

УДК 535.42

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ И АКСИКОНА В МОДЕЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И СКАЛЯРНОЙ ПАРАКСИАЛЬНОЙ ОПТИКИ

© 2012 А. В. Устинов, А. В. Карсаков, С. Н. Хонина

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

В рамках скалярной параксиальной волновой модели для параболической линзы и аксикона получены точные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды вдоль оптической оси. Выполнен анализ этих выражений и проведено сравнение с ранее полученными результатами в геометрическом приближении. Показано, что для линзы невозможно усилить интенсивность в фокусе за счёт увеличения радиуса элемента, а для аксикона это возможно.

Параболическая линза, аксикон, параксиальное приближение, распределение вдоль оптической оси.

Введение

Бурный интерес во второй половине прошлого века к бездифракционным пучкам [1,2] сделал аксикон – как рефракционный [3], так и дифракционный [4] – классическим элементом современной оптики. Сочетание аксикона с линзой позволяет управлять как продольным, так и поперечным распределением лазерных пучков [5-9].

В работе [8] было показано, что при использовании средств дифракционной оптики тандем «линза+аксикон» можно заменить одним дифракционным элементом (названным фраксиконом), фаза которого имеет дробную степень зависимости от радиальной координаты. Рефракционные аналоги таких элементов исследовались в работе [10] в рамках геометрической модели.

В данной работе для параболической линзы и аксикона, как частных случаев фраксикона [8] или обобщённой параболической линзы [10], получены точные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды и интенсивности вдоль оптической оси в рамках скалярной параксиальной волновой модели. Проведено сравнение этих выражений с результатами геометрического приближения.

Общая постановка задачи

Рассмотрим фраксикон – дифракционный оптический элемент (ДОЭ), комплексная функция пропускания которого определяется формулой [8]:

$$\tau(r) = \begin{cases} \exp[-i(k\alpha_0 r)^\gamma], & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, γ – положительное число, R – радиус оптического элемента, α_0 – безразмерный коэффициент, связанный с числовой апертурой ДОЭ NA :

$$\alpha_0 = \left[\frac{NA}{\gamma(kR)^{\gamma-1}} \right]^{1/\gamma}. \quad (2)$$

При падении на оптический элемент (1) плоской волны будет формироваться поле, комплексная амплитуда которого вдоль оптической оси в условиях применимости приближения Френеля (параксиальное приближение) вычисляется по формуле

$$U(z) = \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-i(ka_0 r)^\gamma] \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) r dr. \quad (3)$$

Для упрощения записи формул произведём преобразование показателя:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= -(k\alpha_0 r)^\gamma + \frac{ikr^2}{2z} = \\ &= -\alpha(r^\gamma - ar^2), \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\text{где } \alpha = (k\alpha_0)^\gamma, a = \frac{k^{1-\gamma}}{2z\alpha_0^\gamma}, \alpha a = \frac{k}{2z}. \quad (4б)$$

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл записывается в виде

$$U(z) = 2\alpha a \int_0^R \exp[-i\alpha(r^\gamma - ar^2)] r \, dr. \quad (5)$$

Интеграл (5) можно вычислить приближённо методом стационарной фазы [11]. Данный метод основан на том, что при наличии быстро осциллирующей подынтегральной функции главный вклад дают окрестности точек, в которых частота (производная от фазы) равна нулю. Поэтому для вычисления интеграла (5) произведём разложение экспоненты в ряд Тейлора и приближённо получим:

$$\exp[i\psi(r)] \approx \exp\left\{i\left[\psi(r_0) + \frac{\psi''(r_0)}{2}(r-r_0)^2\right]\right\}, \quad (6)$$

в котором стационарная точка r_0 определяется из условия:

$$\psi'(r_0) = 0. \quad (7)$$

Если таких точек несколько, то производится разбиение отрезка интегрирования.

В простейшем варианте метода стационарной фазы остальные функции в подынтегральном выражении заменяются на значения при $r = r_0$, а пределы интегрирования расширяются до бесконечных. При этом предполагается, что стационарная точка лежит внутри отрезка интегрирования (не слишком близко к краю). Если же она совпадает с концом отрезка, то соответствующий ей предел интегрирования заменяется нулём (а не бесконечностью).

Рассмотрим значения $\gamma = 2$ и $\gamma = 1$, соответствующие параболической линзе и аксикону. Заметим, что выражение (6) для этих частных случаев становится точным.

