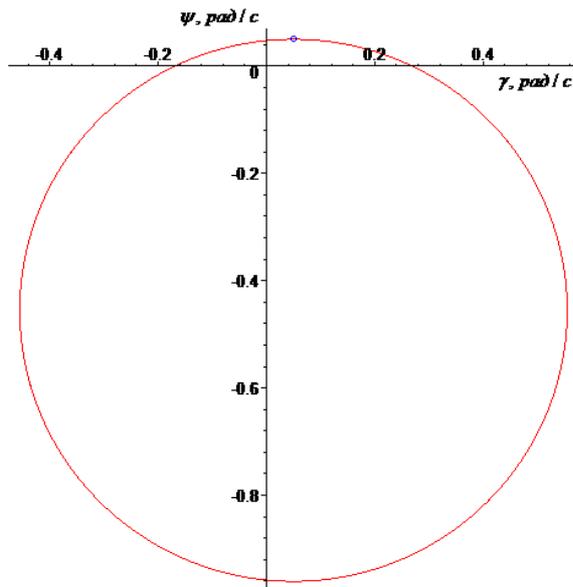


Рис. 5. Годограф вектора тяги РДТТ с зарядом цилиндрической формы в плоскости углов Крылова  $\gamma - \psi$ ,  $\gamma_0 = 0,05 \text{ рад}$ ,  $\psi_0 = 0,05 \text{ рад}$

Вывод: в отсутствии заряда эволюций движения КА происходить не может. Таким образом, эволюции движения КА могут происходить только в тех случаях когда инерционно-массовые характеристики КА и заряда одного порядка.

Приведём два примера, когда характер движения может поменяться и когда он остаётся постоянным.

**Пример 1.** На рис. 6 представлены графики зависимостей моментов инерции от времени для значений параметров:  $A_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $C_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $R = 0,3 \text{ м}$ ;  $H_0 = 0,5 \text{ м}$ ;  $h = 0,01 \text{ м / с}$ .

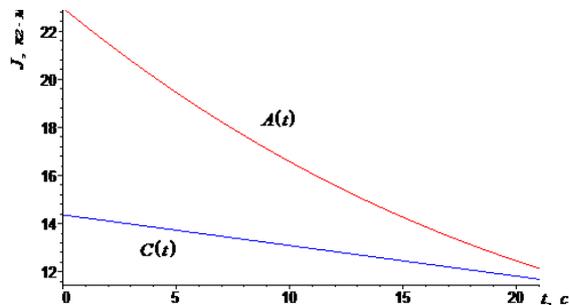


Рис. 6. Моменты инерции для заряда цилиндрической формы

На рис. 7 представлен график функции  $\tilde{P}(t)$  для рассматриваемого случая.

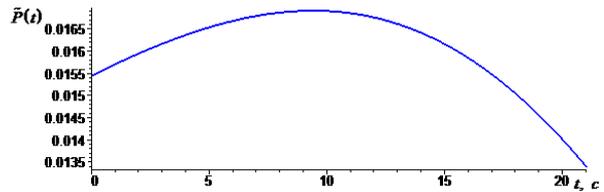


Рис. 7. Функция  $\tilde{P}(t)$  для заряда цилиндрической формы

Функция  $\tilde{P}(t)$  в рассматриваемом случае является положительно определённой на всём рассматриваемом интервале (от 0 до 20 с).

На рис. 8 представлен годограф вектора тяги РДТТ для рассматриваемого случая.

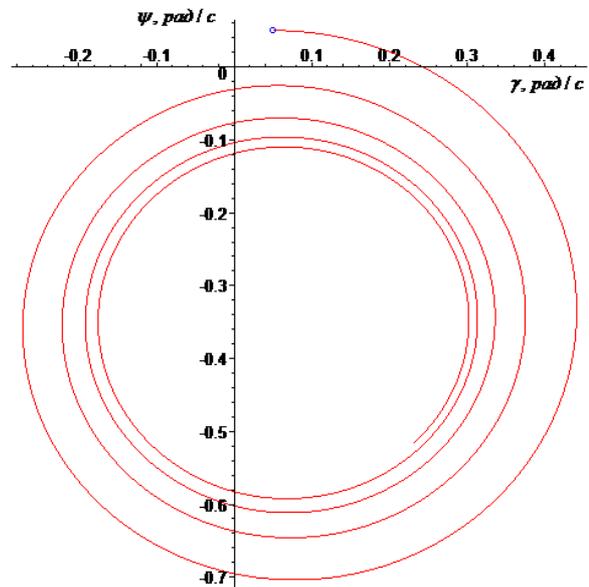


Рис. 8. Годограф вектора тяги РДТТ с зарядом цилиндрической формы в плоскости углов Крылова  $\gamma - \psi$ ,  $\gamma_0 = 0,05 \text{ рад}$ ,  $\psi_0 = 0,05 \text{ рад}$

**Пример 2.** На рис. 9 представлены графики зависимостей моментов инерции от времени для значений параметров:  $A_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $C_0 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $R = 0,3 \text{ м}$ ;  $H_0 = 0,5 \text{ м}$ ;  $h = 0,01 \text{ м / с}$ .

На рис. 10 представлен график функции  $\tilde{P}(t)$  для рассматриваемого случая.

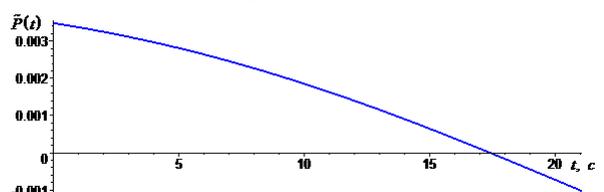


Рис. 10. Функция  $\tilde{P}(t)$  для заряда цилиндрической формы

Функция  $\tilde{P}(t)$  в рассматриваемом случае пересекает ось абсцисс  $t = 17,5$  с.

