УДК 330.115(075.8)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В УСЛОВИЯХ РЕАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПРАКТИКИ

© 2005 В. К. Семенычев

Самарский государственный аэрокосмический университет

Предложены методы моделирования реальных статистических данных логистическими моделями на основе авторегрессий динамических рядов отсчетов показателей экономической динамики с учетом экзогенных воздействий, отвечающих реальной практике. Методы моделирования реализуются на малых выборках и не предполагают знания априорных сведений об анализируемых процессах.

В экономике распространены процессы логистической динамики, которые сначала растут медленно, затем ускоряются, а затем снова замедляют свой рост, стремясь к какому-либо пределу (уровню насыщения): изменению цены на товары, обладающие способностью достигать некоторого уровня спроса, суммарную емкость рынка на определенный момент времени и т. д. [1, 2]. Логистой может описываться и динамика уменьшения значений экономических показателей.

В реальной траектории $Y(t)$ логистической динамики присутствует гладкий логистический тренд $\Pi(t)$, соответствующий основной тенденции, а также аддитивные компоненты, отражающие экзогенные воздействия, например [1, 3], A_2t, $A_2tSin(\omega t + \varphi)$ или $A_2Sin(\omega t + \varphi)$, и стохастический гетероскедастический компонент $\theta(t)$, что приводит к необходимости рассмотрения моделей:

$$Y(t) = \Pi(t) + A_2t + \theta(t), \quad (1)$$

$$Y(t) = \Pi(t) + A_2Sin(\omega t + \varphi) + \theta(t), \quad (2)$$

$$Y(t) = \Pi(t) + A_2tSin(\omega t + \varphi) + \theta(t), \quad (3)$$

где t – время.

Известны следующие модели логистического тренда $\Pi(t)$:

1. Обобщенная логистическая функция:

$$\Pi(t) = \frac{1}{A_0 + \sum_{I=1}^{m} A_i\, exp(-C_i t)}, \quad (4)$$

где обычно $m \le 3$, а при $m = 1$ имеем, как частный случай, функцию Верхулста;

2. $\Pi(t) = AB^{C^t}$ - функция Гомперца; (5)

3. $\Pi(t) = A_1exp\{ - B_1exp(- a_1t)\}$; (6)

4. $\Pi(t) = A_1exp\{ - A_2(1 - exp(- a_2t)\backslash a_2\}$. (7)

Как показали проведенные исследования [4], обобщенную логистическую функцию (4) при $m > 1$ целесообразно применять лишь при необходимости моделирования начальных участков логистической динамики, а модели (5) – (7) сводятся к функции Верхулста при соответствующей замене переменных. Таким образом, в большинстве практически важных случаев для моделирования логистического тренда можно использовать функцию Верхулста.

Поставим целью устранить общие недостатки известных частных эвристических методов идентификации функции Верхулста [1 - 3]: необходимость априорного знания уровня насыщения, сложность и большое число требуемых отсчетов, невозможность учета при идентификации дополнительного временного тренда и колебательных компонент.

Представим знаменатель функции Верхулста первыми тремя членами разложения ряда Тейлора в окрестности начала осуществления моделирования - точки «а»:

$$A_0 + A_1exp(- \alpha_1t) \approx B_0 - B_1t + B_0t^2,$$

где $B_0 = A_0 + A_1exp(- \alpha_1a)(1 + \alpha_1a + (\alpha_1a)^2)$,
$B_1 = A_1\alpha_1exp(- \alpha_1a)(1 + 2\alpha_1)$,
$B_2 = A_1(\alpha_1)^2exp(- \alpha_1a)$.