Параболическая линза ($\gamma = 2$)

В этом случае имеем соотношения:

$$\psi(r) = -\alpha(1-a)r^2, \quad (8а)$$

$$\alpha = (k\alpha_0)^2, a = (2kz\alpha_0^2)^{-1}, \quad (8б)$$

стационарная точка $r_0 = 0$.

Простое применение метода стационарной фазы приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-i\alpha(1-a)r^2] dr \approx \\ &\approx \frac{k}{z} \frac{r_0}{\sqrt{\alpha(1-a)}} \int_0^\infty \exp[-ix^2] dx = \\ &= \frac{k}{z} \frac{r_0}{\sqrt{\alpha(1-a)}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1-i). \end{aligned} \quad (9)$$

Из-за того, что $r_0 = 0$, получаем $U(z) \approx 0$, что является неприемлемым результатом.

Замена в (9) $y = r^2$ приведёт к выражению

$$U(z) = \frac{k}{2z} \int_0^{R^2} \exp[-i\alpha(1-a)y] dy, \quad (10)$$

которое не имеет стационарной точки.

Учитывая, что выражение (6) для случая $\gamma = 2$ является точным, можно получить точное аналитическое выражение:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-ia(1-a)r^2] dr = \\ &= \frac{k}{z} \frac{i}{2a(1-a)} \left\{ \exp[-ia(1-a)R^2] - 1 \right\} = \\ &= \frac{i}{2kza_0^2 - 1} \left\{ \exp\left[-i(kR)^2 \left(a_0^2 - \frac{1}{2kz}\right)\right] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Распределение интенсивности вдоль оси описывается следующей формулой:

$$\begin{aligned} I(z) &= |U(z)|^2 = \\ &= \frac{4}{(2a_0^2kz - 1)^2} \sin^2 \left[\frac{(kR)^2}{2} \left(a_0^2 - \frac{1}{2kz}\right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из (11), при $a \rightarrow 1$ возникает неопределённость, которая после раскрытия приводит к выражению

$$U(z) \xrightarrow{a \rightarrow 1} \frac{kR^2}{2z}. \quad (13)$$

При этом $z \rightarrow (2k\alpha_0^2)^{-1}$, что соответствует достижению максимального значения интенсивности (12). Таким образом, это значение естественно назвать фокусным расстоянием:

$$f = \frac{1}{2k\alpha_0^2}, \quad (14)$$

$$U(f) = (\alpha_0 kR)^2, \quad (15a)$$

$$I(f) = (\alpha_0 kR)^4. \quad (15b)$$

На рис. 1 приведены результаты расчёта по (12) при следующих параметрах: длина волны $\lambda=1$ мкм, радиус ДОО $R=100\lambda$, числовая апертура $NA=0,1$, $\alpha_0=0,0089$. На рис. 1, б приведено распределение интенсивности вдоль оптической оси. Отличие результатов, получен-

ных на основе численного интегрирования (3) и расчёта с использованием выражения (12), составляет менее 3% (линии практически сливаются) и связано с погрешностью численного интегрирования. По формуле (14) $f \approx 1004\lambda$, что на 1% больше, чем численный результат. Аналитическое выражение (12) позволяет получить некоторые оценки.

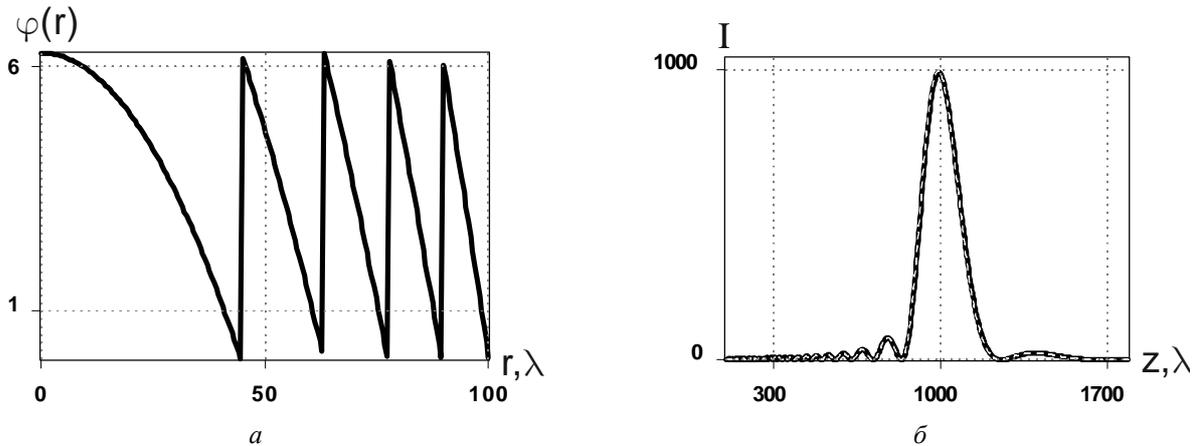


Рис. 1. Параболическая линза: а - фаза, б - распределение интенсивности вдоль оптической оси: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (3), сплошная линия – расчёт по формуле (12)

