УДК 629.7.015.4

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ НЕСКВОЗНЫХ ТРЕЩИН (ЦАРАПИН) НА ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2012 А. С. Яковлев

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Целью настоящей работы является определение области возможных предельных состояний пластины, имеющей несквозной трещиновидный дефект (царапину), из идеального упругопластичного материала, находящегося в плоском напряжённом состоянии. Такая задача имеет более общий характер и представляет больший практический интерес, чем просто задача о трещине, поскольку в тонкостенных конструкциях и оболочках, будь то фюзеляж самолёта или топливные баки ракет и т.п., всегда существуют повреждения, возникающие в результате внешних воздействий и в процессе эксплуатации трансформирующиеся в царапины.

В свою очередь, размеры царапины будут в результате действия циклических нагрузок, возникающих при эксплуатации, постепенно увеличиваться (прежде всего по толщине). Естественным образом возникает задача определения таких предельных размеров этих дефектов, которые при заданном уровне эксплуатационных нагрузок могут привести к катастрофическому разрушению всей конструкции.

Тонкостенные элементы, нагрузки, плосконапряжённое состояние, краевая задача, царапина, трещина, Дагдейл.

Рассмотрим бесконечную пластину толщиной h, в которой имеется царапина длиной $2l$ и глубиной a (рис.1). Пластина растягивается на бесконечности напряжениями P, при этом выполняется условие $h << 2l$.

В этом случае считают, что справедлива гипотеза Дагдейла об узких, вытянутых вдоль линии царапины пластических законах длиной $c - l$, в которых действуют сжимающие напряжения, равные пределу текучести s_s [1]. Распространяя эту гипотезу на всю царапину, будем считать, что на всей её длине $2l$ также действуют сжимающие напряжения, величина которых зависит от глубины царапины (рис. 1):

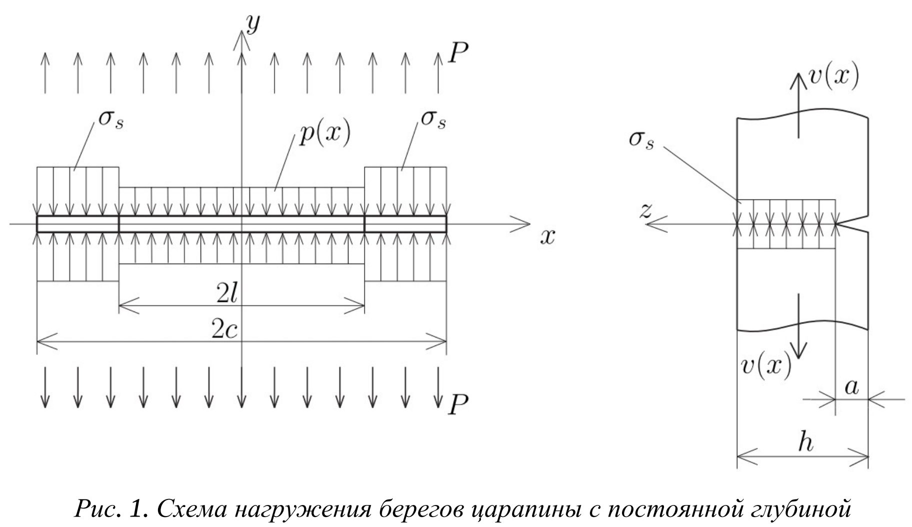

Рис. 1. Схема нагружения берегов царапины с постоянной глубиной

$$p(x) = s_s \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right). \qquad (1)$$

При a=0 получаем бездефектную пластину, находящуюся в состоянии текучести, а при a=h возникает задача Дагдейла для сквозной трещины.

Исходя из физического смысла задачи, очевидно, что на величину P следует наложить следующее ограничение:

$$p(x) \geq s_s \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right), \qquad (2)$$

чтобы при нагружении берега царапины не контактировали и не перекрывали друг друга.

Без учёта изменения толщины пластины (утонения) как на самой царапине, так и в пластических зонах (линеаризованная постановка) граничные условия для рассматриваемой задачи примут вид

$$p(x) = \begin{cases} -P + s_s \cdot \left(1 - \frac{a}{h}\right), & |x| \leq l \quad ; \\ -P + s_s, & l \leq |x| \leq c \,; \end{cases} \qquad (3)$$
$$v(x) = 0; \qquad |x| \geq c.$$

Здесь $v(x)$ – смещение берегов царапины и пластических зон.