Тогда траектория $Y(t)$ анализируемого экономического показателя при структуре вида (1) может быть представлена в виде

$$Y(t)=\frac{1+A_2B_0t-A_2B_1t^2+A_2B_2t^3}{B_0-B_1t+B_0t^2}+\theta(t). \qquad (8)$$

После приведения (8) к общему знаменателю, перехода к отсчетам соответствующего динамического ряда, применения Z-преобразования [4] придем при *«к»* ≥ 4 к следующей авторегрессии отсчетов:

$$Y\kappa = 4Y\kappa_{-1} - 6Y\kappa_{-2} + 4Y\kappa_{-3} - Y\kappa_{-4} -$$
$$- C_0\{Y\kappa_{-4}Y\kappa_{-1} + 6Y\kappa_{-2} - 4Y\kappa_{-3} + Y\kappa_{-4}\} +$$
$$+ B_1\{(\kappa\Delta)Y\kappa - 4(\kappa-1)\Delta Y\kappa_{-1} + 6(\kappa-2)\Delta Y\kappa_{-2} -$$
$$- 4(\kappa-3)\Delta Y\kappa_{-3} + (\kappa-4)\Delta Y\kappa_{-4})\} +$$
$$+ B_2\{(\kappa\Delta)^2 Y\kappa - 4(\kappa-1)^2\Delta^2 Y\kappa_{-1} +$$
$$+ 6(\kappa-2)^2\Delta^2 Y\kappa_{-2} + 4(\kappa-3)^2\Delta^3 Y\kappa_{-3} +$$
$$+ (\kappa-4)^2\Delta^2 Y\kappa_{-4})\} + g\kappa, \qquad (9)$$

где $C_0 = B_0 - 1$, $g\kappa$ – стохастический компонент, образованный линейной комбинацией отсчетов $\theta\kappa, \dots, \theta\kappa_{-4}$ и произведений на соответствующие отсчеты знаменателя (8), обладающий свойством гетероскедастичности.

Применяя к (9) обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [1, 2, 4] для компенсации гетероскедастичности, определим из соответствующей (называемой обычно «нормальной») системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) третьего порядка ОМНК - оценки C_0^o, B_1^o, B_2^o, затем через них рассчитаем и оценки параметров модели Верхулста:

$$\alpha_1^o = B_2^o(B_1^o - 2B_2^o),$$

$$A_1^o = B_2^o exp(-\alpha_1^o a)\backslash(\alpha_1^o)^2,$$

$$A_0^o = C_0^o + 1 - A_1^o exp(-\alpha_1^o a)(1 + a\alpha_1^o +$$
$$+ a^2(\alpha_1^o)^2).$$

При эконометрическом моделировании статистических данных моделью (2) оправданы разложение всего логистического компонента в ряд Тейлора и переход к динамическому ряду отсчетов

$$Y\kappa = E_0 + E_1(\kappa\Delta) + E_2(\kappa\Delta)^2 +$$
$$+ A_2 Sin(\omega\kappa\Delta + \varphi) + \theta\kappa; \qquad (10)$$

где $D_0 = \Pi(0)$, $D_1 = (\Pi)'(0)$, $D_2 = (\Pi)''(0)/2$, $E_0 = D_0 - D_1a + D_2a^2$, $E_1 = D_1 - 2D_2a$, $E_2 = D_2$.

Можно показать, что выражению (10) соответствует при «к» ≥ 7 авторегрессия отсчетов

$$Y\kappa = 6Y\kappa_{-1} - 16Y\kappa_{-2} + 26Y\kappa_{-3} - 30Y\kappa_{-4} +$$
$$+ 26Y\kappa_{-5} - 16Y\kappa_{-6} + 6Y\kappa_{-7} - Y\kappa_{-8} +$$
$$+ \lambda_1(Y\kappa_{-1} - 6Y\kappa_{-2} + 15Y\kappa_{-3} - 20Y\kappa_{-4} +$$
$$+ 15Y\kappa_{-5} - 6Y\kappa_{-6} + Y\kappa_{-7}) + \xi\kappa,$$

где $\lambda_1 = 2Cos\omega\Delta$; $\xi\kappa$ - гетероскедастический стохастический компонент, образованный линейной комбинацией отсчетов $\theta\kappa, \dots, \theta\kappa_{-4}$.