В частности, протяжённость (или длину) главного лепестка можно найти из следующих рассуждений. Первый нуль после фокуса будет, если аргумент синуса

$$\text{равен } \pi, \text{ то есть при } z_1 = \left[2k\alpha_0^2 - \frac{4\pi}{(kR)^2} \right]^{-1},$$

а первый нуль до фокуса - если аргумент синуса равен $-\pi$, то есть при

$$z_{-1} = \left[2k\alpha_0^2 + \frac{4\pi}{(kR)^2} \right]^{-1}.$$

Тогда длина главного лепестка равна:

$$L = z_1 - z_{-1} \approx \frac{2\pi}{k^3 R^2 \alpha_0^4} \quad (16)$$

и

$$L/f \approx \frac{4\pi}{k^2 R^2 \alpha_0^2}. \quad (17)$$

Для приведённых выше параметров из (16) $L \approx 404\lambda$, что примерно на 4% меньше, чем численный результат.

В параксиальном случае несимметричность вблизи фокуса достаточно мала. При отдалении от фокуса несимметричность существенно возрастает.

Справа от фокуса лепестки становятся всё шире, убывая по высоте почти до нуля, причём их число ограничено. Можно доказать, что их количество равно целой части от выражения

$$N_r = \left[\frac{k^2 R^2 \alpha_0^2}{2\pi} \right], \quad (18a)$$

которое с использованием (14) и (16) можно записать как

$$N_r = [2f/L]. \quad (18b)$$

Слева от фокуса лепестки становятся всё уже, при этом их высота не стремится к нулю. Формально число лепестков не ограничено, но при малых значениях z перестаёт выполняться условие параксиальности, при котором получена формула (12).

Определим теперь максимальную достижимую интенсивность в фокусе. Из выражения (15) кажется, что для увеличения интенсивности в фокусе (при фиксированной длине волны) следует увеличивать α_0 и R . Однако увеличение радиуса R может привести к нарушению условия параксиальности, а с ростом α_0 убывает максимально допустимый радиус оптического элемента R_{\max} - аналог границы полного внутреннего отражения в геометрической оптике.

Количественно имеем следующее условие – радиус элемента лимитируется требованием, чтобы мгновенный полупериод фазовой функции был не меньше половины длины волны. Для упрощения рассуждений вместо функции (1) возьмём имеющую тот же мгновенный период функцию $\sin\left[(k\alpha_0 r)^2\right]$. Полупериодом в данном случае является расстояние между соседними нулями. Нули находятся в точках $r_m = \sqrt{m\pi}/k\alpha_0$, а расстояние между соседними нулями равно $r_{m+1} - r_m = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{m+1} - \sqrt{m}\right)/k\alpha_0$ и убывает с ростом номера m . Из условия, что это расстояние не должно быть меньше половины длины волны, получим неравенство $\sqrt{m+1} - \sqrt{m} \geq \alpha_0 \sqrt{\pi}$. (19)

В параксиальном случае α_0 мало, поэтому вблизи равенства m большое. Следовательно, левую часть можно приближённо заменить на $(2\sqrt{m})^{-1}$. Получаем, что максимально возможное значение m равно $(4\pi\alpha_0^2)^{-1}$, а соответствующий максимальный радиус

$$R_{\max} = (2k\alpha_0^2)^{-1} = f, \quad (20)$$

что равно значению фокуса (14).

Подставив (20) в (15б), получим максимально возможную интенсивность в точке фокуса при заданной длине волны:

$$I_{\max}(f) = (2\alpha_0)^{-4}. \quad (21)$$

Это выражение не зависит от длины волны и приводит к довольно странному выводу: чем более длиннофокусна линза (в этом случае $\alpha_0 \rightarrow 0$), тем больше интенсивность при условии использования линзы с максимально возможным радиусом. Противоречие кроется в последнем условии, т.к. при значении радиуса (20) нарушается условие параксиальности. Таким образом, для линзы невозможно усилить интенсивность в фокусе за счёт увеличения радиуса элемента.