Решение этой краевой задачи в классе разрывных решений теории упругости можно найти различными методами (использованием интегральных уравнений различного рода, сведением к задаче сопряжения и т.д.). В наиболее удобном виде решение задачи (3) запишется следующим образом [2,3]:

$$\mathrm{v}(x) = -\frac{\mathrm{m}}{2\pi} \cdot \left[-\mathrm{P} + \sigma_s \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{h}}\right) \cdot \int_{-1}^{1} \Gamma(\mathrm{c}, \mathrm{x}, \xi) d\xi\right] -$$
$$-\frac{\mathrm{m}}{2\pi} \cdot \left[(-\mathrm{P} + \sigma_s) \cdot \left(\int_{-c}^{-1} + \int_{1}^{c}\right) \Gamma(\mathrm{c}, \mathrm{x}, \xi) d\xi\right], \qquad (4)$$
$$|x| \leq c.$$

Здесь ξ - точка на оси x; $m = \dfrac{2}{E}$ для плоского напряжённого состояния; E – модуль упругости;

$$\Gamma(c, x, x) = \ln \frac{c^2 - x \cdot x + \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)}}{c^2 - x \cdot x - \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)}}. \qquad (5)$$

Сделаем замену переменных:

$$t = \frac{x}{c}; \qquad j = \frac{x}{c}; \qquad g = \frac{l}{c}$$

и перепишем уравнение (4) в виде

$$v(t) = -\frac{m \cdot s_s \cdot l}{2 \cdot p \cdot g} \cdot \left(\left(1 - \frac{P}{s_s}\right) \cdot \int_{-1}^{1} \Gamma(1, t, j) \cdot dj\right) +$$
$$+ \frac{m \cdot s_s \cdot l}{2 \cdot p \cdot g} \cdot \frac{a}{h} \left(\int_{-g}^{g} \Gamma(1, t, j) \cdot dj\right), \quad |t| \leq 1. \qquad (6)$$

В этом уравнении параметрами являются внешнее усилие P, которое считается независимым, и величина g , характеризующая длину пластических зон и определяемая из условия плавного смыкания их берегов $v'(t) = 0,\ t \to 1$. Поэтому, дифференцируя (6) по t , переходя к пределу при $t \to 1$ и опуская промежуточные выкладки, получим

$$\left(1 - \frac{P}{s_s}\right) = \frac{2}{p} \cdot \frac{a}{h} \cdot \arcsin g \,. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим окончательно

$$v(t) = -\frac{l \cdot l \cdot a}{p \cdot h \cdot g} \cdot [(g + t) \cdot \Gamma(1, t, -g)] -$$
$$-\frac{l \cdot l \cdot a}{p \cdot h \cdot g} [(g - t) \cdot \Gamma(1, t, g)], \quad |t| \leq 1. \qquad (8)$$

Здесь $l = \dfrac{s_s}{E}$.

Состояние, соответствующее началу роста царапины в направлении толщины пластины, определяем, используя деформационный критерий разрушения – критическое раскрытие трещины, при этом

$$v(0) = v_*, \qquad (9)$$

где v_* - предельное раскрытие берегов царапины, при котором она распространяется на всю толщину h в направлении оси z в некоторой малой окрестности точки t = 0. Тогда согласно уравнению (8) получим

$$v(0) = \frac{2 \cdot l \cdot l \cdot a}{p \cdot h} \cdot \ln \frac{1 + \sqrt{1 - g_0^2}}{1 - \sqrt{1 - g_0^2}} = v_*. \qquad (10)$$

Определив отсюда величину g_0, по формуле (7) можно вычислить значение внешнего усилия P_0, соответствующего началу процесса роста царапины по толщине.

Этот процесс, в зависимости от геометрических параметров царапины и механических характеристик материала, может развиваться как с увеличением внешней нагрузки, так и с её уменьшением. Но обязательно он приводит к конечному состоянию, при котором царапина трансформируется в сквозную трещину на всей своей длине.

Не проводя детального исследования процесса роста царапины по толщине, делаем сравнительный анализ только начального и конечного состояний, поскольку именно эти состояния характеризуют несущую способность рассматриваемой пластины выдерживать нагрузку без разрушения.