Через ОМНК - оценку параметра λ_1^o определим частоту гармонического компонента

$$\omega^o = (ArcCos(\lambda_1^o\backslash 2))\backslash\Delta,$$

а затем, подставляя ее в (10), найдем ОМНК-оценки E_0^o, E_1^o, E_2^o и $A_3^o = A_2Cos\varphi$, $A_4^o = A_2Sin\varphi$, а через них – и ОМНК - оценки параметров модели (2):

$$\alpha_1^o = 2((E_1^o + 2E_2^o)/(E_0^o + E_1^o a + E_2^o a^2) -$$
$$- E_2^o/(E_1^o + E_2^o a)),$$

$$A_1^o = (E_1^o + E_2^o a)/((E_0^o + E_1^o a + E_2^o a^2)^2 \times$$
$$\times \alpha_1^o exp(-\alpha_1^o a)),$$

$$A_0^o = 1 - (E_0^o + E_1^o a + E_2^o a^2)A_1^o exp(-\alpha_1^o a),$$

$$A_2^o = ((A_3^o)^2 + (A_4^o)^2)^{1/2},$$

$$\varphi^o = Arctg(A_4^o/A_3^o).$$

При моделировании анализируемых данных выражением (3), использовании, как и ранее, разложения в ряд Тейлора и Z-преобразования, получим при *«к»* ≥ 7 следующую авторегрессию отсчетов динамического ряда:

$$Y\kappa = \lambda_1^2(-Y\kappa_{-2} + 3Y\kappa_{-3} - 3Y\kappa_{-4} + Y\kappa_{-5}) +$$
$$+ \lambda_1(2Y\kappa_{-1} - 6Y\kappa_{-2} + 8Y\kappa_{-3} - 8Y\kappa_{-4} + 6Y\kappa_{-5} -$$
$$- 2Y\kappa_{-6}) + 3Y\kappa_{-1} - 5Y\kappa_{-2} + 7Y\kappa_{-3} - 10Y\kappa_{-4} +$$
$$+ 5Y\kappa_{-5} - 7Y\kappa_{-7}) + \xi\kappa,$$

из которой, решая соответствующую СЛАУ второго порядка, определим ОМНК – оценки λ_1^o и ω^o. Подставляя в (3) ω^o, можно легко найти ОМНК - оценки остальных параметров модели: α_1^o, A_0^o, A_1^o, A_2^o, φ^o.

Подстановка найденных ОМНК – оценок в детерминированные компоненты моделей (1) - (3) позволит определить «сглаженные» значения «состоявшихся» или, что более интересно в приложениях, «будущих» прогнозных значений *Ук* при тех или иных значениях *«к»*.

Интервал упреждения при этом, как правило, не должен превышать одной трети интервала наблюдения, который, в свою очередь, должен быть не менее 7 отсчетов для модели (1), не менее 9 отсчетов для модели (2), не менее 8 отсчетов для модели (3). Как показало количественное моделирование на реальных и модельных данных, приведенных в [2], для сглаживания стохастического компонента обычно достаточно 15 - 16 отсчетов.

Выбор в пользу «гладкой» или «колебательной» логистической динамики, а также между моделями (3) и (4) может быть сделан, исходя из априорных предположений, по виду тренда, по мере адекватности идентифицированных моделей реальным статистическим данным.

В более общем случае процесс, достигнув насыщения, может иметь стадию стабилизации, а затем вновь расти по логистическому закону или даже падать с последующим ростом [1]. В первом случае очевидна возможность моделирования тенденции суммой («склейкой») двух логист, причем у второй будет запаздывающий аргумент. Случай падения значений анализируемого показателя распространен, например, при моделировании социальных процессов [5]: наряду с логистической тенденцией имеется и колеблемость некоторого общего вида около нее, не сводящаяся к (5), (6), (7) или их комбинациям. Это так называемые длинные волны экономической динамики, появление которых объясняется неравномерностью инновационной активности.

В экономике одновременно действуют несколько (как правило, не больше двух) технологических укладов с периодом жизни 100 – 150 лет, что демонстрирует рис. 1 (коэффициент по оси ординат на рис. 1 равен десяти). Зарождение нового технологического уклада по времени совпадает с началом падения эффективности доминирующего уклада. Суммарная траектория экономической эволюции испытывает колебания вокруг повышающегося тренда.

Большинство теорий экономической эволюции исходят из чисто экономических предпосылок, однако ряд экономистов уделяет большое внимание и социальным факторам. Некоторые зарубежные ученые (К. Перес, И. Миллендорфер) являются сторонниками интегрированного подхода, объясняющего явление периодичности взаимодействием технико-экономических и социальных сфер. Одной из причин кризисов является рассогласование скоростей инноваций в экономической и социальных областях.