Сравним эти результаты с полученными ранее в геометрооптическом приближении [10]. Найдём связь между параметрами, описывающими элемент. В рамках геометрооптической модели набег фазы определяется выражением

$$\psi_g(r) = k(n-1)\alpha_g r^2, \quad (22)$$

где n – показатель преломления рефракционного оптического элемента.

Приравняем (22) и набег фазы из (1) и получим соотношение

$$\alpha_g = k\alpha_0^2/(n-1). \quad (23)$$

Если использовать (23), то геометрооптическое значение фокуса (точнее, его предельное значение, соответствующее центру элемента) [10]

$$f_g = \frac{1}{2\alpha_g(n-1)} = \frac{1}{2k\alpha_0^2} = f \quad (24)$$

окажется равно параксиальному волновому фокусу (14).

Но есть существенное отличие: в геометрооптическом случае упомянутое значение фокуса находится в крайней точке распределения интенсивности, а не в средней его части.

Сравнение глубины фокуса весьма затруднительно, так как формула (16) даёт длину только главного лепестка, а геометрооптическая глубина фокуса

$$L_g = \frac{2n-1}{4\alpha_g(n^2-1)} \quad (25)$$

есть полная длина освещённого участка, в том числе и за пределами области параксиальности.

Теперь сравним интенсивность в точке фокуса. При геометрооптическом

подходе (с учётом того, что в [10] выражение было получено для толщины фокального отрезка порядка длины волны)

$$I_g = \frac{\pi}{\alpha_g (n+1)\lambda} = \frac{n-1}{2\alpha_0^2 (n+1)}. \quad (26)$$

Это выражение существенно отличается и от (15б), и от (21). Такой результат можно считать вполне ожидаемым, так как при учёте волновой природы излучения в окрестности точки фокуса геометрическое приближение имеет наибольшую погрешность.

Аксикон ($\gamma=1$)

В этом случае имеем следующие соотношения:

$$\psi(r) = -\alpha(1-ar)r, \quad (27a)$$

$$\alpha = k\alpha_0, \quad a = (2z\alpha_0)^{-1}, \quad (27b)$$

стационарная точка $r_0 = \alpha_0 z$.

Амплитуда поля вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp[-ia(r-ar^2)] r dr = \\ &= \frac{k}{z} \int_0^R \exp\left[-ia\left[\frac{1}{4a} - a\left(r - \frac{1}{(2a)^2}\right)\right]\right] r dr = \\ &= \frac{k}{z} \exp\left(-i\frac{kza_0^2}{2}\right) \int_0^R \exp\left[i\frac{k}{2z}(r-a_0z)^2\right] r dr. \end{aligned} \quad (28)$$

Простое применение метода стационарной фазы приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} U(z) &\approx \frac{k}{z} \exp\left(-i\frac{kza_0^2}{2}\right) r_0 \sqrt{\frac{2z}{k}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix^2) dx = a_0 \sqrt{pkz} \times \\ &\times \exp\left(-i\frac{kza_0^2}{2}\right) (1+i). \end{aligned} \quad (29)$$

В соответствии с условиями применимости метода стационарной фазы здесь предполагается, что r_0 не очень мало ($r_0 \geq r_d$) и находится не слишком близко к краю ($r_0 \leq R - r_u$). Поскольку имеется зависимость стационарной точки от расстояния z , то аналогичный диапазон справедливости выражения (29) накладывается на z . Границы r_d и r_u можно определить, если отказаться от замены пределов интегрирования на бесконечные, что будет рассмотрено далее.

При совпадении стационарной точки с границей оптического элемента ($R = \alpha_0 z$) верхний предел интегрирования в (29) должен быть не плюс бесконечность, а ноль, что приведёт к уменьшению значения в два раза. При больших значениях z необходимо положить $U(z) \approx 0$. Предполагая, что условия справедливости формулы (29) выполнены, найдём интенсивность:

$$I(z) \approx \begin{cases} 2\pi k z \alpha_0^2, & z \leq R/\alpha_0, \\ 0, & z > R/\alpha_0. \end{cases} \quad (30)$$

Таким образом, в определённых пределах интенсивность линейно возрастает.

На рис. 2 приведены результаты расчёта по (30) при следующих параметрах: длина волны $\lambda=1$ мкм, радиус ДОО $R=100\lambda$, числовая апертура $NA=0,1=\alpha_0$. На рис. 2, б приведено распределение интенсивности вдоль оптической оси. Отличие результатов, полученных на основе численного интегрирования (3) и расчёта с использованием (30), очень значительно, фактически выражение (30) является аналогом геометрического приближения [10] и соответствует усреднённой линии.