Параметры начального состояния определяются уравнениями (7) и (10). Условие разрушения в конечном состоянии, аналогичное (9), имеет вид

$$v(g_k) = v_*. \tag{11}$$

Параметры конечного состояния получим из (7) и (8), подставив в них значения $\frac{a}{h} = 1$ и $t = g_k$:

$$v(g_k) = -\frac{4 \cdot l \cdot l}{p} \cdot \ln g_k = v_*,$$

$$\frac{P_k}{s_s} = \frac{2}{p} \cdot \arccos g_k. \tag{12}$$

Введём следующие обозначения:

$$v_0 = \frac{p \cdot v(0)}{l \cdot l}; \quad v_k = \frac{p \cdot v(g_k)}{l \cdot l}$$

и параметр $\overline{P} = \frac{P_k}{P_0}$, характеризующий состояние пластины с царапиной: при $\overline{P} < 1$ предельным является начальное состояние, и конечное, если $\overline{P} > 1$.

Будем считать, что критическое значение раскрытия берегов v_* при одном и том же материале одинаково как для царапины, так и для трещины. Тогда

$$v_0 = v_k \tag{13}$$

и, задавая значения $\frac{a}{h}$ и $\frac{P_0}{s_s}$, из (7) и (10) находим v_0, а используя (13), по уравнениям (12) определяем соответствующие значения $\frac{P_k}{s_s}$ и $\overline{P}$. На рис. 2 представлены результаты численных расчётов по этому алгоритму.

Точки пересечения зависимостей $\overline{P}\left(\frac{a}{h}\right)$ с прямой $\overline{P} = 1$ определяют те значения $\frac{a}{h}$, меньше которых предельное состояние определяется по уравнениям (7) и (10). При больших значениях $\frac{a}{h}$ необходимо использовать уравнения (12). В обоих случаях должно выполняться условие (1).

На рис. 3 представлена зависимость $\frac{P_0}{s_s}$ от $\frac{a}{h}$ при $\overline{P} = 1$, полученная в результате перестроения данных на рис. 2, а также показана область допустимых значений $\frac{P_0}{s_s} \geq 1 - \frac{a}{h}$. Таким образом, если при заданном номинальном уровне внешних напряжений $\frac{P_0}{s_s}$ царапина в результате циклического изменения этих нагрузок при эксплуатации «прорастает» на глубину $\frac{a}{h}$, то по этим данным можно определять, в состоянии А или В находится пластина, и для определения предельных значений параметров, приводящих к разрушению, использовать соответствующие зависимости.

В заключение следует отметить то обстоятельство, что в реальных элементах конструкции царапины развиваются в глубину неравномерно таким образом, что изначально прямой фронт царапины искривляется, и это приводит к изменению границы между областями А и В на рис. 3.

Соответствующая задача для царапины с переменной глубиной рассматривается в работе [4].

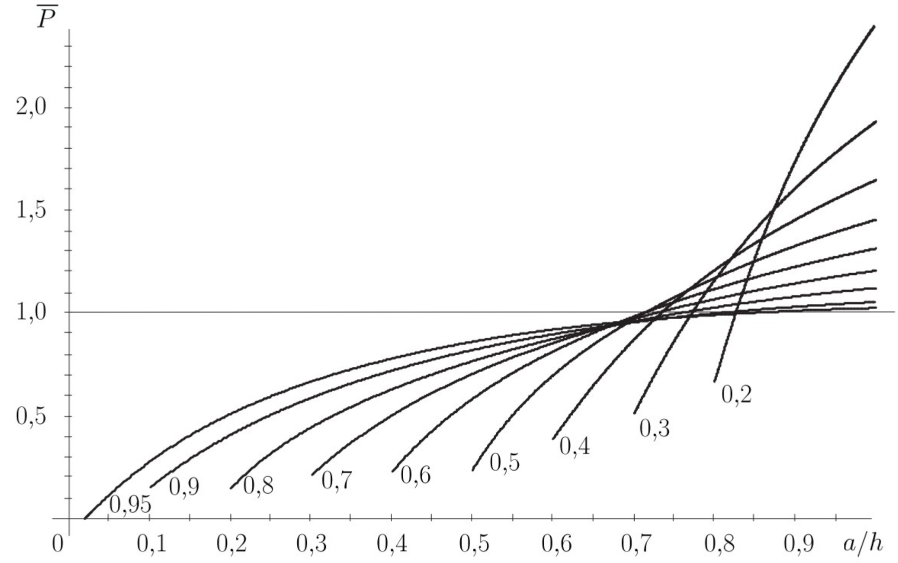

Рис. 2. Зависимости параметра $\overline{P}$ *от относительной глубины царапины* a/h *при различных* P_0 / s_s