Покажем, что траекторию экономической эволюции можно моделировать суммой двух функций (показанных на рис. 1) с запаздывающими аргументами $\tau_{з1}$ и $\tau_{з2}$:

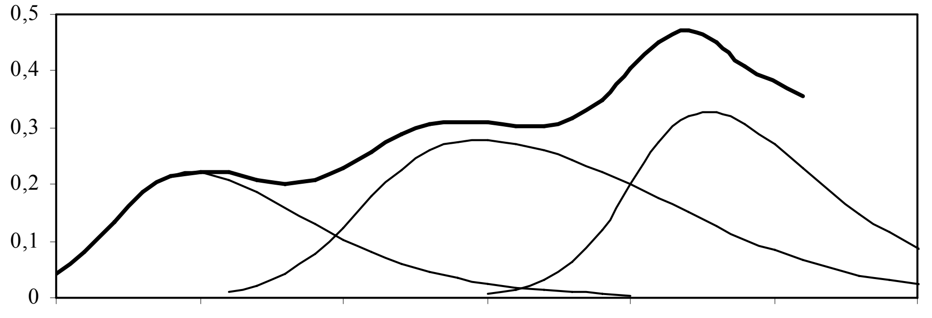

Рис. 1. Траектория экономической эволюции

$$Y(t) = A_1(t - \tau_{з1})^{\pi 1} exp(-\alpha_1(t - \tau_{з1})) +$$
$$+ A_2(t - \tau_{з2})^{\pi 2} exp(-\alpha_2(t - \tau_{з2})). \quad (11)$$

Амплитуды, симметричность или крутизна фронтов каждого из импульсов могут быть различны. Общим случаем при осуществлении идентификации модели (11) является допущение существования обоих импульсов в момент времени τ_0 начала эконометрического моделирования.

Тогда запись суммы двух импульсов в новом времени $t_1 = t - \tau_0$ при ограничении биномиальных рядов разложения каждого из импульсов первыми тремя членами примет вид

$$Y(t_1) = A_1\tau_{з1}^{\pi 1}(1 + \pi_1 t_1/\tau_1 + \pi_1(\pi_1 - 1)\backslash$$
$$\backslash\, 2t_1^2\tau_1^2) exp(-\alpha_1 t_1) exp(-\alpha_1\tau_1) +$$
$$+ A_2\tau_{з2}^{\pi 2}(1 + \pi_2 t_1/\tau_2 + \pi_2(\pi_2 - 1)\backslash 2t_1^2\tau_2^2)\times$$
$$\times\, exp(-\alpha_2 t_1) exp(-\alpha_2\tau_2) + \xi\kappa,$$

где $\tau_1 = \tau_0 - \tau_{з1}$, $\tau_2 = \tau_0 - \tau_{з2}$.

Вводя обозначения

$$B_1 = A_1\tau_{з1}^{\pi 1} exp(-\alpha_1\tau_1),$$
$$B_2 = A_2\tau_{з2}^{\pi 2} exp(-\alpha_2\tau_2),$$
$$C_1 = \pi_1/\tau_1,$$
$$C_2 = \pi_2/\tau_2,$$
$$D_1 = \pi_1(\pi_1 - 1)\backslash 2\tau_1^2,$$
$$D_2 = \pi_2(\pi_2 - 1)\backslash 2\tau_2^2,$$

получим аппроксимативную модель траектории экономической эволюции

$$Y(t_1) = (B_1 + B_1C_1t_1 + B_1D_1t_1^2) exp(-\alpha_1 t_1) +$$
$$+ (B_2 + B_2C_2t_1 + B_2D_2t_1^2) exp(-\alpha_2 t_1) + \theta(t).$$

Последнему выражению можно поставить в соответствие авторегрессию шестого порядка

$$Y\kappa = \mu_1 Y\kappa\text{-}1 - \mu_2 Y\kappa\text{-}2 + \mu_3 Y\kappa\text{-}3 - \mu_4 Y\kappa\text{-}4 +$$
$$+ \mu_5 Y\kappa\text{-}5 - \mu_6 Y\kappa\text{-}6 + \xi\kappa,$$