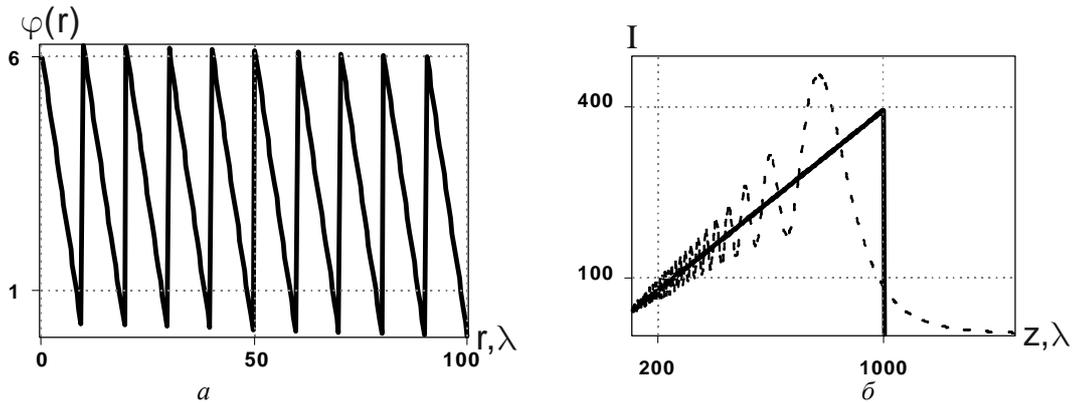


Рис. 2. Аксикон: а - фаза, б - распределение интенсивности вдоль оптической оси: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (3), сплошная линия – расчёт по формуле (30)

Максимальную интенсивность можно найти, считая, что стационарная точка совпадает с границей оптического элемента. Получаем верхнюю границу для расстояния:

$$z_{\max} = R/\alpha_0. \tag{31}$$

Это выражение совпадает в параксиальном случае с оценкой, полученной в работе [2]:

$$z_{\max} = R\sqrt{1-\alpha_0^2}/\alpha_0. \tag{32}$$

Тогда максимальная интенсивность

$$I(z \rightarrow z_{\max}) = 2\pi\alpha_0 kR. \tag{33}$$

Значение, вычисленное по (33), является несколько завышенным, т.к. максимум достигается на более близком расстоянии, чем z_{\max} (рис. 2, б), а в самой точке z_{\max} интенсивность будет в четыре раза меньше, чем вычисленная по формуле (33). Это связано с тем, что стационарная точка находится на краю отрезка интегрирования и поэтому верхний предел равен нулю.

Выражение (33) предсказывает увеличение интенсивности при увеличении α_0 и R . Для определения предельного радиуса проанализируем функцию $\sin(k\alpha_0 r)$. Нули находятся в точках

$r_m = m\pi/k\alpha_0$, расстояние между соседними нулями равно $r_{m+1} - r_m = \pi/k\alpha_0$ и является постоянной величиной. Чтобы она была не меньше половины длины волны, должно выполняться неравенство $\alpha_0 \leq 1$, при этом на радиус ограничений нет.

Подставив $\alpha_0 = 1$ в (33), получим максимально возможную интенсивность на краю осевого отрезка:

$$I_{\max} = 2\pi kR. \tag{34}$$

С ростом R величина (34) будет расти, одновременно точка максимума интенсивности удаляется от оптического элемента. Этот результат является парадоксальным, т.к. значение $\alpha_0 = 1$ выводит за рамки параксиальности, а следовательно, применимости рассматриваемой модели.

Сравним приведённые выше выражения с ранее полученными результатами в геометрооптическом приближении [10]. Для рефракционного аксикона набег фазы определяется выражением

$$\psi_g(r) = k(n-1)\alpha_g r. \tag{35}$$

Приравнивая (35) и набег фазы из (1), получим соотношение

$$\alpha_g = \alpha_0/(n-1). \tag{36}$$

Теперь сравним распределение интенсивности. При геометрическом подходе распределение интенсивности описывается формулой [10]:

$$I_g(z) = \frac{2\pi z}{\lambda \beta^2} = \frac{kz}{\beta^2}, \quad (37)$$

где величина β с учётом (36) выражается через α_0 и n . В этом случае условием прохождения лучей через элемент (до наступления полного внутреннего отражения) является неравенство $\alpha_0 \leq \sqrt{(n-1)(n+1)}$ - более жёсткое, чем $\alpha_0 \leq 1$.