На рис. 11 представлен годограф вектора тяги РДТТ для рассматриваемого случая.

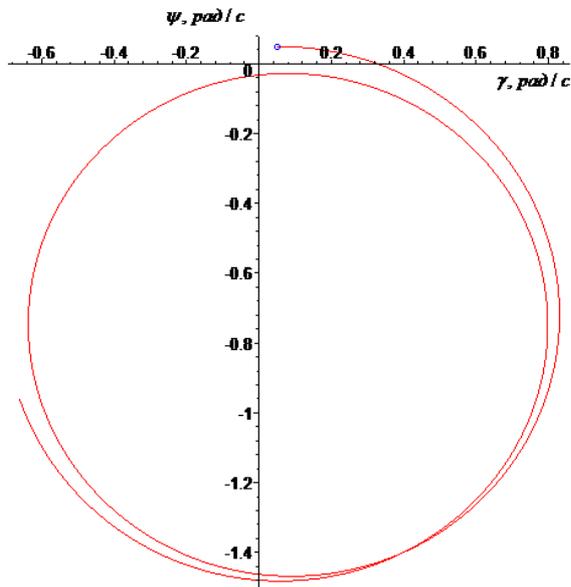


Рис. 11. Годограф вектора тяги РДТТ с зарядом цилиндрической формы в плоскости углов Крылова  $\gamma - \psi$ ,  $\gamma_0 = 0,05$  рад,  $\psi_0 = 0,05$  рад

### Заключение и выводы

В работе применён качественный метод анализа фазового пространства неавтономных динамических систем, основанный на определении кривизны фазовой траектории. С помощью этого метода проведён анализ движения и синтез условий реализации требуемых режимов нутационно-прецессионного движения КА переменного состава. Определены возможные эволюции КА и причины этих эволюций.

Проведено численное моделирование движения КА для линейного случая изменения инерционно-массовых параметров. Построены фазовые портреты для рассматриваемых случаев движения КА с твердотопливным ракетным двигателем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ № 11-08-00794-а).

### Библиографический список

1. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полёта. М.: Наука, 1990.
2. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Часть 2. М.: Просвещение, 1966. 398 с.
3. Аншаков Г.П., Асланов В.С., Балакин В.Л., Дорошин А.В. и др. Динамические процессы в ракетно-космических системах // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. Самара: СГАУ, №1, 2003 г.
4. Дорошин А.В. Эволюции прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменного состава // Прикладная математика и механика, Т. 72. Вып. 3, 2008.
5. В.С. Асланов, А.В. Дорошин Влияние возмущений на угловое движение космического аппарата на активном участке спуска // Космич. исслед. 2008, том 46, №2, С. 168-173.
6. A.V. Doroshin // International Journal of Non-Linear Mechanics # 45 (2010) p. 193–205.
7. Фахрутдинов, И. Х. Ракетные двигатели твердого топлива [Текст] / И. Х. Фахрутдинов. — М.: Машиностроение, 1981. — 223 с.
8. Веницкий, А. М. Конструкция и отработка РДТТ [Текст] / А. М. Веницкий, В. Т. Волков, И. Г. Волковицкий, С. В. Холодилов; Под ред. А. М. Веницкого. — М., Машиностроение, 1980.—230 с.
9. Петренко, В. И. РДТТ с регулируемым модулем тяги [Текст] / В. И. Петренко, В. Л. Попов, А. М. Русак, В. И. Феофилактов. — Миасс: издательство ГРЦ «КБ им. академика В.П. Макеева». — 1994. — 245 с.

## SYNTHESIS OF DYNAMIC MODES OF ATTITUDE MOTION OF SPACECRAFT WITH SOLID PROPELLANT ROCKET ENGINE

© 2012 V. L. Balakin, A. V. Doroshin, M. M. Krikunov

Samara State Aerospace University

named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

An attitude motion of a spacecraft (SC) with variable structure around mass-center is considered. The qualitative method for the phase space analysis is applied. The analysis of motion and synthesis of modes of SC motion with variable structure is carried out. Possible evolutions of the SC motion are defined. Numerical modeling of the SC motion for nonlinear cases of inertia-mass parameters dependences is carried out.

*Spacecraft, dynamic system, phase space, variable structure, synthesis of motion modes, numerical modeling.*

### Информация об авторах

**Балакин Виктор Леонидович**, доктор технических наук, профессор кафедры космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет).

E-mail: [balakin@ssau.ru](mailto:balakin@ssau.ru). Область научных интересов: динамика и управление движением летательных аппаратов.

**Дорошин Антон Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет).

E-mail: [doran@inbox.ru](mailto:doran@inbox.ru). Область научных интересов: динамика пространственного движения космических аппаратов. постоянного и переменного состава.

**Крикунов Михаил Михайлович**, аспирант кафедры космического машиностроения, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: [Krikunov\\_MM@mail.ru](mailto:Krikunov_MM@mail.ru). Область научных интересов: динамика пространственного движения космических аппаратов.

**Victor Leonidovich Balakin**, doctor of science (engineering), professor of space mechanical engineering department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: [balakin@ssau.ru](mailto:balakin@ssau.ru). Areas of research: dynamics and aircraft motion control.

**Anton Vladimirovich Doroshin**, candidate of science (engineering), associated professor of space mechanical engineering department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: [doran@inbox.ru](mailto:doran@inbox.ru). Areas of research: dynamics of spacecraft attitude motion of constant and variable structure.

**Mikhail Mikhailovich Krikunov**, post-graduate student of space mechanical engineering department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: [Krikunov\\_MM@mail.ru](mailto:Krikunov_MM@mail.ru). Areas of research: dynamics of spacecraft attitude motion.