где

$$\mu_1 = 3(\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$\mu_2 = 3(\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2),$$
$$\mu_3 = \lambda_1^3 + 9\lambda_1\lambda_2^2 + 9\lambda_2\lambda_1^2 + \lambda_2^2,$$
$$\mu_4 = \mu_2\lambda_1\lambda_2,$$
$$\mu_5 = \mu_1(\lambda_1\lambda_2)^2,$$
$$\mu_6 = (\lambda_1\lambda_2)^3,$$
$$\lambda_1 = 2exp(-\alpha_1\Delta),$$
$$\lambda_2 = 2exp(-\alpha_2\Delta).$$

Решение соответствующей СЛАУ шестого порядка для реализации условия нахождения ОМНК – оценок $\mu_1°$, $\mu_2°$, $\mu_3°$, $\mu_4°$, $\mu_5°$, $\mu_6°$ позволит на первом этапе идентификации определить ОМНК – оценки модели по формулам

$$\alpha_1° = -Ln\lambda_1°\backslash\Delta,$$
$$\alpha_2° = -Ln\lambda_2°\backslash\Delta,$$

в которых

$$(\lambda_2°)^2 - \mu_1°\lambda_2°\backslash 3 + \mu_4°\backslash\mu_2° = 0,$$
$$\lambda_1° = \mu_4°\backslash(\mu_2°\lambda_2°).$$

Подстановка ОМНК-оценок $\alpha_1°$ и $\alpha_2°$ в приведенную выше модель экономической эволюции, реализация условия ОМНК-оценок $B_i°$, $(B_iC_i)°$, $(B_iD_i)°$ $(I = 1, 2)$ приводит на втором этапе идентификации к СЛАУ шестого порядка, из которой рассчитываются $B_1°$, $C_1°$, $D_1°$, $B_2°$, $C_2°$, $D_2°$, а через них, с учетом принятых обозначений, и параметры

$$\tau_1° = C_1°\backslash((C_1°)^2 - 2D_1°),$$
$$\tau_2° = C_2°\backslash((C_2°)^2 - 2D_2°),$$
$$\pi_1° = (C_1°)^2\backslash((C_1°)^2 - 2D_1°),$$
$$\pi_2° = (C_2°)^2\backslash((C_2°)^2 - 2D_2°),$$
$$A_1° = B_1° exp(-\alpha_1°\tau_1°)\backslash(\tau_1°)^{\pi 1°},$$
$$A_2° = B_2° exp(-\alpha_2°\tau_2°)\backslash(\tau_2°)^{\pi 2°},$$
$$\tau_{з1}° = \tau_0 - \tau_1°,$$
$$\tau_{з2}° = \tau_0 - \tau_2°.$$

Для идентификации модели (11) минимально необходимо 11 отсчетов динамического ряда.

Таким образом, предложены методы идентификации по статистическим данным пяти наиболее широко употребляемых моделей логист, причем с приближением к реальной экономической практике: возможностью учета временного тренда, экзогенных воздействий, колеблемости общего вида.

Методы позволяют достаточно просто, по малому числу отсчетов динамического ряда (что эквивалентно малому требуемому периоду стационарности каждой из моделей), без знания априорных сведений о параметрах логисты осуществить идентификацию модели логистической динамики.

Список литературы

1. Эконометрика/ Под ред. И. И. Елисеевой. - М.: Финансы и статистика, 2002.

2. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. - М.: Статистика, 1977.

3. Джонсон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.

4. Семёнычев В. К. Идентификация экономической динамики на основе моделей авторегрессии. – Самара: АНО «Изд-во СНЦ РАН», 2004.

5. Плотинский Ю. М. Теоретические и эмпирические модели социальных процессов. – М.: «Логос», 1998.

SIMULATION OF LOGISTIC DINAMICS IN CONDITIONS OF REAL ECONOMY

© 2005 V. K. Semyonytchev

Samara State Aerospace University

Methods of stimulating actual statistical data with the help of logistic models are proposed. They are based on autoregressions of dynamic sets of economic dynamics indices with regard to exogenous influences which occur in practice. The methods use small samples and do not assume a priori knowledge about the processes being analysed.