Если сравнить (30) и (37), то получим, что распределения совпадают, если выполнено условие: $2\pi\alpha_0^2 = 1/\beta^2$. Можно доказать, что оно тождественно не выполняется, поэтому в общем случае скорость линейного возрастания интенсивности в волновом и геометрическом подходах отличается.

В геометрическом подходе $z_{\max} = \beta R$ и интенсивность на краю отрезка $I_g(z_{\max}) = \frac{kR}{\beta}$. (38)

Сравнение (38) с (33) приводит к следующим выводам: длина светового отрезка совпадает при $\alpha_0 = 1/\beta$, а интенсивность на конце отрезка (тогда длины будут разными) совпадает при $2\pi\alpha_0 = 1/\beta$. Таким образом, получаются три различных варианта согласования волновой и геометрической моделей, поэтому выполниться может только один из них.

Максимально возможная интенсивность (37) в геометрическом подходе бесконечно велика ($I_g \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \infty$) и достигается на границе наступления полного внутреннего отражения ($\alpha_0 = \sqrt{(n-1)(n+1)}$).

Геометрически это становится очевидным, если учесть, что в этом случае световой отрезок сжимается в одну точку.

Выражения (29), (30) являются приближёнными и применимы не на всём диа-

пазоне параметров. Для $\gamma = 1$ интеграл (3) может быть вычислен точно:

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{k}{z} \exp\left(-i \frac{kz a_0^2}{2}\right) \times \\ &\times \int_0^R \exp\left[\frac{ik}{2z}(r - a_0 z)^2\right] r dr = \\ &= -i \left\{ \exp\left[-ikR\left(\frac{R}{2z} - a_0\right)\right] - 1 \right\} + \\ &+ a_0 \sqrt{pkz} \exp\left(-i \frac{kz a_0^2}{2}\right) \times \\ &\times \left\{ E\left[\frac{k(R - a_0 z)^2}{2z}\right] + E\left(\frac{kz a_0^2}{2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $E(x) = C(x) + iS(x)$,

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt - \text{функции Френеля} \quad [12].$$

Если $\alpha_0 z > R$, то первое слагаемое в фигурных скобках изменит знак на минус.

Основное отличие (39) от (29) – появление первого слагаемого. Второе слагаемое в бесконечных пределах стремится к выражению (29).

Проведём анализ формулы (39). Определим границу, за которой функцию Френеля можно заменить её предельным значением $1/2$. Для упрощения расчёта граничное значение аргумента функции Френеля обозначим πb (обычно достаточно взять $b = 3$).

Нижняя граница: $\alpha_0^2 kz/2 > \pi b$, откуда

$$z_{\min} > \frac{b\lambda}{\alpha_0^2}. \quad (40)$$

Верхняя граница: $k(R - \alpha_0 z)^2/2z > \pi b$, откуда, решая квадратное уравнение $\alpha_0^2 z^2 - (2\alpha_0 R + b\lambda)z + R^2 = 0$ и взяв меньший корень, найдём:

$$z_{\max} < \frac{1}{\alpha_0} \left(R + \frac{b\lambda}{2\alpha_0} - \sqrt{\frac{b\lambda R}{\alpha_0}} \sqrt{1 + \frac{b\lambda}{4\alpha_0 R}} \right). \quad (41a)$$

Если в знаменателе исходного неравенства можно подставить $z = R/\alpha_0$, то получится более простое условие:

$$z_{\max} < \frac{1}{\alpha_0} \left(R - \sqrt{\frac{b\lambda R}{\alpha_0}} \right). \quad (41б)$$

Этот же результат получится, если в (41a) пренебречь $b\lambda$ по сравнению с $\alpha_0 R$.

Из (41) следует, что $z_{\max} \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow 0} \infty$.

Однако на α_0 есть ограничение снизу [13]: $\alpha_0 > \lambda/R$, и поэтому предельное значение $z_{\max} \xrightarrow{\alpha_0 \rightarrow 1/R} R^2 (1 - \sqrt{b})/1$.

На рис. 3 приведены результаты расчёта по (39) при тех же параметрах, что и для рис. 2. Отличие результатов, полученных на основе численного интегрирования (3) и расчёта с использованием выражения (39), составляет менее 1% (линии практически совпадают). Если учитывать только второе слагаемое в (39), то погрешность составляет 14%.