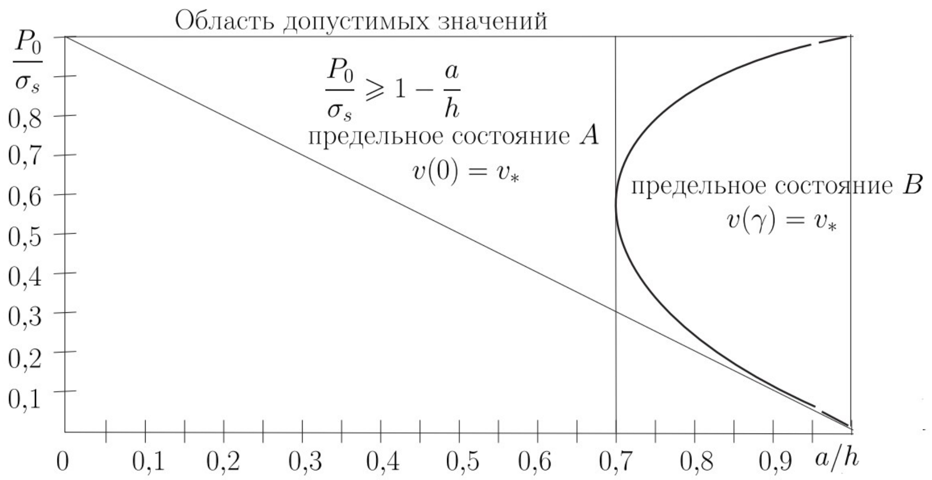

Рис. 3. Области определения предельного состояния пластины с царапиной:
A – область разрушения, определяемая царапиной;
B – область разрушения, определяемая трещиной

Библиографический список

1. Dugdale, D. Yielding of steel sheets contains slitsh [Text] / D. Dugdale // J. Mech. And Phys. Solids, 1960. – Vol. 8, No.2 – P. 100.

2. Быковцев, Г. И. Об одной модели разрушения в идеальных упругопластических средах [Текст] / Г. И. Быковцев, Л. Г. Лукашёв, С. Л. Степанов // Проблемы прочности. - 1982. - № 3. – С. 72.

3. Панасюк, В. В. Распределение напряжений около трещины в пластинах и оболочках [Текст] / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацышин. – Киев: Наукова думка, 1976. – 442 с.

4. Степанов, С. Л. Исследование предельного состояния пластин с несквозными трещинами переменной глубины в плоском напряжённом состоянии [Текст] / С. Л. Степанов // «Мат. моделирование и краевые задачи»: Тр. 3-ей Всерос. научн. конф. – Самара: СамГТУ, 2006. – Ч.1 «Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций». – С. 216 – 221.

ASSESSING THE IMPACT OF NON-THROUGH CRACKS (SCRATCHES) ON THE STRUCTURAL STRENGTH WHEN DESIGNING AIRCRAFT

 A. S. Yakovlev

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The aim of the paper is to determine the area of possible ultimate states of a plate made of an ideal elastoplastic material in a plane taut state, with the plate having a blind fractured defect (a scratch). This problem is of a more general character and presents a greater practical interest than just a scratch problem since in thin-walled constructions and enclosures whether it be plane fuselage or rocket fuel tanks etc. there always exist damages resulting from external actions and transforming into scratches in the process of operation.

It their turn, scratch dimensions will gradually increase as a result of cyclic loads arising during operation. There naturally arises a problem of determining the ultimate dimensions of these defects which can result in the fatal failure of the whole structure at a given level of operating loads.

Thin-walled elements, loads, boundary problem, plane taut state, scratch, crack, Dugdale.

Информация об авторе

Яковлев Александр Степанович, аспирант кафедры теоретической механики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: Sash84_777@bk.ru. Область научных интересов: конструкция и проектирование ЛА, прочность конструкций ЛА и КА, механика разрушений, механика трещин.

Yakovlev Alexander Stepanovich, post- graduate student, the department of theoretical mechanics, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University). E-mail: Sash84_777@bk.ru. Area of research: aircraft construction and design, aircraft and spacecraft structural strength, mechanics of destructions, mechanics of cracks.