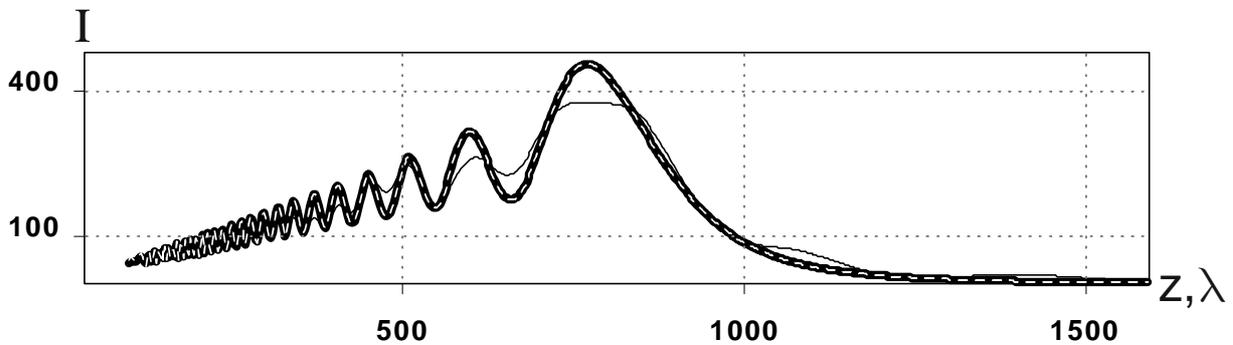


Рис. 3. Распределение интенсивности вдоль оптической оси, формируемое аксиконом: пунктирная линия – численное интегрирование выражения (3), жирная линия – расчёт по формуле (39), тонкая линия – расчёт с учётом в (39) только второго слагаемого

Первое слагаемое в (39) по модулю не превосходит 2, и поэтому оно вносит заметный вклад в общее распределение только в тех случаях, когда второе слагаемое имеет примерно такую же величину. Такая ситуация имеет место на двух участках оптической оси:

1. На начальном участке фокального отрезка. Граница участка лежит в пределах от $\lambda/\pi\alpha_0^2$ до $4\lambda/\pi\alpha_0^2$, причём ближе к первому значению. Сравнивая с (40), видим, что даже второе значение лежит в области, где приближение (29) неприменимо, при этом влияние первого слагаемого существенно. Его график имеет сгущающиеся осцилляции, а график второго слагаемого в данной области осцилляций не имеет.

2. Далее правого края фокального отрезка (см. (30)). Можно доказать, что на-

личие первого слагаемого обеспечивает стремление амплитуды к нулю с ростом расстояния. Первое слагаемое, начиная с некоторого z , стремится к ненулевому значению $-i[\exp(-i\alpha_0 kR) - 1]$. Второе слагаемое с точностью до величин высшего порядка малости стремится к этому же значению в противофазе.

Величина максимальной интенсивности вблизи правого края фокального отрезка в действительности больше, чем даёт формула (33), так как в этой области функция Френеля имеет значения, которые примерно в полтора раза больше предельного значения 0,5. Оценим эту интенсивность, рассматривая только второе слагаемое в (39). При этом в множителе \sqrt{kz} полагаем $z = R/\alpha_0$, а значения функций

Френеля с аргументом $kz\alpha_0^2/2$ заменяем предельным значением 0,5. В таком случае интенсивность выразится формулой

$$I_a(z) = pkRa_0 \left\{ \left[C \left(\frac{k(R-a_0z)^2}{2z} \right) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S \left(\frac{k(R-a_0z)^2}{2z} \right) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\} \quad (42)$$

Можно доказать, что выражение в фигурных скобках имеет максимум, равный 2,74 (с точностью, обеспеченной таблицей функций Френеля) при аргументе, равном 2,4. Поэтому максимальная интенсивность (без первого слагаемого) будет равна

$$I_a(z = z_0) \approx 2,74\pi kR\alpha_0. \quad (43)$$

Значение z_0 есть корень уравнения $k(R - \alpha_0 z)^2 / 2z = 2,4$, который вычисляется по формуле (41), где следует положить $b = 2,4/\pi \approx 0,764$. С учётом приближений, сделанных в (42), отметим, что величина максимума (43) является приближением с избытком, а z_0 - с недостатком.

Заключение

В работе рассмотрены частные случаи фраксикона - обобщённой параболической линзы при $\gamma = 2$ и $\gamma = 1$, соответствующие классической параболической линзе и аксикону. Получены точные аналитические выражения для распределения комплексной амплитуды и интенсивности вдоль оптической оси в рамках скалярной параксиальной волновой модели.

Аналитические выражения позволяют получить такие оценки, как протяжённость (глубина) фокуса, частота осцилляций, значение интенсивности в фокусе, и определить параметры, максимизирующие интенсивность. Показано, что для линзы невозможно усилить интенсивность в фо-

кусе за счёт увеличения радиуса элемента, в то время как для аксикона это возможно.

Сравнение с ранее полученными результатами в геометрооптической модели позволило определить границы применимости метода стационарной фазы и параксиального приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-07-00109-а и гранта Минобрнауки по ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (соглашения № 8231).

Библиографический список

1. Бессель-оптика [Текст] / А. Е. Безрезный, А. М. Прохоров, И. Н. Сисакян [и др.] // ДАН СССР. – 1984. – № 234 (4). – С. 802-805
2. Durnin, J. Diffraction-free beams [Text] / J. Durnin, J. J. Miceli, and J. H. Eberly // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V.58 – N.15. – P. 1499-1501.
3. McLeod, J. H. The axicon: a new type of optical element [Text] // J. Opt. Soc. Am. – 1954. – V.44. – P. 592–597.
4. Turunen, J. Holographic generation of diffraction-free beams [Text] / J. Turunen, A. Vasara, and A. T. Friberg // J. Appl. Opt. – 1988. – Vol. 27(19). – P. 3959-3962.
5. Lensacon [Text] / V. P. Koronkevich, I. A. Mikhaltsova, E. G. Churin [et al.] // Appl. Opt. – 1993. – Vol. 34(25). – P. 5761-5772.
6. Spherical aberration effects in lens-axicon doublets: theoretical study [Text] / C. Parigger, Y. Tang, D. H. Plemmons [et al.] // Appl. Opt. – 1997. – Vol. 36(31). – P. 8214-8221.
7. Burvall, A. Axicon imaging by scalar diffraction theory [Text] – PhD thesis, Stockholm, 2004.
8. Хонина, С. Н. Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью [Текст] / С. Н. Хонина, С. Г. Волотовский // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33. – №4. – С. 401-411.
9. Линзакон: непараксиальные эффекты [Текст] / С. Н. Хонина, Н. Л. Казан-

ский, А. В. Устинов [и др.] // Оптический журнал. – 2011. – Т. 78. – № 11. – С. 44-51.

10. Устинов, А. В. Геометрооптический анализ обобщённой рефракционной линзы [Текст] / А. В. Устинов, С. Н. Хонина // Изв. СНЦ РАН. – 2012. – Т. 14. – №4.

11. Федорюк, М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды [Текст] / М. В. Федорюк. – М.: Наука. 1987. – 544 с.

12. Янке, Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы [Текст] /

Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

13. Хонина, С. Н. Сравнительный анализ распределений интенсивности, формируемых дифракционным аксиконом и дифракционным логарифмическим аксиконом [Текст] / С. Н. Хонина, С. А. Балалаев // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33. – № 2. – С. 162-174.

COMPARATIVE ANALYSIS OF PARABOLIC LENS AND AXICON IN GEOMETRIC AND SCALAR PARAXIAL OPTICAL MODELS

© 2012 A. V. Ustinov, A. V. Karsakov, S. N. Khonina

Samara State Aerospace University
named after academician S. P. Korolyov (National Research University)

Accurate analytical expressions are deduced in the framework of a scalar paraxial wave model for the distribution of complex intensity along the optical axis of a parabolic lens and that of an axicon. The expressions are analyzed and compared with the results of ray-optical approximation. Increasing the intensity in the lens focus by increasing its radius is shown to be impossible, whereas it is possible in the case of an axicon.

Parabolic lens, axicon, paraxial approximation, distribution along optical axis.

Информация об авторах

Устинов Андрей Владимирович, аспирант кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва. E-mail: andr@smr.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ оптического моделирования, обработка изображений.

Карсаков Алексей Владиславович, студент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: karsakov.aleksejj@rambler.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика.

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: khonina@smr.ru. Область научных интересов: сингулярная оптика, дифракционная оптика, оптический анализ изображений.

Ustinov Andrey Vladimirovich, post-graduate student of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: andr@smr.ru. Area of research: diffractive optics, software design for optical modeling; images processing.

Karsakov Alexey Vyacheslavovich, undergraduate student, Samara State Aerospace University named after S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: karsakv.aleksejj@rambler.ru. Area of research: diffractive optics.

Khonina Svetlana Nikolaevna, doctor of science, professor of the department of technical cybernetics, Samara State Aerospace University named after S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: khonina@smr.ru. Area of research: singular optics, diffractive optics, optical image processing.